Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Б. В. Куксенко, Два аналитических решения для установки сложного нагружения,
Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех., 2005, номер 5, 49–54

https://www.mathnet.ru/vmumm1201

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.90
22 января 2026 г., 22:32:05

начальные условия

$$
\begin{gathered}
l_I \overset{(k)}{\mathcal{P}}{}^I|_{\Gamma_1} = \mathbf{f}^{(k)}, \quad \overset{(k)}{\mathcal{U}}|_{\Gamma_2} = \overset{(k)}{\mathbf{g}}, \quad l_I \overset{(k)}{\mathcal{M}}{}^I|_{\Gamma_1} = \mathbf{h}^{(k)}, \quad \overset{(k)}{\mathcal{W}}|_{\Gamma_2} = \overset{(k)}{\mathbf{q}}, \\
\overset{(k)}{\mathcal{U}}|_{t=t_0} = \overset{(k)}{\mathbf{u}}_0(x'), \quad \frac{\partial \overset{(k)}{\mathcal{U}}}{\partial t}|_{t=t_0} = \overset{(k)}{\mathbf{v}}_0(x'), \quad \overset{(k)}{\mathcal{W}}|_{t=t_0} = \overset{(k)}{\boldsymbol{\omega}}_0(x'), \quad \frac{\partial \overset{(k)}{\mathcal{W}}}{\partial t}|_{t=t_0} = \overset{(k)}{\boldsymbol{\varepsilon}}_0(x'),
\end{gathered}
\tag{31}
$$

$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Sigma = \Gamma \times [-h, h]$, $I = 1, 2$, $x' \in S \cup \Gamma$.

Здесь введены следующие обозначения:

$$
\mathbf{f}^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \sqrt{\mathbf{s} \cdot (\underset{\sim}{\mathbf{E}} - x^3 \underset{\sim}{\mathbf{b}})^2 \cdot \mathbf{s}}\, \hat{\mathbf{f}}\, Q_k\, dx^3, \quad \mathbf{h}^{(k)} = \frac{2k+1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \sqrt{\mathbf{s} \cdot (\underset{\sim}{\mathbf{E}} - x^3 \underset{\sim}{\mathbf{b}})^2 \cdot \mathbf{s}}\, \hat{\mathbf{h}}\, Q_k\, dx^3,
$$

$$
\overset{(k)}{\mathbf{g}} = \frac{2k+1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \hat{\mathbf{g}}\, Q_k\, dx^3, \quad \overset{(k)}{\mathbf{q}} = \frac{2k+1}{2h} \int\limits_{-h}^{h} \hat{\mathbf{q}}\, Q_k\, dx^3,
$$

где $\mathbf{s}$ — единичный вектор касательной. Следовательно, получили бесконечную систему уравнений (29) с соответствующими граничными и начальными условиями (31). Чтобы замкнуть систему, к ней следует добавить определяющие соотношения в моментах соответствующих величин, которые не вошли в эту статью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 05–01–00397-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Победря Б.Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности: Учеб. пособие. 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1995.
2. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988.
3. *Векуа И.Н.* Основы тензорного анализа и теории ковариантов. М.: Наука, 1978.
4. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
5. *Победря Б.Е.* Лекции по тензорному анализу. М.: Изд-во МГУ, 1986.
6. *Векуа И.Н.* Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. М.: Наука, 1982.
7. *Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1976.
8. *Никабадзе М.У., Улуханян А.Р.* Постановки задач для оболочечной области по трехмерным теориям. Деп. ВИНИТИ РАН 21.01.05, № 83–В2005. М., 2005.

Поступила в редакцию
18.06.2004

УДК 539.372

ДВА АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УСТАНОВКИ СЛОЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ

Б. В. Куксенко

В Новосибирске работает описанная в книге [1] экспериментальная установка сложного[1] нагружения, которая с помощью вращающегося жесткого шаблона изменяет форму области, заполненной испытуемой средой. Отрезок тонкостенной трубы, который легко изменяет форму поперечного сечения, но при деформировании сохраняет цилиндричность (параллельность своих образующих), образует обечайку. Форму эллиптического цилиндра ей придает жесткий шаблон в форме эллипса, надетый снаружи.

[1] Сложного в том смысле, что в каждой материальной частице в любой момент процесса нагружения главные направления тензора деформации в среде не остаются неизменными, а поворачиваются.

Шаблон обжимает обечайку, но может скользить по ней, когда его поворачивает внешний привод. Обечайка при этом деформируется, оставаясь на месте, поскольку удерживается от проворачивания вслед за шаблоном с помощью гибких растяжек. Среда заполняет внутренность эллиптического цилиндра обечайки. Когда поворачивается шаблон, вместе с ним поворачивается форма границы среды, а сама среда в обечайке лишь переминается, подвергаясь сложному нагружению. Для краткости установку называют "вертушкой".

В начальном состоянии различно окрашенный материал разделяется плоской границей, проходящей через ось вращения шаблона. Наличие необратимых деформаций приводит к искривлению границы, и через несколько циклов нагружения образуются характерные спиралевидные орнаменты. В отдельных случаях в окрестности центра эллипса наблюдается явление сильного перемешивания с исчезновением границы между различно окрашенными областями, изображение результата такого эксперимента помещено на обложку книги [2]. Обсуждение причин появления "серого пятна" заслуживает отдельной публикации. В предлагаемой статье приведены два аналитических решения, в некоторых приближениях воспроизводящие траектории индивидуальных частиц внутри пластического течения в вертушке при разных граничных условиях на обечайке. Решения построены кинематически в предположении, что массовые силы отсутствуют, а инерция пренебрежимо мала.

1. Обозначения, системы координат. Примем предположение о том, что испытуемый материал постоянно находится в условиях плоской деформации. Пусть у движущейся среды сдвиги не связаны с объемной деформацией. В таком случае горизонтальные (перпендикулярные оси вращения) площадки во всем объеме могут быть главными[2] площадками тензора напряжений.

Для представления траекторий частиц рассмотрим лабораторную систему отсчета, в которой введем в комплексной форме координаты $z = x + y\,i$ и скорости $v_z = v_x + v_y i$. В плоскости, связанной с шаблоном, введем вспомогательную систему координат $\zeta = \xi + \eta\, i$. Поскольку именно шаблон вынуждает в среде движение (и скорости деформации), поле относительных скоростей $v_\zeta = u + v\,i$ предполагается стационарным. Координаты ζ и z связаны законом пересчета

$$\zeta = z\,e^{i\varphi}, \quad z = \zeta\,e^{-i\varphi}, \tag{1}$$

в котором участвует угол поворота шаблона φ. Поле скоростей, как и всякое векторное поле, пересчитывается в соответствии с тем же самым законом:

$$v_\zeta = v_z\,e^{i\varphi}, \quad v_z = v_\zeta\,e^{-i\varphi}. \tag{2}$$

Поскольку эффекты, связанные с ускорениями, не учитываются, в качестве измерителя времени удобно употреблять модуль угла φ, отсчитываемый от начального положения каждой фазы монотонного нагружения. Если вращение осуществляется только в одну сторону, то угол поворота φ оказывается естественным временем процесса, по которому можно дифференцировать, вводя условные скорости. Угловая скорость вращения шаблона при этом оказывается равной единице: $d\varphi/d\varphi = 1$.

2. Скорости точек обечайки. Каноническое уравнение эллипса в системе координат (ξ, η)

$$\xi^2/a^2 + \eta^2/b^2 = 1 \tag{3}$$

с эксцентриситетом e, который вычисляется по определению как $e^2 = 1 - b^2/a^2$, является уравнением общей формы как шаблона, так и обечайки. В лабораторной системе отсчета движение шаблона и обечайки равномерно и периодично (период 2π — время одного оборота). Однако скорости точек этих двух объектов различны, поскольку шаблон оборот за оборотом вращается как жесткое тело, а обечайка по отношению к нему проскальзывает, оставаясь на месте. Скорость каждой точки шаблона с координатами (ξ, η) является вектором

$$(\eta, -\xi), \tag{4}$$

поскольку ее элементарные перемещения за элементарное время $d\varphi$ составляют $(\eta d\varphi, -\xi d\varphi)$. Обечайка нерастяжима, поэтому продольная составляющая ее скорости по всему контуру одинакова. По отношению к шаблону обечайка протягивается с такой скоростью, что за время 2π одного его оборота она ровно один раз проходит длину эллипса $L = L(a, b)$, т.е. со скоростью $L/(2\pi)$. Проекции этой скорости на оси координат мы получим, умножая ее на проекции единичного вектора касательной к эллипсу. Упомянутый вектор касательной к эллипсу в соответствии с уравнением (3) имеет вид

$$\left(\frac{\eta/b^2}{\sqrt{\xi^2/a^4 + \eta^2/b^4}}, \quad \frac{-\xi/a^2}{\sqrt{\xi^2/a^4 + \eta^2/b^4}}\right). \tag{5}$$

[2] Касательные напряжения на них равны нулю.

Для вычисления длины эллипса можно употребить ряд

$$L = -2\pi a \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right]^2 \frac{e^{2n}}{2n-1}, \tag{6}$$

который сходится хорошо, если эллипс не очень вытянут, т.е. его эксцентриситет e не близок к единице.

Возьмем в декартовых координатах (ξ, η) проекции скорости точки шаблона (4), прибавим к ним проекции относительной (по отношению к шаблону) скорости точки обечайки, равные произведению составляющих (5) на величину $L/(2\pi)$ (находимую из (6)), и получим компоненты скорости точки обечайки в лабораторной системе отсчета, выраженные через координаты системы (ξ, η), привязанной к шаблону. Поскольку на эллиптической границе значения ξ и η не свободны, а связаны соотношением (3), каждую из компонент полученной скорости можно выписать как функцию только одной координаты. Представим u как функцию только η, а v — как функцию ξ:

$$(u, v) = \left(\eta\left[1 - \frac{L\,a}{2\pi\sqrt{b^4 + a^2 e^2 \eta^2}}\right], \quad -\xi\left[1 - \frac{L\,b}{2\pi\sqrt{a^4 - a^2 e^2 \xi^2}}\right]\right). \tag{7}$$

Выражение (7) описывает распределение скоростей по точкам принадлежащей вертушке границы, которая окружает исследуемую среду. Скорости среды пока еще не обсуждались. Далее мы рассмотрим две разные задачи.

3. Первая задача: среда прилипает к обечайке. Сконструируем по граничному условию (7) некоторое поле скоростей во внутренней области. Для этого выделим мысленно отрезок среды, который расположен параллельно большой оси эллипса (при $\eta = \mathrm{const}$). В соответствии с (7) его концы, прилипающие к обечайке, имеют одинаковую проекцию скорости на ξ-направление:

$$u = \eta\left[1 - L\,a/(2\pi\sqrt{b^4 + a^2 e^2 \eta^2})\right].$$

Если бы этот отрезок был жестким, то каждая его точка имела бы точно такую же ξ-составляющую скорости, которая не зависит от координаты ξ. Рассуждая аналогично в отношении отрезка, параллельного малой оси эллипса (при $\xi = \mathrm{const}$), мы можем в каждый момент времени вообразить приклеенный концами к обечайке жесткий отрезок, продольная (т.е. η-составляющая) скорость которого не зависит от η и равна $v = -\xi\left[1 - L\,b/(2\pi\sqrt{a^4 - a^2 e^2 \xi^2})\right]$.

Будем (7) считать полем скоростей среды повсюду внутри эллипса, а не только на ее границах. Это поле кинематически совместимо с движением обечайки при выполнении условия прилипания. Поскольку дивергенция этого поля очевидно равна нулю, оно может быть полем течения несжимаемой среды. Каждое приращение его деформации в условиях плоской деформации представляет собой чистый сдвиг [3, с. 156]. Вышеупомянутые жесткие отрезки образуют два ортогональных (и даже прямолинейных) семейства линий, вдоль каждой из которых одна из скоростей деформации сдвига постоянна.

4. Вторая задача: чистый сдвиг при скольжении на границе. Второе аналитическое решение может быть реализовано любым несжимаемым однородным материалом с внутренним трением, но при условии полного проскальзывания на границе. Введем в системе координат, связанной с шаблоном, функцию тока Ψ с помощью определения

$$\Psi(\xi, \eta) = \xi^2/a^2 + \eta^2/b^2. \tag{8}$$

Уравнения $\Psi = \mathrm{const}$ задают на плоскости (ξ, η) линии тока как однопараметрическое семейство подобных эллипсов. В силу подобия семейство переходит само в себя при умножении Ψ на постоянную. Уравнение формы обечайки (3) содержится в (8) при $\Psi = 1$. Скорости течения, задаваемого (8), вычисляются известным образом:

$$u = \partial\Psi/\partial\eta; \quad v = -\,\partial\Psi/\partial\xi. \tag{9}$$

В соответствии с (9) на каждом эллипсе семейства $\Psi = \mathrm{const}$, и в их числе на обечайке, выполняются условия безотрывности и непротекания. Поскольку дивергенция течения (8) равна нулю, оно является течением несжимаемой среды.

Поле (8) допускает много разных разложений в сумму двух слагаемых, одно из которых $((\xi^2 + \eta^2)/2)$ описывает вращение плоскости как жесткого целого, но только два из них представляют

для нас особый интерес. Первое из разложений задает во втором слагаемом отличными от нуля только скорости, параллельные малой оси эллипса, второе разложение — только скорости, параллельные его большой оси. Каждое решение описывает скольжение по одному из двух возможных семейств линий скольжения, которые при простом нагружении материала равноправны. Но в вертушке, в условиях постоянного поворота нагрузки, напряжения на материальных площадках постоянно изменяются и равноправие линий скольжения исчезает. Максимальное сжатие материала происходит вдоль биссектрисы первого квадранта и поворачивается в сторону большой оси эллипса, поэтому площадки скольжения, параллельные малой оси, зажимаются. Максимальное растяжение, напротив, поворачивается к малой оси, и проскальзывание в направлении, параллельном большой оси, облегчается. Таким образом, предпочтение получает течение, функция тока которого имеет вид

$$\Psi(\xi,\eta) = (\xi^2+\eta^2)/2 + e^2\eta^2/(2(1-e^2)). \tag{10}$$

Форма обечайки при выборе функции Ψ в виде (10) задается уравнением $\Psi = a^2/2$.

Вычислив составляющие скорости u и v по правилу (9):

$$(u,v) = \left[\eta/(1-e^2)\,,\, -\xi\right], \tag{11}$$

обнаружим, что первое слагаемое (10) задает вращение плоскости как целого с единичной угловой скоростью в точности такое же, как и (4). Второе слагаемое описывает чистый сдвиг с постоянным градиентом скорости, который определяется эксцентриситетом эллипса: $\partial u/\partial\eta = e^2/(1-e^2)$. Реализация течения (11) возможна лишь при наличии проскальзывания на границе, поскольку касательные составляющие скоростей обечайки и деформируемого материала различны. В окрестности концов большой оси эллипса обечайка обгоняет материал, а возле концов малой оси от него отстает. Убедиться в этом можно, изучив при малых значениях η и ξ соответственно разность скорости обечайки (7) и скорости среды (11):

$$\left(-\eta\left[\frac{e^2}{1-e^2} + \frac{L\,a}{2\pi\sqrt{b^4+a^2\,e^2\,\eta^2}}\right],\quad \xi\,\frac{L\,b}{2\pi\sqrt{a^4-a^2\,e^2\,\xi^2}}\right).$$

5. Траектории индивидуальных частиц. Поля скоростей (7) и (11) наблюдаются в лабораторной системе отсчета (но их компоненты выражены через координаты, связанные с шаблоном). Вычитая из них переносное поле скоростей вращения шаблона по отношению к лаборатории (4), получим наблюдаемые по отношению к шаблону относительные скорости течения, выраженные через координаты, связанные с ним же:

$$v_\zeta = f(\zeta)\,. \tag{12}$$

По предположению такие поля стационарны.

Траекторию движения по отношению к лабораторной системе отсчета для каждой отдельной лагранжевой частицы можно получить, решая кинематическое дифференциальное уравнение. Скорость частицы в том месте, где она сейчас находится, определяется из (12) с помощью пересчета по правилам связи (1) и (2), учитывающим поворот поля скоростей вместе с шаблоном, к которому оно привязано:

$$\frac{dz}{d\varphi} = v_z(z) = v_\zeta(z)\,e^{-i\varphi} = f(z\,e^{i\varphi})\,e^{-i\varphi}. \tag{13}$$

Вторая задача допускает аналитическое решение до конца. Удалив относительное вращение из (11), получим поле скоростей в комплексном представлении

$$v_\zeta = i\,\frac{e^2}{(1-e^2)}\,\eta = i\,\frac{\epsilon}{2}\,(\zeta-\bar\zeta)\,,\quad \text{где}\quad \epsilon = \frac{e^2}{1-e^2}\,. \tag{14}$$

В преобразованиях применены соотношения $\xi = (\zeta+\bar\zeta)/2$, $\eta = (\zeta-\bar\zeta)/(2i)$, в которых $\bar\zeta$ обозначает комплексно-сопряженную с ζ величину. Отсюда следует

$$dz/d\varphi = i\,(\epsilon/2)\,\left(z - \bar z e^{-2i\varphi}\right). \tag{15}$$

При дифференцировании (15) по φ, необходимом для освобождения от знака сопряжения, в производной появится конвективная составляющая. Опуская бóльшую часть несложных выкладок, имеем $d^2z/d\varphi^2 = -\epsilon\,\bar z\,e^{-2i\varphi}$ и окончательно

$$d^2z/d\varphi^2 + 2i\,dz/d\varphi + \epsilon\,z = 0. \tag{16}$$

Введем обозначение $R = \sqrt{1+\epsilon}$, R превышает единицу на малую величину. Используя стандартную схему решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, получим траекторию точки $z = z(\varphi)$ с начальным значением $z = z_0$:

$$z = \frac{2(R+1)z_0 + \epsilon(z_0 - \bar{z}_0)}{4R}\, e^{i(R-1)\varphi} + \frac{2(R-1)z_0 - \epsilon(z_0 - \bar{z}_0)}{4R}\, e^{-i(R+1)\varphi}. \tag{17}$$

Все траектории оказались подобными между собой. Все они являются гипоциклоидами, которые рисует отмеченная точка обода маленького колесика, когда оно катится по внутренней стороне большого колеса. Если выбрать $z_0 = a > 0$, то радиус большой окружности будет равен $a(R+1)/(2R) \sim a$, а радиус малой окружности — $a(R-1)/(2R) \ll a$. Отношение радиусов $(R-1)/(R+1)$ определяется только эксцентриситетом эллипса. Траектории, как правило, незамкнуты, но они всегда представляют собой красивые звездчатые фигуры с точками возврата на концах лучей. Этим фигурам с полным основанием можно присвоить название "звезды Шемякина" в честь того, кто первым заинтересовался такими траекториями, предсказал их существование и инициировал создание вертушки.

Шаблон вместе с полем скоростей в соответствии с уравнением $z = \zeta\, e^{-i\varphi}$ обращается с единичной угловой скоростью в отрицательном направлении и задает единичную частоту. Второе слагаемое (17) имеет малую амплитуду и обращается в ту же сторону примерно с удвоенной частотой, так как $R+1 \sim 2$. Первое слагаемое той же формулы показывает, что под прикрытием малоамплитудных пульсаций, имеющих удвоенную частоту, все точки среды, приблизительно сохраняя свое удаление от центра, совершают дрейф с малой угловой скоростью, которая составляет $R-1 \sim e^2/2$ от угловой скорости шаблона, причем направлена в противоположную сторону. Причина дрейфа совершенно очевидна: вынуждение пластических деформаций штампом, каковым является шаблон, сопровождается частичным выдавливанием материала в направлении, встречном по отношению к направлению поворота выдавливающего штампа.

В задаче с прилипанием (первая задача) для полного поля скоростей (7) решение (13) получается численно. Подходов к аналитическому решению в полной постановке не видно. Однако приближенное аналитическое решение в малой окрестности центра эллипса возможно всегда, а предположение малости эксцентриситета расширяет область его применимости. Вычеркнем в (7) под знаками радикала слагаемые, которые содержат ξ^2 и η^2, возьмем три первых члена ряда в(6), употребим хорошо известные ряды и, отбросив члены порядка e^6, получим в окрестности центра эллипса линейное по координатам приближение для поля скоростей (7): $v_\zeta = -i\,3e^2\,\bar{\zeta}/4 + i\,45e^4\,(\zeta - \bar{\zeta})/128$. Эту формулу следует подставить на место (14), в связи с чем произойдут соответствующие изменения в (15). Итоговое уравнение окажется тождественным уравнению (16) с той только разницей, что в нем $\epsilon = 9e^4/64$. Поэтому формой (на этот раз приближенных) траекторий будут все те же гипоциклоиды-звезды, а угловая скорость дрейфа заметно уменьшится, составив примерно $9e^4/128$ от угловой скорости шаблона. Оттеснение области дрейфа к центру и уменьшение его угловой скорости объясняется тем, что среда прилипает изнутри к обечайке, которая не проворачивается. По этой причине пограничные частицы не дрейфуют, их траектории замкнуты. Но с приближением к центру эллипса механизм, вызывающий дрейф, преодолевает пограничное торможение среды.

6. Итоги. Два предложенных решения о течении разных по своим свойствам пластических сред свидетельствуют о наличии существенного сходства в их поведении в условиях сложного нагружения в виде постоянного поворота нагрузок. Особый интерес при этом представляет явление проворачивания центральной области течения по отношению к его внешней области (появление известных спиральных узоров в вертушке обусловлено именно им). Обнаружено, что проворачивание представляет собой выдавливание материала из-под надвигающейся на него стенки и направлено навстречу вращению шаблона. По нашему мнению, в этом проявляется диссипативность характера реакции среды на нагружение, в соответствии с которой вытесняемый шаблоном материал выдавливается именно в направлении, противоположном движению шаблона. Движение материала в вертушке и движение внутренних масс планеты Земля под воздействием приливных сил различаются существенно хотя бы потому, что явления, происходящие в недрах планеты, трехмерны. Однако существование ограниченной аналогии возможно. По отношению к шаблону материал вертушки проворачивается вместе с обечайкой, и его срединная часть вращается быстрее периферии. Планета совершает суточное вращение относительно поля сил гравитации, которое увеличивает эллипсоидальность ее формы. Планета проворачивается внутри эллипсоида приливной волны, и если она при этом проявляет неупругость, то в силу предполагаемой аналогии окрестность ядра вращается немного быстрее, чем кора. Наблюдаемое экспериментально явление имеет название восточного дрейфа; как и в вертушке, оно может быть связано с диссипативным характером

реагирования среды на внешнее воздействие, который по своей природе с геометрической размерностью системы не связан.

Выражаю благодарность Г. Л. Бровко и И. А. Кийко за внимание и доброжелательное отношение к представленной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ревуженко А.Ф.* Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск, 2000.
2. *Ревуженко А.Ф.* Механика сыпучей среды. Новосибирск: ОФСЕТ, 2003.
3. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. М.: ГИТТЛ, 1956.

Поступила в редакцию
20.06.2004

УДК 532.516.013.4

ВЕТВЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ РЕШЕНИЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СВОБОДНОГО ВИХРЯ

В. К. Ахметов, В. Я. Шкадов

Исследуется спектральная задача, к которой сводится определение малых неустойчивых возмущений осесимметричного течения в свободном вихре. Рассматриваемое течение описывается профилями скорости, полученными из автомодельного решения Бэтчелора [1]. Выборочные расчеты для первых трех-четырех мод спектра собственных значений в невязкой постановке представлены в [2, 3], с учетом вязкости — в [4]. Новая вязкая мода неустойчивости исследована в [5]. Неустойчивость первых трех мод при большой закрутке потока показана в [6].

В настоящей работе на основе подробных расчетов проведен анализ собственных решений с выделением растущих возмущений восьми типов (мод неустойчивости). Рассмотрены поведение каждой моды в отдельности и свойства полного набора мод в зависимости от свободных параметров. Обнаружено и исследовано свойство ветвления собственных решений. Вычислены координаты точек ветвления и с их помощью построены нейтральные кривые в плоскостях $\mathrm{Re} = \mathrm{const}$.

1. Постановка задачи. Пусть имеется однородное осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости с полем скоростей

$$U(r) = \exp(-r^2), \quad W(r) = qr^{-1}\left[1 - \exp(-r^2)\right], \quad V(r) = 0. \tag{1}$$

Здесь U, V, W — осевая, радиальная и азимутальная компоненты скорости в цилиндрической системе координат z, r, φ; q — параметр закрутки (величина, обратная к числу Россби). Профили (1) выводятся из автомодельного решения уравнений Навье–Стокса, полученного Бэтчелором [1], для вязкого закрученного следа в предположении локальной плоскопараллельности потока.

Рассмотрим малые возмущения течения (1) как решения линеаризованных уравнений Навье–Стокса типа бегущей волны (нормальные моды)

$$\{V_z', V_r', V_\varphi', p'\} = \{F, iS, H, P\}\exp[i(\alpha z + n\varphi - \alpha ct)], \tag{2}$$

в которых α, n — волновые числа, причем целые положительные значения n соответствуют распространению волны в направлении закрутки, а отрицательные — в противоположном направлении. Тогда для комплексных амплитудных функций $F(r)$, $S(r)$, $H(r)$, $P(r)$ получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
&r^2\gamma F + \alpha r^2 P + r^2 SU' = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rF')' - (\alpha^2 r^2 + n^2)F\right],\\
&r^2\gamma S + 2rHW - r^2 P' = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rS')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)S - 2nH\right],\\
&r^2\gamma H + r^2 S\left(W' + \frac{W}{r}\right) + rnP = \frac{1}{i\mathrm{Re}}\left[r(rH')' - (\alpha^2 r^2 + n^2 + 1)H - 2nS\right],\\
&\alpha rF + (rS)' + nH = 0, \quad \gamma = \alpha(U - c) + \frac{nW}{r}, \quad \mathrm{Re} = \frac{U_0 L}{\nu},
\end{aligned} \tag{3}$$