Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

И. Л. Гуревич, О разрешимости задачи обтекания системы m профилей тяжелой жидкостью, *Тр. сем. по краев. задачам*, 1984, выпуск 21, 62–69

https://www.mathnet.ru/kukz141

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.80
24 мая 2025 г., 05:28:30

УДК 532.5

И. Л. Гуревич

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ОБТЕКАНИЯ СИСТЕМЫ m ПРОФИЛЕЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рассматривается обтекание тяжелой жидкостью системы m профилей, расположенных в канале с прямолинейным горизонтальным дном и свободной поверхностью. Доказывается разрешимость задачи при условии, что число Фруда больше единицы, а длины профилей и значения циркуляции достаточно малы.

1. Вывод системы уравнений

Примем следующие обозначения: $z' = x' + iy'$ — переменная в физической плоскости: L^- — прямая $y' = 0$ (дно канала); L^+ — свободная линия тока; $L = L^- \bigcup L^+$; $L^k \, (k = \overline{1, m})$ — обтекаемые профили; Λ_k — длина L^k; g — ускорение силы тяжести; Q — расход жидкости; $\varepsilon Q \Gamma_k$ — циркуляция вектора скорости вдоль L^k ($\varepsilon > 0$ — малый параметр); v — скорость; v_0 — скорость при $x' \to -\infty$ (течение на бесконечности происходит в положительном направлении оси x'); $w = \varphi + i\psi$ — комплексный потенциал; E_k — некоторая фиксированная точка на L^k; s'_k — длина дуги на L^k, отсчитываемая от E_k против часовой стрелки; $s_k = s'_k / \Lambda_k$; $\Psi_k(s_k)$ — угол между касательной к L^k и осью x'.

Пусть $(m+1)$-связной области течения $D_{z'}$ конформно соответствует область D_ζ в плоскости переменной ζ; D_ζ ограничена единичной окружностью $L_\zeta = L_\zeta^+ \bigcup L_\zeta^-$ (верхняя полуокружность L_ζ^+ соответствует L^+) и окружностями $L_\zeta^k \, (k = \overline{1, m})$, имеющими центры ζ_k и радиусы εr_k.

Будем считать известными Q, v_0, g, ε, r_k, Γ_k, $\Psi_k(s_k) \, (k = \overline{1, m})$. Требуется найти функции $w(\zeta)$, $z'(\zeta)$ (и в частности, Λ_k и $z'(E_k)$). Предполагается, что $\nu = gQ/v_0^3 < 1$, а функции $\Psi_k(s_k)$ таковы, что кривые с естественными уравнениями

$$z(s_k) = \int_0^{s_k} e^{i\Psi_k(s_k)} ds_k$$

простые, замкнутые, состоят из конечного числа дуг Ляпунова и имеют ненулевые углы (внешние и внутренние) в угловых точках.

Представим $w(\zeta)$ в виде

$$w(\zeta)=\frac{\varepsilon Q}{2\pi i}\sum_{k=1}^{m}\Gamma_k \ln(\zeta-\zeta_k)+w_0(\zeta),$$

где $w_0(\zeta)$ — однозначная функция. Так как $\psi=0$ на L_ζ^-, $\psi=Q$ на L_ζ^+, $\psi=\psi_k=\text{const}$ на L_ζ^k, то для $w_0(\zeta)$ имеем так называемую видоизмененную задачу Дирихле [1]. Ее решение строится и исследуется методом интегральных уравнений с учетом малости ε (аналогично тому, как ниже строится функция $\Omega(\zeta)$). В дальнейшем через a_1, a_2, ... будем обозначать положительные константы, зависящие лишь от $\max|\ln r_k|$, $\Gamma=\max|\Gamma_k|$, $\min(1-|\zeta_k|)$, $\min|\zeta_k-\zeta_j|$ $(k\neq j)$, $\max|\Psi_k|$. При $\varepsilon<a_1$, $\Gamma<a_2$ будем иметь: $dw/d\zeta\neq 0$ в $\overline{D}_\zeta$, кроме точек B_k, $C_k\in L_\zeta^k$, причем $\operatorname{Re}[w_0(B_k)-w_0(C_k)]<0$ (B_k соответствует точке разветвления потока на L^k, а C_k — точке схода). Пусть $\zeta=e^{i\sigma}$ на L_ζ, L_ζ^k параметризуем с помощью полярного угла γ, отсчитываемого от B_k против часовой стрелки. Пусть $\gamma(C_k)=\gamma_k$, $\gamma(E_k)=\alpha_k$ (α_k — неизвестные величины). Имеем при $\varepsilon<a_1$. $\Gamma<a_2$:

$$\frac{d\varphi}{d\gamma}=\varepsilon Q\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\gamma_k}{2}I_k(\gamma)\ \text{ на }\ L_\zeta^k,\ a_3<I_k<a_4, \tag{1}$$

$$\frac{d\varphi}{d\sigma}=-\frac{Q}{\pi\sin\sigma}+\varepsilon I(\sigma)\ \text{ на }\ L_\zeta,\ |I|<a_5. \tag{2}$$

Введем функцию $\Omega(\zeta)=\theta+i\tau=i\ln(v_0^{-1}dw(dz'))$. Очевидно, $\tau=\ln(v/v_0)$; на L_ζ^- $\theta=0$, на L_ζ^+ $\theta=\theta_0(\sigma)$ — угол между осью x' и касательной к L^+. Пусть $\Omega=\theta_0+i\tau_0$ на L_ζ^+, $\Omega=\theta_k(\gamma)+i\tau_k(\gamma)$ на L_ζ^k. Введем на L_ζ^k новый параметр $t_k\in[0,2\pi]$:

$$t_k=\gamma-\alpha_k\,(\alpha_k\leqslant\gamma\leqslant 2\pi),\ \ t_k=\gamma-\alpha_k+2\pi\,(0<\gamma<\alpha_k). \tag{3}$$

Пусть известны функции $s_k[t_k(\gamma)]$ на L_ζ^k. Тогда найдем $\Psi_k(\gamma)=\Psi_k[s_k(t_k(\gamma))]$ и установим связь между $\theta_k(\gamma)$, $\Psi_k(\gamma)$:

$$\theta_k(\gamma)=\Psi_k(\gamma)-2\pi N_k-\pi\delta_k(\gamma,\alpha_k), \tag{4}$$

где N_k — неизвестные целые числа, а δ_k определяется следующим образом. Если $0<\gamma_k<\alpha_k$, то

$$\delta_k=1\,(0\leqslant\gamma\leqslant\gamma_k),\ \ \delta_k=2\,(\gamma_k<\gamma\leqslant\alpha_k),\ \ \delta_k=0\,(\alpha_k\leqslant\gamma<2\pi).$$

Если $\alpha_k\leqslant\gamma_k<2\pi$, то

$$\delta_k=1\,(0\leqslant\gamma\leqslant\alpha_k),\ \ \delta_k=-1\,(\alpha_k\leqslant\gamma<\gamma_k),\ \ \delta_k=0\,(\gamma_k\leqslant\gamma<2\pi).$$

Предположим известными $\tau_0(\sigma)$. $\theta_k(\gamma)$ $(k=\overline{1,m})$. Тогда для $\Omega(\zeta)$ имеем смешанную краевую задачу в $(m+1)$-связной области D_ζ. Ищем ее решение в виде

$$\Omega(\zeta)=\frac{\sqrt{\zeta^2-1}}{\pi i}\int\limits_{L_\zeta}\frac{\mu(t)\,dt}{\sqrt{t^2-1}\,(t-\zeta)}+\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{L_\zeta^k}\frac{\mu_k(t)\,dt}{t-\zeta},\tag{5}$$

где μ, μ_k — действительные функции, $\mu=\mu^\pm$ на $L_\zeta^\pm$. Используя формулы Сохоцкого, получим после элементарных преобразований:

$$\mu^+(t)+\operatorname{Im}\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{L_\zeta^k}\frac{\mu_k(t_0)\,dt_0}{t_0-t}=\tau_0(\sigma(t)),\quad t\in L_\zeta^+;$$

$$\mu^-(t)+\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{L_\zeta^k}\frac{\mu_k(t_0)\,dt_0}{t_0-t}=0,\quad t\in L_\zeta^-;$$

$$\mu_k(t)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_k(t)\,d\gamma+\operatorname{Re}\frac{\sqrt{t^2-1}}{\pi i}\int\limits_{L_\zeta}\frac{\mu(t_0)\,dt_0}{\sqrt{t_0^2-1}\,(t_0-t)}+$$

$$+\operatorname{Re}\sum_{\substack{j\leqslant m\\ j\neq k}}\int\limits_{L_\zeta^j}\frac{\mu_j(t_0)\,dt_0}{t_0-t}=\theta_k(\gamma(t)),\quad t\in L_\zeta^k.$$

Переходя во всех интегралах к соответствующим действительным переменным ($\gamma\in[0,2\pi]$ или $\sigma\in[0,2\pi]$), придем к системе интегральных уравнений, содержащих интегральные операторы A_k, $A_k^\pm$, A_{kj} с аналитическими ядрами (также аналитическими являются ядра вводимых ниже операторов $M^\pm$, M_k, $M_k^\pm$, M_{kj}, G, G_k, R_k, R_{kj}):

$$\mu^+(\sigma)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}A_k^+\mu_k=\tau_0(\sigma),\tag{6}$$

$$\mu^-(\sigma)+\varepsilon\sum_{k=1}^{m}A_k^-\mu_k=0,\tag{7}$$

$$\mu_k(\gamma)-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\mu_k(\gamma)\,d\gamma+A_k\mu+\varepsilon\sum_{\substack{j\leqslant m\\ j\neq k}}A_{kj}\mu_j=\theta_k(\gamma).\tag{8}$$

Последнее уравнение заменим на

$$\mu_k(\gamma)+A_k\mu+\varepsilon\sum_{\substack{j\leqslant m\\ j\neq k}}A_{kj}\mu_j=\theta_k(\gamma).\tag{9}$$

Система (6), (7), (9) равносильна системе (6), (7), (8), если $\int\limits_0^{2\pi} \mu_k d\gamma = 0$; используя (9), это равенство запишем в виде

$$\int\limits_0^{2\pi} \theta_k d\gamma = \int\limits_0^{2\pi} A_k \mu d\gamma + \varepsilon \sum_{j \neq k} \int\limits_0^{2\pi} A_{kj} \mu_j d\gamma. \tag{10}$$

При $\varepsilon < a_6$ система (6), (7), (9) имеет единственное решение

$$\mu^+ (\sigma) = \tau_0 (\sigma) + \varepsilon M^+ \tau_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} M_k^+ \theta_k , \tag{11}$$

$$\mu^- (\sigma) = \varepsilon M^- \tau_0 + \varepsilon \sum_{k=1}^{m} M_k^- \theta_k ,$$

$$\mu_k (\gamma) = \theta_k (\gamma) + M_k \tau_0 + \varepsilon \sum_{\substack{j \leqslant m \\ j \neq k}} M_{kj} \theta_j .$$

Подставляя (11) в (10) и учитывая (4), придем к уравнению

$$(\alpha_k + 2\pi N_k) - 2\varepsilon\pi \left(\int\limits_0^{\alpha_k} \rho_{kj} d\gamma + N_k \int\limits_0^{2\pi} \rho_{kj} d\gamma \right) = \frac{\gamma_k}{2\pi} - \varepsilon\pi \int\limits_0^{\gamma_k} \rho_{kj} d\gamma +$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Psi_k d\gamma - \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \rho_k \tau_0 d\sigma - \frac{\varepsilon}{2\pi} \sum_{\substack{j \neq k \\ j \leqslant m}} \int\limits_0^{2\pi} \rho_{kj} \Psi_j d\gamma, \tag{12}$$

где $\rho_k (\sigma)$, $\rho_{kj} (\gamma)$ — непрерывные функции. Вместо неизвестных α_k, $N_k (k = \overline{1, m})$ введем параметры $d_k = \alpha_k + 2\pi N_k$, откуда

$$N_k = \left[\frac{d_k}{2\pi} \right], \ \alpha_k = d_k - 2\pi N_k . \tag{13}$$

При $\varepsilon < a_7$ левая часть (12) есть непрерывная возрастающая функция от d_k, имеющая непрерывную обратную $F_k (|F_k (x)| \leqslant \leqslant a_8 |x|)$. Таким образом, из (12) имеем:

$$d_k = F_k (D_k), \ |d_k| < a_9 + a_{10} \max |\tau_0| , \tag{14}$$

где D_k — правая часть (12).

Подставляя (11) в (5) и устремляя ζ к границе D_ζ, получим

$$\theta_0 (\sigma) = \sqrt{\sin \sigma} \left[S\tau_0 + \varepsilon \left(G\tau_0 + \sum_{k=1}^{m} G_k \theta_k \right) \right], \tag{15}$$

$$\tau_k (\gamma) = S_1 \theta_k + R_k \tau_0 + \varepsilon \sum_{j=1}^{m} R_{kj} \theta_j , \tag{16}$$

где

$$\sqrt{\sin\sigma}S\tau_0 = \frac{\sqrt{\sin\sigma}}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tau_0(\sigma')\,d\sigma'}{\sqrt{\sin\sigma'}\sin\frac{\sigma'-\sigma}{2}} = D\frac{d\tau_0}{d\sigma} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\tau_0(\sigma')}{d\sigma'}\ln\left|\frac{f(\sigma')+f(\sigma)}{f(\sigma')-f(\sigma)}\right|d\sigma', \tag{17}$$

$$S_1\theta_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\theta_k(\gamma')\operatorname{ctg}\frac{\gamma'-\gamma}{2}\,d\gamma',$$

$$f(\sigma) = \sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\sigma}{2}}.$$

В случае, когда L^k — гладкий профиль, $S_1\theta_k$ с учетом (4) можно преобразовать к виду

$$S_1\theta_k = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\Psi_k(\gamma')}{d\gamma'}\ln\left|\sin\frac{\gamma'-\gamma}{2}\right|d\gamma' + \ln\left|\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma-\gamma_k}{2}\right|. \tag{18}$$

Используя уравнение Бернулли и условие постоянства давления на L^+, получим на L_ζ^+:

$$\frac{d\tau_0}{d\sigma} = -\frac{\nu}{\pi}\left(\frac{1}{\sin\sigma} - \varepsilon\pi J_1(\sigma)\right)e^{-3\tau_0(\sigma)}\sin\theta_0(\sigma),\ \ \tau_0(\pi) = 0. \tag{19}$$

На L_ζ^k из (1) и соотношения $|dz'| = v^{-1}|d\varphi/d\gamma|\,d\gamma$ будем иметь:

$$s_k(t_k) = \frac{Q}{v_0\Lambda_k}\int_{\gamma_k}^{t_k+\gamma_k}P_k d\gamma,\ \ (0 \leqslant t_k \leqslant 2\pi-\gamma_k), \tag{20}$$

$$s_k(t_k) = s_k(2\pi-\gamma_k) + \frac{Q}{v_0\Lambda_k}\int_0^{t_k+\gamma_k-2\pi}P_k d\gamma\ \ (2\pi-\gamma_k t_k \leqslant 2\pi),$$

$$P_k(\gamma) = I(\gamma)\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{|\gamma-\gamma_k|}{2}e^{-\tau_k(\gamma)}.$$

Так как $s_k(2\pi) = 1$, то из (20) получаем:

$$\Lambda_k = \frac{Q}{v_0}\int_0^{2\pi}P_k d\gamma. \tag{21}$$

Соотношения (14), (19), (20) (с учетом (3), (4), (15), (16), (21)) образуют систему уравнений относительно d_k, $s_k(t_k)$, $\tau_0(\sigma)$ $(k = \overline{1, m})$.

2. Доказательство разрешимости задачи

Установим следующее вспомогательное неравенство:

$$Dp_\beta \leqslant \frac{\pi}{1-\beta^2}\varkappa^\beta \tag{22}$$

$$\left(0<\beta<1,\ \varkappa(\sigma)=[f(\sigma)]^{\operatorname{sign}\left(\frac{\pi}{2}-\sigma\right)},\ p_\beta(\sigma)=\frac{\varkappa^\beta}{\sin\sigma}\right).$$

Для этого Dp_β с помощью замены $e^u=f^2(\sigma')$, $e^v=f^2(\sigma)$ приведем к виду

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\beta|u|/2}\ln\left|\frac{e^{u/2}+e^{v/2}}{e^{u/2}-e^{v/2}}\right|du$$

и применим лемму 1 [2].

В дальнейшем будем брать $\nu<1$, $\beta<\sqrt{1-\nu}$. Пусть R — числовая ось, C_α — гёльдерово пространство на $[0, 2\pi]$, $R_0=[-2a_9, 2a_9]$, $C_{\alpha 0}$ — подмножество C_α, состоящее из функций, монотонно возрастающих от 0 до 1 при изменении аргумента от 0 до 2π. Пусть $E=R^m\times C_\alpha^m$, $E_0=R_0^m\times C_{\alpha 0}^m$. Построим на E_0 оператор B следующим образом. Пусть $x^0=(d_1^0, \ldots, d_m^0; s_1^0, \ldots, s_m^0)$, $x^0\in E_0$. Находим N_k, α_k из (13), $t_k(\gamma)$ из (3), $s_k[t_k(\gamma)]$, $\Psi_k(\gamma)$, $\theta_k(\gamma)$ из (4) $(|\theta_k|<a_{11})$.

С помощью (22) и принципа сжатых отображений устанавливаем, что при $\varepsilon<a_{12}$ уравнение (19) имеет единственное решение $\tau_0=T(\theta_1, \ldots, \theta_m)$, обладающее следующими свойствами:

$$\left|\frac{d\tau_0}{d\sigma}\right|\leqslant\varepsilon a_{13}\nu p_\beta,\ |\tau_0|\leqslant\varepsilon a_{14}\nu,\ |\theta_0(\tau_0, \theta_1, \ldots, \theta_m)|\leqslant\varepsilon a_{15}\varkappa^\beta \tag{23}$$

(θ_0 определяется из (15)); каждую последовательность вектор-функций $\{\theta_1^n, \ldots, \theta_m^n\}$, сходящуюся в пространстве суммируемых функций, оператор T преобразует в равномерно сходящуюся последовательность $\{\tau_0^n\}$.

Далее, находим $\tau_k(\gamma)$ из (16), Λ_k из (21), и, наконец, d_k^1 из (14), $s_k^1(t_k)$ из (20), причем $|d_k^1|<a_9+\varepsilon a_{16}$. Полагаем $x^1=Bx^0=(d_1^1, \ldots, d_m^1; s_1^1, \ldots, s_m^1)$. Оператор B построен.

Пусть α_0, N_0 означат соответственно общие показатель и константу Гёльдера функций $\Psi_k(s_k)$, а δ_0 — нижняя граница величин внутренних и внешних углов в точках излома L^k. Если $\varepsilon<a_{17}=\min(a_{12}, a_9/a_{16})$, $\alpha<\alpha_1(\alpha_0, N_0, \delta_0)$, то оператор B вполне непрерывен в E_0 по норме пространства E (это доказывается достаточно стандартными методами с использованием неравенства Гёльдера).

Найдем априорные оценки решений уравнения $x=Bx$ (каждое такое решение, очевидно, соответствует решению системы

(14), (19), (20), то есть решению исходной задачи). Одной из них является неравенство $|d_k| < 2a_9$ (оно вытекает из неравенств $|d_k^1| < a_9 + \varepsilon a_{16}$, $\varepsilon < a_9/a_{16}$). Далее, из (21), (16) и оценок $|\theta_k| < a_{11}$, $|\tau_0| < a_{14}a_{17}$ с помощью неравенства Иенсена ([3] стр. 212) получаем $\Lambda_k > a_{18}Q/v_0$. Возьмем $\varepsilon < a_{16} = \min(a_{17}, \pi/(2a_{16}))$. Тогда в силу (23) будем иметь $|\theta_0| < \pi/2$, то есть область $D_{z'}$ однолистна. Из (23) и справедливого на L_ζ^+ соотношения

$$\frac{dy'}{d\sigma} = -\frac{Q}{v_0}\left(\frac{1}{\pi \sin \sigma} - \varepsilon l_1\right) e^{-\tau_0} \sin \theta_0$$

получим оценку $|y'| < a_{20}Q/v_0$ в $D_{z'}$.

Приступим к оценке гёльдеровской нормы $\|s_1(t_1)\|_\alpha$ (при $k > 1$ оценки аналогичны). Пусть $z = [z' - z'(E_1)]/\Lambda_1 = x + iy$. Тогда $D_{z'}$, L, L^k перейдут соответственно в D_z, L_z, L_z^k, причем длина L_z^1 равна 1, $|y| < a_{20}/a_{18} = h$. Используя неравенство Гёльдера, можно показать, что для оценки $\|s_1(t_1)\|_\alpha$ достаточно оценить снизу $|d\zeta/dz|$ на L_z^1.

Так как контур L_z^1 простой, то внутри него можно взять некоторую окружность (ее радиус зависит от k_0 — нижней границы отношения длины хорды к длине дуги на L_z^1). Отобразим двусвязную область, ограниченную этой окружностью и парой прямых $|y| = h$, на кольцо $D_u' = \{u : a < |u| < 1\}$ с изменением ориентации функцией $u = F(z)$. Пусть $F(D_z) = D_u$, $F(L_z) = L_u$, $F(L_z^k) = L_u^k (k = 1, m)$. Далее, отобразим двусвязную область, ограниченную L_ζ^1 и L_ζ, на кольцо $D_\omega' = \{\omega : b < |\omega| < 1\}$ с изменением ориентации функцией $\omega = H(\zeta)$. Пусть $H(D_\zeta) = D_\omega$, $H(L_\zeta) = L_\omega$, $H(L_\zeta^k) = L_\omega^k (k = \overline{1, m})$. В частности, $|\omega| = b$ на L_ω, $|\omega| = 1$ на L_ω^1, $|\omega| < b_1 < 1$ на $L_\omega^k (k = \overline{2, m})$.

Пусть функция $\omega = \Phi(u)$ конформно отображает D_u на D_ω (легко видеть, что $\Phi(u)$ существует). Имеем:

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{dH^{-1}}{d\omega} \frac{d\Phi}{du} \frac{dF}{dz}.$$

Поэтому достаточно оценить снизу $|d\Phi/du|$ на L_u^1 — „внешней“ границе D_u.

Пусть функция $\omega = \Phi_0(u)$ отображает односвязную область, ограниченную L_u^1, на круг $|\omega| < 1$, причем $\Phi(0) = 0$. Сравним $|d\Phi/du|$ и $|d\Phi_0/du|$ на L_u^1. Обозначим $\rho(u) = \ln|\Phi(u)|$, $\rho_0(u) = \ln|\Phi_0(u)|$. Имеем:

$$\rho = \rho_0 = 0 \text{ на } L_u^1, \ \rho < \ln b_1 \text{ на } L_u \text{ и } L_u^k (k = \overline{2, m}).$$

Так как $|u| = |\Phi_0^{-1}(\omega)| < 1$ при $|\omega| = 1$, то по лемме Шварца $a < |\Phi_0^{-1}(\omega)| < |\omega|$ в D_ω, то есть $\rho_0 > \ln a$ на L_u и $L_u^k (k = \overline{2, m})$.

Пусть $\mu(u)=\lambda\rho_0-\rho$ $(\lambda=\ln b_1/\ln a)$. Имеем: $\mu=0$ на L_u^1, $\mu>0$ на L_u и L_u^k $(k=\overline{2,m})$. Из принципа максимума в D_u получим: $\partial\rho/\partial n>\lambda\partial\rho_0/\partial n$ на L_u^1, то есть $|d\Phi/du|>\lambda|d\Phi_0/du|$ на L_u^1.

Наконец, $|d\Phi_0/du|$ на L_u^1 оценивается снизу с помощью известной теоремы Варшавского [4]. Таким образом, получается априорная оценка $\|s_k(t_k)\|_\alpha<L$, зависящая от h, α_0, N_0, δ_0, k_0.

Рассмотрим функции $\widetilde{\Psi}_k(s_k,\lambda)$ $(k=\overline{1,m};\ 0\leqslant\lambda\leqslant 1)$, достаточно гладко зависящие от параметра λ и такие, что $\widetilde{\Psi}_k(s_k,1)=\Psi_k(s_k)$, все соответствующие контуры $\widetilde{L}_z^k(\lambda)$ обладают теми же свойствами, что и $\widetilde{L}_z^k(1)=L_z^k$, а $\widetilde{L}_z^k(0)$ — гладкий выпуклый контур. Этим функциям соответствуют уравнения $x=B(x,\lambda)$ (дополнительно в (19) заменяем ν на $\lambda\nu$). Легко показать, что полученные выше априорные оценки могут быть сделаны равномерными по λ.

В силу неотрицательности $d\widetilde{\Psi}_k/ds_k$ при $\lambda=0$, (18), (16) и полученных выше оценок $|\tau_0|<\varepsilon a_{14}\nu$, $\Lambda_k>a_{18}Q/v_0$ оператор $B(x,0)$ переводит в себя любое ограниченное множество из E_0, на границе которого $\|s_k(t_k)\|_\alpha\geqslant a_{21}$. Применяя теорему Лере-Шаудера, получаем утверждение о существовании хотя бы одного решения уравнения $x=B(x,\lambda)$ (в частности, решения исходной задачи), причем для этого решения $\|s_k(t_k)\|_\alpha<\max(L,\ a_{21})$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения,— М.: ГИФМЛ, 1962.

2. Киселев О. М. О течении тяжелой жидкости в канале с криволинейным дном. ПММ, 1976, т. 40, вып. 4.

3. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны.— М.: Мир, 1964.

4. Warschawcky S. Uber das Randverhalten der Ablisitung der Abbildungfunktion dei konformer Abbildung — Math. Zeitsehr., 1932, Bb. 35, N 3, 4.

Доложено на семинаре 9 февраля 1983 г.