В. Е. Трощиев, О классах сеток, допускающих консервативные аппроксимации двумерного оператора переноса треугольным разностным оператором,

Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, том 16, номер 3, 793–797

https://www.mathnet.ru/zvmmf6103

УДК 518:517.9:621.039

О КЛАССАХ СЕТОК, ДОПУСКАЮЩИХ КОНСЕРВАТИВНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДВУМЕРНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕНОСА ТРЕУГОЛЬНЫМ РАЗНОСТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

В. Е. ТРОЩИЕВ

(Москва)

Устанавливаются классы пространственных сеток, на которых двумерные уравнения переноса удается аппроксимировать треугольными разностными операторами. Сформулирован общий метод построения консервативных аппроксимаций на этих сетках.

Во многих прикладных задачах современной физики, связанных с переносом различного рода частиц, часто возникает следующее уравнение гиперболического типа: *)

$$LN(x,y,a,b)\equiv a\frac{\partial N}{\partial x}+b\frac{\partial N}{\partial y}+\alpha(x,y,a,b)N=Q(x,y,a,b), \tag{1}$$

или, в эквивалентной характеристической форме,

$$\frac{dN(x,y)}{d\xi}+\alpha(x,y,a,b)N(x,y)=Q(x,y,a,b), \tag{1'}$$

где x, y – декартовы координаты; a, b – параметры из интервала $-1\leqslant a$, $b\leqslant+1$; $\alpha(x, y, a, b)\geqslant0$, $Q(x, y, a, b)\geqslant0$ – заданные функции; $N(x, y)$ – искомая функция; ξ – единичный характеристический вектор с компонентами

$$\xi_x=\frac{a}{(a^2+b^2)^{1/2}},\qquad \xi_y=\frac{b}{(a^2+b^2)^{1/2}}.$$

Уравнение (1) рассматривается в выпуклой области $\mathscr{L}$ для всевозможных направлений ξ с краевыми условиями, заданными на освещенной части контура l_{ABC} (фиг. 1),

$$N(x,y)=\varphi(x,y),\qquad (x,y)\in l_{ABC}. \tag{2}$$

Положение контура l_{ABC} однозначно определяется параметрами a и b.

При численном решении задачи (1), (2) область $\mathscr{L}$ покрывается сеткой и для каждой счетной ячейки сетки интегроинтерполяционным методом [3] записывается конечно-разностный аналог уравнения (1). В результате для направления ξ получается система алгебраических уравнений

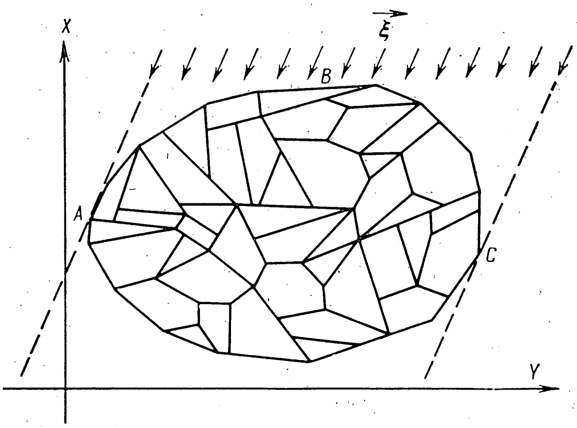
$$L_hN^{(h)}=Q^{(h)}, \tag{3}$$

где L_h – линейный разностный оператор, а $N^{(h)}$ и $Q^{(h)}$ – сеточные функции (сеточные обозначения см. в [3]). Решить систему (3) – это значит найти обратный оператор L_h^{-1}. Отсюда возникает задача: сразу для всех направлений ξ найти такой класс сеток, на которых можно строить операторы L_h, достаточно простые в смысле определения обратного оператора L_h^{-1}.

В работе предложен один достаточно широкий класс сеток и сформулирован общий принцип построения на этих сетках консервативных аппроксимаций с операторами L_h, матрица которых имеет нижний треугольный вид для любых направлений ξ.

*) Задачами, численное решение которых можно свести к решению семейства уравнений вида (1), являются, например, уравнение переноса для плоской геометрии (см. [1], стр. 26) и уравнение переноса для тела вращения (см. [1], стр. 82, и в дивергентной форме см. [2]).

1. Рассмотрим в $\mathscr{L}$ сетку, состоящую из произвольных выпуклых многоугольников (фиг. 1), которые как-то занумерованы. Обозначим через l_{1n} ту часть контура многоугольника с номером n, через которую лучи ξ данного направления входят в многоугольник, а через l_{2n} – остальную часть контура (фиг. 2). Назовем зоной влияния ломаной l_{1n} область, заключенную между крайними лучами ξ (фиг. 2) и расположенную по ту сторону ломаной, куда лучи направлены. Для того чтобы найти точное решение уравнения (1) во всем многоугольнике n, необходимо иметь на l_{1n} краевое условие типа (2).



Фиг. 1

Поставим вопрос: можно ли уравнение (1) решить последовательно по многоугольникам, иначе говоря, можно ли для всякого направления ξ многоугольники в $\mathscr{L}$ упорядочить (перенумеровать) так, что если решения на первых m многоугольниках уже найдены, то для многоугольника с номером $m+1$ краевое условие на контуре $l_{1,m+1}$ оказывается известным из решений на предыдущих m многоугольниках. Ответ дает

Теорема. *Если область $\mathscr{L}$ покрыта произвольными выпуклыми многоугольниками и сама выпукла и задано краевое условие* (2), *то для любого направления ξ найдется хотя бы одно такое упорядочение многоугольников в $\mathscr{L}$, что решение уравнения* (1) *определится последовательно по многоугольникам.*

Доказательство. Закрепим некоторое направление ξ. Предположим, что в области $\mathscr{L}$ имеется непрерывная ломаная линия, обладающая следующими свойствами (фиг. 3): а) на этой линии задано краевое условие вида (2); б) каждый луч направления ξ пересекает ее либо в единственной точке, либо сливается с отдельным отрезком ломаной; в) если эта линия не совпадает полностью с контуром l_{ABC}, то она разделяет область $\mathscr{L}$ на две части так, что по одну сторону от нее расположены те многоугольники, в которых решение уравнения (1) уже найдено, а по другую – многоугольники, где решение не найдено; г) все нерешенные многоугольники лежат в зоне влияния рассматриваемой ломаной.

Назовем эту линию K-ломаной. Первый раз K-ломаной будет контур l_{ABC} (фиг. 1).

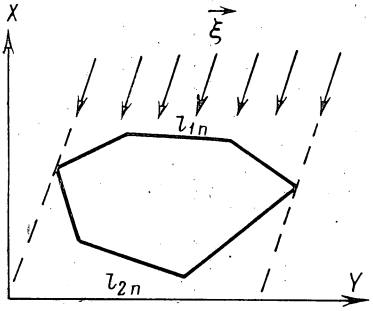
Рассмотрим множество нерешенных многоугольников, соприкасающихся с K-ломаной хотя бы одной своей стороной; многоугольники, касающиеся K-ломаной лишь своей вершиной, не рассматриваются (фиг. 3). Из свойства г) следует, что стороны, выходящие из крайних узлов K-ломаной, направлены внутрь ее зоны влияния. Отсюда следует, что среди соприкасающихся с K-ломаной многоугольников найдется хотя бы один, у которого стороны, выходящие из узлов K-ломаной, направлены внутрь его зоны влияния; так как многоугольник выпуклый, то решение уравнения (1) в нем полностью найдется и ему можно присвоить очередной номер. После этого получится новая K-ломаная, удовлетворяющая всем свойствам а)–г).

Следовательно, в таком процессе все многоугольники в $\mathscr{L}$ будут исчерпаны и упорядочены; каждому направлению ξ соответствует свое упорядочение. Теорема доказана; метод доказательства является конструктивным алгоритмом упорядочения.

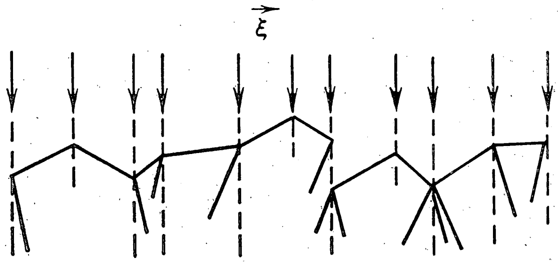
2. Пусть для направления ξ многоугольники в $\mathscr{L}$ упорядочены согласно условиям теоремы. Пусть для каждого многоугольника записано конечно-разностное уравнение, аппроксимирующее уравнение (1):

$$L_{hm}N^{(hm)}=Q^{(hm)}, \tag{4}$$

где m – номер многоугольника, L_{hm} – линейный разностный оператор, $N^{(hm)}$, $Q^{(hm)}$ – сеточные функции. Потребуем, чтобы на ломаной l_{2m} было введено в уравнении (4)



Фиг. 2



Фиг. 3

только одно неизвестное значение функции N, иначе количество неизвестных в системе (4) окажется больше числа уравнений. Тогда из теоремы вытекает

Следствие. Матрица оператора L_{hm} имеет нижний треугольный вид.

Следовательно, решение системы (4) находится явным образом последовательно по многоугольникам. (Если на контуре l_{2m} число неизвестных больше одного, то в многоугольнике m должна быть получена подсистема уравнений, порядок которой равен количеству неизвестных. И в этом случае теорема сохраняет свое значение в том смысле, что решение может быть найдено последовательно по подсистемам.)

3. Консервативную аппроксимацию уравнения (1) на многоугольнике m (фиг. 2) осуществим в несколько этапов.

Этап 1. Согласно теореме, из решений на предыдущих $m-1$ многоугольниках мы знаем на ломаной l_{1m} сеточную функцию $N_1^{(hm)}$ в нужной нам форме (например, в виде прямых линий между узлами ломаной).

Этап 2. Решая в многоугольнике m уравнение (1′) (точно или приближенно) вдоль некоторых линий направления ξ с граничным условием $N=N_1^{(hm)}$, мы найдем решение в соответствующих точках контура l_{2m}, которое затем распространим на весь контур l_{2m} (например, линейно интерполируя).*) Обозначим это решение через $\widetilde{N}_2^{(hm)}$.

Этап 3. По значениям сеточной функции на контуре $l_m=l_{1m}+l_{2m}$ строим среднее значение функции $\widetilde{N}_0^{(hm)}$ на многоугольнике.

Этап 4. Построенное на первых трех этапах решение не удовлетворяет интегральному закону, получающемуся из (1′):

$$\int\limits_{l_{1m}} N(x,y)n\cdot\xi\,dl+\int\limits_{l_{2m}} N(x,y)n\cdot\xi\,dl+\iint\limits_{s_m}\alpha N(x,y)\,dx\,dy=\iint\limits_{s_m}Q\,dx\,dy, \tag{5}$$

где s_m – площадь многоугольника, n – внешняя нормаль к контуру l_m.

---

*) Если контур l_{2m} – прямая линия, то на нем возникает хотя бы один дополнительный узел.

Учитывая большое значение консервативных схем [3], приближенное решение $\tilde{N}_2^{(hm)}$ надо подправить так, чтобы выполнилось соотношение (5). Для этого найдем такой множетель η_m, чтобы для функции

$$N_2^{(hm)} = \eta_m \tilde{N}_2^{(hm)}$$

закон (5) выполнился, т. е. η_m определим из уравнения

$$\int\limits_{l_{1m}} N_1^{(hm)} n\cdot\xi\, dl + \int\limits_{l_{2m}} \eta_m \tilde{N}^{(hm)} n\cdot\xi\, dl + \iint\limits_{s_m} \alpha\eta_m \tilde{N}_0^{(hm)}\, dx\, dy = \iint\limits_{s_m} Q\, dx\, dy. \tag{6}$$

Согласно следствию теоремы, коэффициенты η_m определяются последовательно по многоугольникам. Функция $N_2^{(hm)}$ объявляется окончательным приближенным решением на контуре l_{2m}.

4. Если в уравнении (1) коэффициенты перед производными имеют вид $af(x, y)$, $b\psi(x, y)$, то доказанная выше теорема неприменима. Однако если найдется такое преобразование переменных $U=U(x, y)$, $V=V(x, y)$, что в новых переменных характеристики уравнения (1) станут прямыми линиями, то теорема будет верна на выпуклых многоугольниках в переменных U, V. Делая обратное преобразование, мы получим сетку из соответствующих криволинейных многоугольников.

Например, для двумерного уравнения переноса в сферических координатах (уравнение см. в [1]; дивергентную форму см. в [2]) таким преобразованием является $U=\ln r$, $V=\vartheta$, где r – расстояние от точки до начала координат, а ϑ – широтный угол этой точки, отсчитываемый от оси Z. Линии, соединяющие вершины многоугольника (r_0, ϑ_0) и (r_1, ϑ_1), в этом случае определяются уравнением

$$r = r_0 \exp\left\{\frac{\vartheta-\vartheta_0}{\vartheta_1-\vartheta_0}\ln\frac{r_1}{r_0}\right\}.$$

5. При численном решении трехмерного уравнения переноса также возникает задача о построении треугольных разностных операторов, т. е. об упорядочении выпуклых многогранников, образующих трехмерное тело. Удалось построить примеры, показывающие, что такое упорядочение не всегда возможно.

Идея построения таких примеров состоит в том, что строится цепочка из ν многогранников таким образом, что если смотреть с освещаемой стороны, то первый многогранник находится частично под вторым, второй – частично под третьим и т. д. и ν-й – частично под первым; очевидно, $\nu\geqslant 3$.

6. Рассмотренные многоугольные сетки, являясь нерегулярными, позволяют покрывать экономным образом области неправильной формы, но следует иметь в виду, что расчетные формулы и организация программ на ЭВМ в этом случае более сложны, чем на регулярных прямоугольных и параллелограммных сетках (см. [4–6]).

В практических расчетах мы использовали чисто четырехугольные сетки, применение которых нам представляется наиболее целесообразным, так как с помощью четырехугольников легко покрыть область любой конфигурации и можно построить более простые аппроксимации, чем (5), (6).

Достаточно простые аппроксимации строятся также на нерегулярных треугольных сетках, которые независимо рассматривались в [7]. Однако покрытие областей с помощью треугольников оказывается менее экономичным.

В заключение автор выражает благодарность В. Ф. Юдинцеву за ценные обсуждения вопросов, рассматриваемых в статье.

Поступила в редакцию 28.06.1974
Переработанный вариант 5.09.1974

Цитированная литература

1. *Г. И. Марчук.* Методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1961.
2. *В. Е. Трощиев.* О математических свойствах S_n-методов решения кинетических уравнений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1975, 15, № 5, 1209–1221.
3. *А. А. Самарский.* Введение в теорию разностных схем. М., «Наука», 1971.
4. *Б. Карлсон.* Численное решение задач кинетической теории нейтронов. В сб. «Теория яд. реакторов». М., Атомиздат, 1963, 243–258.
5. *M. B. Saward, R. D. Wade.* Solution of the two-dimensional axially symmetric multigroup stationary neutron transport equation on the IBM 7030 (STRETCH) computer. AWRE Rept № 0-66/63, 1964.
6. *R. J. J. Stamm'ler.* New formulation and coarse-mesh acceleration for two-dimensional DS_n and P_n methods (IAEA-SM-154/66). In: «Numerical Reactor Calculations. Proc. Seminar on Numer. Reactor Calculations». Vienna, Agency, Internat. Atomic Energy, 1972.
7. *И. Д. Софронов, В. Я. Урм, А. В. Харитонов.* О решении уравнения $\partial u/\partial t+$ $+\Omega\,\mathrm{grad}\,U=0$ методом конечных разностей на нерегулярных сетках. Инф. бюлл. «Числ. методы механ. сплошной среды». Т. 5. № 2. Новосибирск, «Наука», 1974, 116–135.

УДК 517.9:532/534

О ДВИЖЕНИИ УДАРНЫХ ВОЛН В ГАЗЕ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Ф. В. ШУГАЕВ

(Москва)

В случае течения, обладающего в окрестности данной точки двумя плоскостями симметрии, получена формула для первой производной по времени от числа Маха ударной волны, распространяющейся в совершенном газе. В эту формулу входят нормальные производные плотности за и перед волной и энтропии перед волной, средняя кривизна волны в рассматриваемой точке и производные по координатам скорости перед волной. Приводится выражение для второй производной числа Маха по времени в предположении, что течение одномерно, газ перед волной покоится и $dM/dt = 0$.

При исследовании движения ударных волн обычно пользуются условиями совместности. Геометрические и кинематические условия совместности до третьего порядка включительно для разрывов первого и второго порядка впервые получены Адамаром [1]. Условия совместности для разрыва нулевого порядка приводятся в работе Кочина [2] в связи с рассмотрением задачи о распаде произвольного разрыва. Томас [3] дал запись условий совместности в форме, использующей внутреннюю геометрию поверхности разрыва, а также рассмотрел вопрос о виде условий совместности в произвольной системе координат. В работах [4, 5] условия совместности второго порядка использованы для качественного описания движения ударных волн в одномерном потоке в предположении, что газ перед волной покоится. В настоящей заметке исследуется движение ударной волны в пространственном случае. Газ перед волной может находиться в состоянии движения.

Пусть в совершенном газе ($\gamma=c_p/c_v=\mathrm{const}$) распространяется ударная волна произвольной формы. Считаем, что поверхность ударной волны гладкая. Параметры газа перед волной и за волной предполагаем непрерывными и дифференцируемыми нужное число раз. Воспользуемся кинематическими условиями совместности. Поместим в начальный момент систему координат в точку O на поверхности волны, направив ось x^3 по нормали к поверхности волны, оси x^1 и x^2 – вдоль главных на-