УДК 514.763.7

# КЛАССИФИКАЦИЯ МНОГОМЕРНЫХ ТРИ-ТКАНЕЙ ПО УСЛОВИЯМ ЗАМЫКАНИЯ

*А. М. Шелехов*

## § 1. ВВЕДЕНИЕ (ОСНОВНЫЕ ИДЕИ)

В начале тридцатых годов нашего века В. Бляшке и его ученики — Томсен, Рейдемейстер, Боль, обнаружили и исследовали замечательное соответствие между тождествами в квазигруппах и условиями замыкания на три-тканях. Этот факт оказался необычайно плодотворным, и с ним так или иначе связано большинство работ по теории три-тканей. В частности, указанное соответствие послужило основой классификации тканей, которая к настоящему времени углубилась и расширилась за счет других идей; наиболее важные из них связаны с понятием грассманизуемости ткани и замкнутости определяемой ею $g$-структуры (библиографию и обзор результатов см. в [40], [17], [36], [14], [15], [9], [6], [30]).

В работах последних лет появились новые условия замыкания и соответствующие им весьма интересные тождества, которые привели к новым классам тканей и луп. В этой работе обозреваются все известные к настоящему времени типы три-тканей, определяемые тождествами, и вводятся новые классы.

1. Три-ткани делят на абстрактные и геометрические. «Линии» *абстрактной* три-ткани суть множества точек, связанные лишь отношением инцидентности [36], [14]; *геометрическая* три-ткань $W$ образована тремя $C^s$-гладкими $r$-мерными слоениями на $2r$-мерном $C^s$-гладком многообразии, $s\geqslant 1$ [2]. В настоящей работе рассматриваются, как правило, многомерные аналитические три-ткани.

Свойства геометрических тканей определяются как их инцидентностной структурой, так и их дифференциально-геометрической структурой. Если некоторое свойство определяется только инцидентностной структурой, то, следуя традиции, мы называем его алгебраическим, в противном случае — геометрическим. Всякое алгебраическое свойство ткани, поскольку оно не затрагивает ее $C^s$-структуры, справедливо и для абстрактных три-тканей. На этот факт мы будем ссылаться неоднократно.

Первоначальная классификация три-тканей была связана с условиями замыкания $T$, $R$, $B_r$, $B_l$, $H$. Им отвечают тождества коммутативности, ассоциативности и различные варианты «ослабленной» ассоциативности — правая и левая альтернативность, моноассоциативность, выполняемые в координатных лупах три-ткани (см. табл. 1). Соответствующие фигуры замы-

*Таблица 1*

| Тождество в координатной лупе | Условие замыкания |
|---|---|
| $x \cdot y = y \cdot x$ | $T$ (Томсена) |
| $xy \cdot z = x \cdot yz$ | $R$ (Рейдемейстера) |
| $x^2 \cdot y = x \cdot xy$ (левая альтернативность) | $B_l$ (левое Боля) |
| $x \cdot y^2 = xy \cdot y$ (правая альтернативность) | $B_r$ (правое Боля) |
| $x \cdot x^2 = x^2 \cdot x$ (моноассоциативность) | $H$ (шестиугольность) |
| $z((xy) \diagdown z) = (z / y)(x \diagdown z)$ | $B_m$ (среднее Боля) |
| $xy \cdot x = x \cdot yx$ (эластичность) | $E$ |

кания приведены на рис. 1—5, где слои трех слоений, составляющие три-ткань, изображаются, соответственно, вертикальными, горизонтальными и наклонными линиями. Пусть $p$ — произвольная точка области определения некоторой три-ткани $R$, $l_p$ — ее локальная координатная $C^s$-лупа, связанная с точкой $p$ [36], [3]. Мы интерпретируем умножение ( $\cdot$ ) в лупе $l_p$ на слоях третьего семейства согласно схеме, изображенной на рис. 8. Через $e$ обозначена единица лупы $l_p$.

Оказалось, что для двумерных тканей, образованных тремя гладкими слоениями в некоторой области плоскости, все условия замыкания эквивалентны: выполнение какого-либо одного из них влечет выполнение остальных [43], [9]. Перечисленные условия замыкания различаются либо на *абстрактной* три-тка-

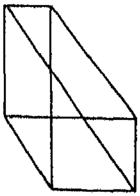

Рис. 1

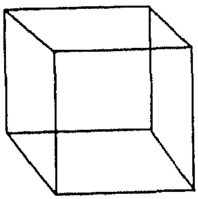

Рис. 2

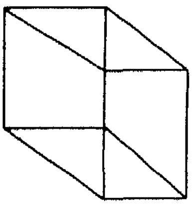

Рис. 3

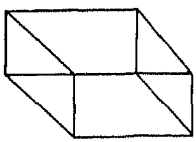

Рис. 4

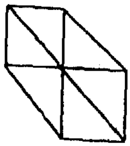

Рис. 5

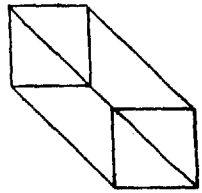

Рис. 6

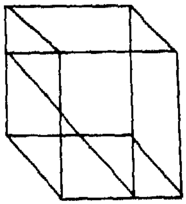

Рис. 7

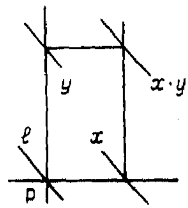


Рис. 8

ни, либо на *многомерной* геометрической три-ткани $W$, т. е. при $r \geqslant 2$.

С двумя последними классами $B_m$ и $E$, представленными в таблице 1, связана интересная проблема, по существу алгебраического характера. Из таблицы 1 видна некоторая асимметрия между тождествами и условиями замыкания. С одной стороны имеются три равноправных варианта ослабленной ассоциативности — левая и правая альтернативность и эластичность. С другой — три условия замыкания Боля — $B_l$, $B_r$ и $B_m$, также равноправные и симметричные в том смысле, что им соответствует по существу одна и та же фигура, но по разному расположенная относительно слоений ткани (сравни рис. 3, 4, 6). В двух случаях наблюдается соответствие: левая альтернативность $\Leftrightarrow B_l$, правая альтернативность $\Leftrightarrow B_r$, а в третьем его нет: эластичность $\not\Leftrightarrow B_m$. Тождество, соответствующее фигуре $B_m$, указано в [14], см. также [34]. Фигура $E$ определена и исследована в [35]. Связь между этими двумя классами многомерных три-тканей удалось прояснить совсем недавно в [32], где доказано, что ткани с эластичными лупами представляют собой специальный класс тканей $B_m$. Ясно, что это свойство является алгебраическим, хотя доказательство в [32] проведено аналитическими методами и в предположении аналитичности ткани $W$.

2. Проблема классификации тканей по условиям замыкания тесно связана с алгебраической проблемой *универсальности тождеств* [14], [15], [18], [34], [30], которая состоит в следующем. Две квазигруппы $Q(\cdot)$ и $H(\circ)$ называются *изотопными*, а $T = (\alpha, \beta, \gamma)$ — *изотопией* $Q \to H$, если $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ — биекции из $Q$

на $H$ и $\forall x, y \in Q$ выполняется равенство $\alpha(x) \circ \beta(y) = \gamma(x \cdot y)$. В частности, если $\alpha = \beta = \gamma$, то изотопия есть изоморфизм; если $\gamma = \mathrm{id}$, то получаем главную изотопию [14]. Очевидно, что изотопия является отношением эквивалентности для квазигрупп, в частности, для луп, т. е. квазигрупп с единицей.

Как уже сказано, с каждой точкой ткани $W$ связана ее координатная лупа $l_p$ (рис. 8). Известно, что все координатные лупы ткани между собой главноизотопны [14]. Поэтому ткань можно рассматривать как класс всех главноизотопных между собой луп. Изотопия не сохраняет, вообще говоря, тождеств: если в лупе $Q$ выполняется некоторое тождество $S$, то в лупе $H$, изотопной $Q$, ему соответствует некоторое тождество $T(S)$, не эквивалентное, вообще говоря, $S$. В случае, если при любой изотопии $T$ выполняется $T(S) \sim S$, то тождество $S$ называется *универсальным* [14]. Таким образом, каждому классу тканей, определяемому некоторым условием замыкания, соответствует универсальное тождество. Тканям $R$ отвечает тождество ассоциативности, тканям $B_r$ и $B_l$ — соответственно правое и левое тождества Боля (см. табл. 2 в § 2), тканям $B_m$ — тождество, приведенное в таблице 1. Тканям $T$ соответствует тождество $x(yz) = y(xz)$ [37], [34]. Универсальное тождество, соответствующее тканям $H$, весьма громоздко, оно указано, например, в [18], [30].

Предположим, что на ткани $W$ выполнено некоторое условие замыкания $F$, т. е. замыкаются все фигуры (обозначим их также буквой $F$) одного и того же вида, образованные слоями этой ткани. Тогда (см. п. 1) во всех координатных лупах $l_p$ ткани $W$ выполняется некоторое тождество, соответствующее условию замыкания $F$. Но это тождество восстанавливается по условию замыкания неоднозначно. Его вид зависит от расположения «координатных осей», т. е. вертикального и горизонтального слоев, проходящих через точку $p$ (см. рис. 8), относительно фигуры $F$. Точнее, *вид тождества зависит от того, какое подмножество фигур $F$ мы связываем с координатной лупой $l_p$* (назовем эти фигуры *координатными* для лупы $l_p$). Рассмотрим, например, фигуру $H$. Если каждой координатной лупе $l_p$ ткани $H$ сопоставить те фигуры $H$, которые расположены относительно «координатных осей», как показано на рис. 9, то в $l_p$ будет выполняться тождество моноассоциативности $x^2 \cdot x = x \cdot x^2$. Но можно с лупой $l_p$ связать множество фигур $H$ так, как указано на рис. 10. Тогда соответствующее тождество запишется в виде ${}^{-1}x = x^{-1}$, где элементы ${}^{-1}x$ и $x^{-1}$ определяются из уравнений ${}^{-1}x \cdot x = e$ и $x \cdot x^{-1} = e$.

Тождество $F$ будет *универсальным*, если из замыкания соответствующих ему координатных фигур $F$, связанных с одной лупой $l_p$, вытекает замкнутость *всех* фигур этого типа на ткани $W$.

Если координатные оси лупы $l_p$ выбраны произвольно по

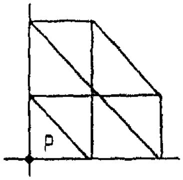

Рис. 9

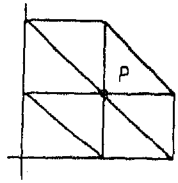

Рис. 10

отношению к фигуре $F$, или, что то же самое, с лупой $l_p$ связаны (в качестве координатных) *все* фигуры $F$ ткани $W$, то соответствующее тождество является универсальным прямо по определению. Однако, такое тождество выглядит, как правило, довольно сложно. Поэтому интересно найти наиболее простое универсальное тождество, которое отвечает не всему множеству фигур на ткани, а некоторому его подмножеству, зависящему от наименьшего возможного числа параметров.

Например, левая ткань Боля может быть охарактеризована с помощью одного из следующих тождеств: 1) $x^2 \cdot y = x \cdot xy$; 2) ${}^{-1}x \cdot (xy) = y$; 3) $(x(yx))z = x(y(xz))$ (левое тождество Боля); 4) тождество, производное от первого [34], которому отвечает произвольное расположение фигуры $B_l$ относительно лупы $l_p$. Тождества 1) и 2) записываются наиболее просто, но, как известно, универсальными не являются [14]. Тождества 3) и 4) универсальны, причем первое из них содержит всего три переменные, а второе — 4.

В общем случае проблема состоит в том, чтобы 1) выяснить, является ли заданное тождество универсальным; 2) найти наиболее простое универсальное тождество, характеризующее данное условие замыкания. Эта задача актуальна для всех новых тождеств и условий замыкания, которые рассматриваются в настоящей работе. Заметим, что частично указанная проблема решена в [34], где указан геометрический способ доказательства универсальности тождеств.

3. Классификация многомерных три-тканей по условиям замыкания, или, что то же самое — по тождествам, выполняемым в их координатных лупах, имеет три направления. Первое связано с тождествами типа $B$, т. е. уравновешенными[1] тождествами длины 4 с тремя переменными. Рассмотрение таких тождеств мотивируется двумя обстоятельствами. Во-первых, число 3 является критическим в том смысле, что, согласно [13], всякое в некотором смысле нетривиальное тождество от $k$ переменных, где $k \geqslant 4$, приводит к ассоциативности, т. е. к классу тканей $R$.

[1] В отличие от авторов работ [13], [18], мы называем тождество уравновешенным, если в обе его части переменные входят не только с одним и тем же весом, но и расположены в одинаковом порядке; иными словами, правая и левая части уравновешенного тождества отличаются лишь расстановкой скобок. Например, по нашему определению тождество $x \cdot y = y \cdot x$ не является уравновешенным.

Во-вторых, можно доказать, что если в координатных лупах $C^\omega$-гладкой три-ткани $W$ выполняется некоторое неуравновешенное тождество, то такая три-ткань может быть только параллелизуемой, т. е. тканью $T$. Следовательно, нетривиальные классы тканей могут порождаться только уравновешенными тождествами, содержащими не более трех различных переменных.

Ткани с тождествами типа $B$ рассматриваются в § 2, где доказывается, что единственными нетривиальными классами среди них являются классы тканей $B_l$ и $B_r$.

Второе направление классификации три-тканей связано с *тождествами порядка $t$ от одной переменной*, приводящими в некоторых случаях к замкнутости $g_W$-структуры, определяемой три-тканью $W$ (определение $g_W$-структуры см. в § 6). Этот вопрос подробно рассматривался в [30]; на некоторые его алгебраические аспекты мы указываем в § 3.

Третье направление связано с выделением в координатных лупах ткани подсемейств диффеоморфизмов специального вида и оценкой их «отклонения» от автоморфизма. Эта идея использована в [29], где полностью описана алгебраическая структура дифференциальной окрестности четвертого порядка многомерной три-ткани. Изложим эти результаты подробнее.

Предварительно заметим, что успех в изучении геометрии тканей на уровне дифференциальной окрестности третьего порядка достигнут благодаря двум обстоятельствам, на которые было указано еще в [15]. Во-первых, каждый из классов тканей, перечисленных в таблице 1 (кроме $E$), может быть охарактеризован особым строением тензоров кручения и кривизны ткани, $a$ и $b$ [9]. Во-вторых, эти тензоры имеют ясный алгебраический смысл: они определяют, соответственно, главную часть «отклонения» от коммутативности и ассоциативности в координатной лупе $l_p$ ткани. Точнее, если $x, y, z \in l_p$, то, согласно [4]:

$$(xy)(yx)^{-1} = -a|_p(x, y) + \ldots, \tag{1.1}$$
$$(xy\cdot z)(x\cdot yz)^{-1} = -b|_p(y, x, z) + \ldots .$$

В результате получается, что каждый из указанных классов имеет три характеристики: условие замыкания, алгебраическое тождество и тензорное равенство. Например, ткани $R$ характеризуются тем, что а) на них замыкаются фигуры $R$; б) их координатные лупы ассоциативны; в) тензор кривизны равен нулю. То же самое можно сказать и о других классах [9].

Чтобы развить аналогичную теорию в дифференциальной окрестности порядка $s$, $s>3$, нужно возникающие в этой окрестности тензоры $\overset{c}{\alpha}$ типа $\binom{1}{s}$ — ковариантные производные тензора кривизны $b$ (см. § 6) связать с алгебраическими тождествами в координатных лупах. При этом искомые тождества должны содержать не менее чем $s$ переменных. Для $s=4$ попытка такого рода была сделана в работе [12], где получены следующие два равенства:

$$[x(y\cdot zt)]^l+[(xy\cdot z)\,t]^l+[(xy\cdot t)\,z]^l-[(xy)(zt)]^l-[(x\cdot yz)\,t]^l-$$
$$-[(x\cdot yt)\,z]^l=-\underset{1}{c}^l\,|_p(y,x,z,t)+\ldots,$$
$$[(xy\cdot z)\,t]^l+[x(y\cdot zt)]^l+[y\cdot(x\cdot zt)]^l-[(xy)(zt)]^l-[x(yz\cdot t)]^l-$$
$$-[y(xz\cdot t)]^l=-\underset{2}{c}^l\,|_p(z,x,t,y)+\ldots, \tag{1.2}$$

($x$, $y$, $z$, $t\in l_p$). Формулы (1.2) дают возможность интерпретировать тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ в терминах операций касательной $W_4$-алгебры [29] лупы $l_p$, но не позволяют полностью выразить их через операцию в самой лупе $l_p$ (как выражены тензоры $a$ и $b$ в формулах (1.1)), поскольку левые части равенств (1.2) нельзя представить как координаты некоторого элемента из $l_p$.

В [29] введены новые тензоры $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$, алгебраический смысл которых выясняется с помощью соотношений, подобных соотношениям (1.1). Рассмотрим в произвольной лупе $Q$ уравнения

$$xy\cdot w=x\cdot yu;\quad w\cdot xy=ux\cdot y;\quad xw\cdot y=x\cdot uy. \tag{1.3}$$

Их решение записывается в виде:

$$w=l_{x,y}(u);\quad w=r_{x,y}(u);\quad w=m_{x,y}(u), \tag{1.4}$$

где

$$l_{x,y}=L^{-1}_{x\cdot y}\circ L_x\circ L_y,\quad r_{x,y}=R^{-1}_{x\cdot y}\circ R_y\circ R_x,\quad m_{x,y}=L^{-1}_x\circ R^{-1}_y\circ L_x\circ R_y$$
$$\text{и}\quad L_x(y)=xy,\quad R_x(y)=yx. \tag{1.5}$$

Операторы $l_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ являются тождественными на группе, но в лупе, вообще говоря, отличны от id. Порождаемые ими группы $as_l(Q)$, $as_r(Q)$ и $as_m(Q)$ называются ассоциантами лупы $Q$ [20] и характеризуют степень отклонения лупы $Q$ от группы. Заметим, что отклонение от ассоциативного закона в лупе различными способами изучалось в [50], [47], [14], [4].

Операторы (1.5) не являются, вообще говоря, автоморфизмами в $Q$. Их отклонение от автоморфизма определяется некоторой функцией $Q\times Q\to Q$. Для оператора $l_{x,y}$, например, эта функция имеет вид:

$$\mathscr{L}_{x,y}(u,v)={}^{-1}(l_{x,y}(u\cdot v))\cdot(l_{x,y}(u)\cdot l_{x,y}(v)), \tag{1.6}$$

где $x$, $y$, $u$, $v\in Q$. Если $\mathscr{L}_{x,y}(u,v)=e$, то $l_{x,y}$ — автоморфизм в $Q$.

Предположим теперь, что лупа $Q$ является аналитической. Разложив $\mathscr{L}_{x,y}(u,v)$ в ряд Тейлора, получим

$$\mathscr{L}_{x,y}(u,v)=-\mathscr{L}(x,y,u,v)+\{5\}, \tag{1.7}$$

где символ $\{5\}$ обозначает члены порядка 5 и выше. При этом, как доказано в [29], многочлен $\mathscr{L}(x,y,u,v)$ *линеен* по

$x$, $y$, $u$, $v$, т. е. является *инвариантным тензором типа* $\binom{1}{4}$ на $Q$. Аналогично определяются тензоры $\mathcal{R}(x, y, u, v)$ и $\mathcal{M}(x, y, u, v)$, связанные соответственно с операторами $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$. Из полученных трех тензоров $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{M}$ два независимых, а третий выражается через них. Тензоры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ выражаются через тензоры $a$, $b$ и упомянутые выше ковариантные производные $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ три-ткани $W$, для которой лупа $Q$ является координатной лупой $l_p$, следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(x, y, u, v) &= -\underset{2}{c}(y, x, u, v) - 2a(u, b(y, x, v));\\ \mathcal{R}(x, y, u, v) &= -\underset{1}{c}(x, v, y, u) + 2a(v, b(x, u, y)).\end{aligned} \tag{1.8}$$

Тензоры $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, как и тензоры $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$, определяются в дифференциальной окрестности четвертого порядка единицы лупы $Q$, но первые имеют то преимущество, что известен их алгебраический смысл: они определяют главную часть функций $\mathcal{L}_{x,y}(u, v)$ и $\mathcal{R}_{x,y}(u, v)$, характеризующих отклонение операторов $l_{x,y}$ и $r_{x,y}$ от автоморфизма.

Равенство (1.6) приводит к новым тождествам и фигурам замыкания. Как уже отмечено, условие $\mathcal{L}_{x,y}(u \cdot v) = e$ эквивалентно равенству

$$l_{x,y}(u \cdot v) = l_{x,y}(u) \cdot l_{x,y}(v), \tag{1.9}$$

которое означает, что $l$ — автоморфизм в $Q$. Лупы, в которых выполняется тождество (1.9), называются левыми $A$-лупами (короче, $A_l$-лупами) [42], [14], [45]. Три-ткань $W$, все координатные лупы которой будут $A_l$-лупами, также названа в [29] тканью $A_l$. На ней замыкаются фигуры, соответствующие тождеству (1.9); и они называются фигурами $A_l$. Аналогично определены ткани и фигуры $A_r$ и $A_m$, связанные с операторами $r_{x,y}$ и $m_{x,y}$.

Отождествляя переменные в равенстве (1.9), мы получим новые тождества и соответственно новые фигуры замыкания; они подробно обсуждаются в § 7.

В §§ 4—6 результаты этого пункта распространяются на дифференциальную окрестность произвольного порядка ткани $W$. С этой целью рассматривается оператор $S: Q \times \times \mathrm{Diff}\, Q \to \mathrm{Diff}\, Q$, введенный Л. В. Сабининым в [20][1], и действующий по правилу: если $S(x, \varphi) = S_{x,\varphi}$, то $S_{x,\varphi}$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi(x \cdot v) = \varphi(x) \cdot (S_{x,\varphi} \circ \varphi)(v) \quad \forall v \in Q.$$

С помощью оператора $S$ получим две последовательности функций (см. § 6): $l_{x,y}$, $S_l^1 = S_{u_1, l_{x,y}}, \ldots$; $r_{x,y}$, $S_r^1 = S_{u_1, r_{x,y}}, \ldots$, ряд Тейлора которых начинается так:

[1] В [20] этот оператор обозначен через $m$.

$$S_l^k(u) = u - \mathop{\mathscr{L}}_k(x, y, u_1 \ldots u_k, u) + \{k+4\}$$
$$S_r^k(u) = u + \mathop{\mathscr{R}}_k(x, y, u_1 \ldots u_k, u) + \{k+4\}_k, \qquad (1.10)$$

где $\mathop{\mathscr{L}}_k$ и $\mathop{\mathscr{R}}_k$ — полилинейные формы от всех своих аргументов, т. е. тензоры типа $\binom{1}{k+3}$. При этом $\mathop{\mathscr{L}}_1 \equiv \mathscr{L}$, $\mathop{\mathscr{R}}_1 \equiv \mathscr{R}$. Тензоры $\mathop{\mathscr{L}}_k$ и $\mathop{\mathscr{R}}_k$ названы основными тензорами лупы $Q$. Они связаны с введенными в [30] основными тензорами ткани $W$, соответствующей лупе $Q$, формулами (6.5), обобщающими (1.8).

Соотношения (1.6) позволяют дать тензорную характеристику тем классам тканей, в координатных лупах которых выполняются тождества $S_l^k = e$ или $S_r^k = e$, или тождества, получающиеся из этих отождествлением какого-либо числа переменных (классы типа $A_l^k$ и $A_r^k$, см. § 7).

В §§ 7, 8 устанавливается, что весьма широкие классы тканей типа $A_l^k$ и $A_r^k$ обладают замкнутой $g_W$-структурой. В связи с этим возникает более общая проблема: как наличие нетривиальных автотопий ткани $W$ связано с замкнутостью определяемой ею $g_W$-структуры? Этот вопрос рассматривается в § 9 и приводит к понятию параметрически замкнутой $g_W$-структуры, обобщающей известное понятие замкнутой $g$-структуры, введенное в [5].

В заключение отметим, что результаты последнего параграфа получены с помощью доказанной там же теоремы о том, что всякий $C^\infty$-автоморфизм локальной аналитической лупы, отнесенной к каноническим координатам, является линейным преобразованием. Это обобщение известного факта из теории групп Ли.

## § 2. ТРИ-ТКАНИ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫЕ ТОЖДЕСТВАМИ ТИПА В

Алгебраическая классификация тождеств типа В дана в [44]. С точностью до эквивалентности их оказалось восемь типов (включая группы), см. табл. 2.

*Таблица 2*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $R$ | $xy \cdot z = x \cdot yz$ | $RC$ | $yz \cdot xx = y(zx \cdot x)$ |
| $B_l$ | $(x \cdot yx)z = x(y \cdot xz)$ | $C$ | $(yx \cdot x)z = y(x \cdot xz)$ |
| $B_r$ | $(yx \cdot z)x = y \cdot (xz \cdot x)$ | $M$ | $(yx \cdot z)x = y(x \cdot zx)$ |
| $LC$ | $xx \cdot yz = (x \cdot xy)z$ | $Ex$ | $xy \cdot xz = x(yx \cdot z)$ |

Между собой эти классы связаны следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
B_l & & & \\
& M \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
B_r & & & \\
& & Ex \arrow[uul, Rightarrow] \arrow[ddl, Rightarrow] & R \arrow[l, Rightarrow] \\
LC & & & \\
& C \arrow[ul, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] & & \\
RC & & &
\end{tikzcd} \qquad (2.1)$$

Здесь $M$ — класс луп Муфанг [14], $B_l$ и $B_r$—классы левых и правых луп Боля, $Ex$ — так называемые экстра-лупы [44]; запись $B_l \Leftarrow M$ означает, что класс $M$-луп входит в класс $B_l$-луп.

Три-ткани $B_l$, $B_r$ и $M$ исследованы достаточно подробно [6], [7], что же касается нижней ветви в (2.1), то универсальные свойства $LC$-, $RC$- и $C$-луп не исследовались. Сейчас мы восполним этот пробел.

Рассмотрим три-ткань $W$, в каждой координатной лупе $l_p$ которой выполняется $LC$-тождество

$$x^2 \cdot yz = (x \cdot xy) z. \qquad (2.2)$$

При $y=e$ из (2.2) получаем тождество левой альтернативности $x^2 \cdot y = x \cdot xy$, характеризующее ткани $B_l$. Отсюда вытекает, что $LC$-тождество универсально в классе левых луп Боля, а класс тканей типа $LC$ лежит в классе левых тканей Боля. Аналогичный вывод получаем и для $RC$-тканей.

В силу левой альтернативности тождество (2.2) примет вид:

$$x^2 (yz) = (x^2 \cdot y) z. \qquad (2.3)$$

Если в нем положить $x^2=u$, то получим тождество ассоциативности. Следовательно, левое ядро [14] $N_l$ $LC$-лупы состоит из элементов вида $x^2$. Если рассматриваемая лупа обладает тем свойством, что в ней уравнение $x^2=u$ разрешимо относительно $x$ при любом $u$ из $Q$, то ядро $N_l$ совпадает со всей лупой, т. е. последняя является группой. В частности, для $C^s$-гладкой лупы при $s \geqslant 1$ уравнение $x^2=u$ в подходящих локальных координатах $x^i$ (см. § 3) примет вид: $u^i = 2x^i + o(x)$ и разрешается относительно $x=(x^i)$ в локальном смысле однозначно. Поэтому справедлива

Теорема 2.1. Всякая $LC$-лупа, в которой при любом $u$ разрешимо уравнение $x^2=u$, является группой. В частности, всякая $C^s$-гладкая локальная $LC$-лупа при $s \geqslant 1$ будем локальной группой Ли.

Отсюда непосредственно вытекает

Следствие 2.2. Гладкая $LC$-ткань является тканью $R$.

Аналогичное утверждение справедливо для $RC$-тканей и $RC$-луп.

Из приведенных рассуждений и схемы (2.1) вытекает, что классы гладких $C$-тканей и $Ex$-тканей также совпадают с классом тканей $R$. Таким образом, класс тканей типа $B$ совпадает с классом тканей Боля.

Заметим, что следствие 2.2 можно доказать геометрически. Мы приведем это доказательство, так как оно представляет самостоятельный интерес.

Рассмотрим $LC$-ткань $W$, слои которой суть $r$-мерные $C^s$-многообразия, заданные на $2r$-мерном $C^s$-многообразии $M$, где $s \geqslant 1$. Построим на этой ткани фигуру замыкания, определяемую тождеством (2.2). Для этого, используя рис. 8, последовательно строим элементы $x^2$, $yz$, $x^2 \cdot yz$, $xy$, $x \cdot xy$, $(x \cdot xy)z$. В результате придем к $LC$-фигуре, изображенной на рис. 11.

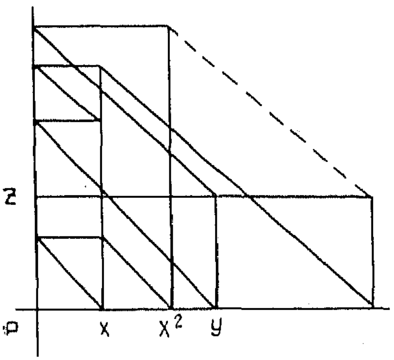


Рис. 11

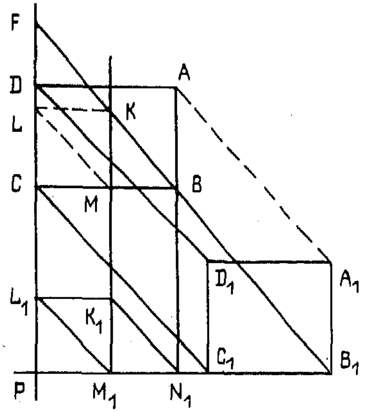


Рис. 12

Возьмем теперь на рассматриваемой ткани $W$ произвольную фигуру $R = \{ABCDA_1B_1C_1D_1\}$ (рис. 12) и докажем, что она замыкается, т. е. что точки $A$ и $A_1$ лежат на одном слое третьего слоения этой ткани. Продолжая $BB_1$ до пересечения с $CD$, получим точку $F$. Затем, пользуясь гладкостью ткани $W$, впишем в треугольник $CBF$, образованный слоями ткани $W$, треугольник $KLM$, также состоящий из ее слоев. Возможность такого вписания для двумерной ткани доказана в [17]. В многомерном случае можно дать следующее доказательство. Обозначим параметр слоя $LM$ через $x$, а слоя $BF$ — через $u$. Тогда, согласно рис. 8, в координатной лупе $l_0$, связанной с точкой $C$ (рис. 12), принадлежность точки $K$ слою $BF$ означает, что выполняется уравнение $x^2 = u$. Выше доказано, что последнее разрешимо (в локальном смысле) однозначно. Поэтому, если слой $BF$ достаточно близок к точке $C$, такая точка $K$ найдется, т. е. треугольник $KLM$ существует. Описанное построение будет однозначно, если все рассматривается в достаточно малой окрестности исходной точки $p$.

После того, как треугольник $KLM$ вписан, последовательно строим точки $M_1$, $L_1$, $K_1$, $N_1$ и рассмотрим незамкнутую фигуру $B_l=\{KLMBK_1L_1M_1N_1\}$. Так как установлено, что ткань $LC$ является болевой, эта фигура должна замыкаться, т. е. точки $B$ и $N_1$ лежат на одном вертикальном слое ткани $W$. В результате получилась $LC$-фигура, изображенная на рис. 11. Так как она должна замыкаться, то точки $A$ и $A_1$ лежат на одном слое третьего слоения. А это значит, что замкнулась рассматриваемая фигура $R=\{ABCDA_1B_1C_1D_1\}$. Поскольку последняя взята произвольно, то можно утверждать, что на ткани замыкаются все фигуры $R$, и утверждение доказано.

В заключение укажем одну задачу. Пусть в $LC$- или $RC$-тождестве две или три переменные совпадают. Задача состоит в том, чтобы указать наиболее широкий класс луп, в которых полученные тождества универсальны. Известно, например, что если отождествить все переменные, то в аналитическом случае придем к тканям $H$ [26].

## § 3. О КЛАССИФИКАЦИИ ЛУП С ТОЖДЕСТВАМИ ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Способ классификации локальных аналитических луп с тождествами от одной переменной предложен в [16]. В [30] он применен для классификации гладких многомерных три-тканей. Здесь мы снова возвращаемся к этому вопросу только для того, чтобы указать на некоторый его алгебраический аспект.

Пусть $Q(\cdot)$ — локальная аналитическая лупа с единицей $e$, $\dim Q=r$, и пусть локальные координаты в некоторой окрестности единицы выбраны так, что $e(0, 0, \ldots, 0)$. Тогда ряд Тейлора для произведения $xy$ в некоторой окрестности точки $e$ имеет вид [1]:

$$\pi(x\cdot y)=\bar{x}+\bar{y}+A(\bar{x}, \bar{y})+\sum_{s=3}^{\infty}\underset{s}{\Lambda}(\bar{x}, \bar{y}), \tag{3.1}$$

где $\pi$ — координатное отображение окрестности точки $e$, $\bar{x}=\pi(x)=(x^i)$, $i=1, \ldots, r$. Форма $A(x, y)$ согласно [1] является кососимметричной, а однородные многочлены $\underset{s}{\Lambda}$ в силу условия $e\cdot x= x\cdot e=x$ могут быть записаны следующим образом (для краткости здесь и далее пишем $x$ вместо $\bar{x}$ и $x\cdot y$ вместо $\pi(x\cdot y)$):

$$\begin{gathered}
\underset{3}{\Lambda}(x, y)=\frac{1}{2}\underset{31}{\Lambda}(x, x, y)+\frac{1}{2}\underset{32}{\Lambda}(x, y, y),\\
\underset{4}{\Lambda}(x, y)=\frac{1}{6}\underset{41}{\Lambda}(x, x, x, y)+\frac{1}{4}\underset{42}{\Lambda}(x, x, y, y)+\frac{1}{6}\underset{43}{\Lambda}(x, y, y, y),\\
\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots\quad\ldots \qquad (3.2)\\
\underset{s}{\Lambda}(x, y)=\frac{1}{(s-1)!}\underset{s1}{\Lambda}(x\ldots x, y)+\frac{1}{(s-2)!\,2!}\underset{s2}{\Lambda}(x\ldots x, y, y)+\ldots
\end{gathered}$$

$$\ldots + \frac{1}{(s-1)!} \underset{ss-1}{\Lambda}(x, y \ldots y).$$

Многочлены $\underset{kl}{\Lambda}$ являются однородными уже относительно каждой из переменных $x$ и $y$. Условимся обозначать полилинейную форму, полярную многочлену $\underset{kl}{\Lambda}$, тем же символом; например, многочлену $\underset{31}{\Lambda}(x, x, y)$ соответствует форма $\underset{31}{\Lambda}(x, y, z) \equiv \underset{31}{\Lambda}(y, x, z)$, и т. д.

Пусть $S^n(x)$ — произвольное слово длины $n$ от переменной $x$ в лупе $Q$, т. е. произведение вида $x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$, в котором каким-либо образом расставлены скобки. Расстановка скобок опреде-

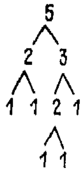

Рис. 13

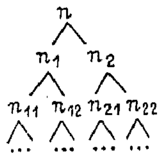

Рис. 14

ляется деревом $D(S^n)$. Например, слову $x^2(x^2 \cdot x)$ отвечает дерево, изображенное на рис. 13. Общий вид дерева изображен на рис. 14, где $n_1 + n_2 = n$, $n_{11} + n_{12} = n_1$, ... Мы будем рассматривать тождества вида

$$S_1^n(x) = S_2^n(x) \tag{3.3}$$

с некоторым специальным свойством. Разложим каждую из функций $S_1^n(x)$ и $S_2^n(x)$ в ряд Тейлора, используя формулу (3.1). Это разложение получено в [30] и имеет вид ($j = 1, 2$):

$$\begin{gathered} S_j^n(x) = nx + \frac{1}{2} \underset{31}{A_j} \underset{31}{\Lambda}(x) + \frac{1}{2} \underset{32}{A_j} \underset{32}{\Lambda}(x) + \\ + \frac{1}{6} \underset{41}{A_j} \underset{41}{\Lambda}(x) + \frac{1}{4} \underset{42}{A_j} \underset{42}{\Lambda}(x) + \frac{1}{6} \underset{43}{A_j} \underset{43}{\Lambda}(x) + \underset{4}{R}(x) + \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ + \frac{1}{(s-1)!} \underset{s1}{A_j} \underset{s1}{\Lambda}(x) + \frac{1}{(s-2)!\,2!} \underset{s2}{A_j} \underset{s2}{\Lambda}(x) + \ldots \\ \ldots + \frac{1}{(s-1)!} \underset{ss-1}{A_j} \underset{ss-1}{\Lambda}(x) + \underset{k}{R}(x) + \ldots . \end{gathered} \tag{3.4}$$

Здесь через $\underset{kl}{\Lambda}(x)$ обозначено ограничение на диагональ формы $\underset{kl}{\Lambda}$ из разложения (3.1); числа $\underset{kl}{A}$ (называемые характеристиками) вычисляются с помощью дерева $D(P_j^n)$ по формуле

$$\underset{kl}{A} = n_1^{k-l} n_2^l + n_{11}^{k-l} n_{12}^l + n_{21}^{k-l} n_{22}^l + \ldots + 1^{k-l} \cdot 1^l, \tag{3.5}$$

где суммирование ведется по всем парам ветвей с общим корнем; $\underset{k}{R}(x)$ — многочлен степени $k$, являющийся комитантом от тех многочленов разложения (3.1), порядок которых меньше $k$. Комитант $\underset{k}{R}(x)$ содержит также числовые характеристики, отличные от $\underset{kl}{A}$, которые здесь не приводятся.

Предположим, что лупа $Q$ произвольна в том смысле, что формы $\underset{kl}{\Lambda}$, определяемые разложением (3.1), связаны только указанными выше соотношениями симметрии. Потребуем, чтобы слова $S_1^n(x)$ и $S_2^n(x)$ обладали следующим свойством:

$$\operatorname{jet}_t S_1^n(x) = \operatorname{jet}_t S_2^n(x), \tag{3.6}$$

где $\operatorname{jet}_t S(x)$ обозначает частичную сумму ряда Тейлора функции $S(x)$, т. е. совокупность слагаемых ряда до порядка $t$ включительно. Пользуясь разложением (3.4), из условия (3.6) находим, что $\underset{3l}{A_1} = \underset{3l}{A_2}$, $\underset{4l}{A_1} = \underset{4l}{A_2}$ и т. д., до порядка $t$ включительно, причем, начиная с четвертого порядка, необходимо учитывать и равенство соответствующих коэффициентов, входящих в комитанты $\underset{k}{R}(x)$. Обозначим совокупность полученных таким образом соотношений через $\{A_t\}$.

Определение 3.1 ([16]). Тождество (3.3) называется тождеством порядка $t$, если числовые характеристики входящих в него слов $S_1^n(x)$ и $S_2^n(x)$ удовлетворяют соотношениям $\{A_t\}$.

Ясно, что определение 3.1 переносится и на абстрактные лупы[1], хотя в последних равенство струй не имеет смысла. В связи с этим возникает следующая задача: выяснить, является ли определение тождества порядка $t$ в абстрактной лупе корректным. Для этого нужно указать набор алгебраических свойств лупы $Q$ эквивалентный указанному определению.

В заключение отметим, что характеристики $\underset{kl}{A}$ обладают интересными теоретико-числовыми свойствами. С помощью формул (3.5) доказывается, например, что 1) характеристики заданного слова либо все четные, либо все нечетные; причем этот факт зависит от длины слова: если $n=4p$, $4p+1$, то числа $\underset{kl}{A}$ — четные, если $n=4p+2$, $4p+3$ — нечетные; 2) $\underset{41}{A}(3p) \equiv 0 \pmod 3$, $\underset{41}{A}(3p+1) \equiv 0 \pmod 3$, $\underset{41}{A}(3p+2) \equiv 0 \pmod 3$; 3) если слова $S_1$ и $S_2$ имеют одинаковую длину, то $(\underset{43}{A_1} - \underset{43}{A_2}) \equiv 0 \pmod 6$, и т. д.

---

[1] Термины «аналитическая лупа» и «абстрактная лупа» соотносятся также, как и термины «группа Ли» и «группа».

## § 4. О ДИФФЕОМОРФИЗМАХ, БЛИЗКИХ К ТОЖДЕСТВЕННОМУ, В АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЛУПЕ

1. В §§ 4—6 обобщаются результаты из [29], краткое изложение которых дано в § 1. Чтобы получить необходимые выводы, нужно понять, к чему ведет многократное повторение процесса получения функции $\mathscr{L}_{x,y}(u, v)$ из функции $l_{x,y}$ (см. §1). Для этого потребуется сформулировать несколько утверждений общего характера.

Пусть $Q$ — локальная аналитическая лупа с единицей $e(0, 0, \ldots, 0)$, $\dim Q=r$. Обозначим через $I$ группу изотропии (стабилизатор) единицы в $Q$. Мы будем рассматривать семейства $C^\infty$-диффеоморфизмов $\varphi: Q\to Q$, зависящие от элементов лупы $Q$ как от параметров, причем должны выполняться следующие два свойства: а) $\varphi\in I$; б) при любых значениях параметров $a_1, a_2, \ldots, a_\rho$ из $Q$ ряд Сейлора функции $x\to\varphi(x, a_1, \ldots, a_\rho)$, $x\in Q$, в некоторой окрестности единицы $e$ имеет вид:

$$\varphi(x, a)=x+\underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(x, a)+\underset{t+2}{\Lambda^\varphi}(x, a)+\ldots. \tag{4.1}$$

Здесь $\varphi(x, a)\equiv\varphi(x, a_1 \ldots a_\rho)$, $\underset{s}{\Lambda^\varphi}(x, a)$ — многочлен степени $s$, однородный относительно всех входящих в него аргументов $x=(x^i)$, $a_1=(a_1^i), \ldots, a_\rho=(a_\rho^i)$. Следуя замечанию, сделанному в § 3, черту над векторами мы опускаем. Кроме того, для краткости вместо $\varphi(x, a)$ будем писать $\varphi(x)$. Заметим, что так как $\varphi(e)=e$, переменная $x$ входит во все ненулевые многочлены $\underset{s}{\Lambda^\varphi}$ существенно. Семейство преобразований вида (4.1) обозначим $\Phi_t$.

Определение 4.1 ([33]). Локальный диффеоморфизм $\varphi: Q\to Q$ вида (4.1), обладающий перечисленными свойствами, назовем оператором, близким к тождественному в лупе $Q$.

С помощью разложения (4.1) легко доказываются следующие утверждения.

Лемма 4.1 ([33]). Пусть $\varphi_1, \varphi_2\in\Phi_t$, тогда

$$\mathrm{jet}_{t+1}(\varphi_1(x)\cdot\varphi_2(y))=\mathrm{jet}_{t+1}(x\cdot y)+\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi_1}}(x)+\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi_2}}(y). \tag{4.2}$$

Лемма 4.2 ([33]). Пусть $\varphi\in\Phi_t$, тогда

$$^{-1}[\varphi(x)]={}^{-1}x-\underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(x)+\{t+2\}, \tag{4.3}$$

где $^{-1}x$ — элемент из $Q$, левый обратный к $x: {}^{-1}x\cdot x=e$, а символ $\{t+2\}$, как и раньше, обозначает члены разложения, степень которых выше $t+1$.

Лемма 4.3 ([33]). Пусть $\varphi\in\Phi_t$, тогда

$$\Delta\varphi(x, y)\overset{\mathrm{def}}{=}{}^{-1}[\varphi(x\cdot y)](\varphi(x)\cdot\varphi(y))=-\underset{t+1}{\Xi^\varphi}(x, y)+\{t+2\}, \tag{4.4}$$

где

$$\underset{t+1}{\Xi^{\varphi}}(x, y)=\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(x+y)-\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(x)-\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(y). \tag{4.5}$$

Следствие 4.4. Если многочлен $\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(x)$ из разложения (4.1) имеет степень $s>1$ относительно $x$, то многочлен $\underset{t+1}{\Xi^{\varphi}}$ симметричен относительно $x$ и $y$ и имеет степень $s-1$ по каждой из этих переменных. Если $s=1$, то $\underset{t+1}{\Xi^{\varphi}}(x, y)=0$, и разложение для $\Delta\varphi(x, y)$ начинается с членов порядка $t+2$.

Лемма 4.5 ([33]). Пусть разложение для $\varphi$ имеет вид (4.1), причем многочлен $\varphi$ линеен относительно $x$. Тогда

$$\Delta\varphi(x, y)=-\underset{t+2}{\Xi^{\varphi}}(x, y)-\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(A(x, y))+A(x, \underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(y))+$$
$$+A(\underset{t+1}{\Lambda^{\varphi}}(x), y)+\{t+3\}$$

2. Пусть $\varphi: Q\to Q$ — некоторый диффеоморфизм (не обязательно вида (4.1)). Отклонение $\varphi$ от автоморфизма можно оценить двумя способами. Во-первых, элементом $\Delta\varphi(x, y)$, рассмотренным в лемме 4.3; $\Delta\varphi(x, y)=e\Leftrightarrow\varphi$ — автоморфизм. Во-вторых, это можно сделать с помощью функции $S_{x,\varphi}$, определенной равенством

$$\varphi(x\cdot y)=\varphi(x)\cdot(S_{x,\varphi}\varphi)(y), \tag{4.6}$$

о которой уже было сказано в § 1. Отсюда [20]

$$S_{x,\varphi}=L_{\varphi(x)}^{-1}\circ\varphi\circ L_x\circ\varphi^{-1}, \tag{4.7}$$

где $L_x$ — левый сдвиг на $Q$. Наряду с оператором $S:(x,\varphi)\to\to S_{x,\varphi}$, (см. § 1), который можно назвать левым, можно ввести и правый оператор $S$ равенством

$$\varphi(x\cdot y)=(S_{x,\varphi}\circ\varphi)(x)\cdot\varphi(y).$$

Мы будем рассматривать свойства левого оператора, для правого все будет аналогично.

Положим $S_{x,\varphi}=S_x(\varphi)$ и обозначим группу автоморфизмов лупы $Q$ через $\operatorname{Aut} Q$. Тогда очевидны следующие свойства функции $S_x$:

1. $S_x(\varphi)=\mathrm{id}\ \forall x\Leftrightarrow\varphi\in\operatorname{Aut} Q$.
2. $S_e(\varphi)=\mathrm{id}\Leftrightarrow\varphi\in I$.
3. $S_x(I)=I$.

С помощью соотношения (4.6) и лемм 4.1—4.3 доказываются:

Лемма 4.6 ([33]). Если $\varphi\in\Phi_t$, то и $S_{x,\varphi}\in\Phi_t$, причем

$$S_{x,\varphi}(y)=y+\underset{t+1}{\Xi^{\varphi}}(x, y)+\{t+2\}, \tag{4.8}$$

где $\underset{t+1}{\Xi^{\varphi}}(x, y)$ определяется формулой (4.5).

Лемма 4.7 ([33]). Пусть $\varphi \in \Phi_t$, т. е. разложение для $\varphi$ имеет вид (4.1). Если многочлен $\underset{t+1}{\Lambda^\varphi}$ линеен относительно $x$, то $S_{x,\varphi} \in \Phi_{t+2}$, причём разложение для $S_{x,\varphi}$ имеет вид:

$$S_{x,\varphi}(y) = y + \underset{t+2}{\Lambda^S}(x, y) + \{t+3\}, \tag{4.9}$$

где

$$\underset{t+2}{\Lambda^S}(x, y) = \underset{t+2}{\Xi^\varphi}(x, y) + \underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(A(x, y)) - A(x, \underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(y)) -$$

$$- A(\underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(x), y), \tag{4.10}$$

а $\underset{t+2}{\Xi^\varphi}(x, y)$ определяется в соответствии с формулой (4.5).

Отсюда и из леммы 4.5 вытекает

Следствие 4.8. Если $\varphi$ имеет вид (4.1), то разложение в ряд функции $S_{x,\varphi}(y)$ может быть записано в виде

$$S_{x,\varphi}(y) = y - \text{главная часть } \Delta\varphi(x, y) + \ldots,$$

где точки обозначают члены ряда более высокого порядка.

Условимся писать $\Lambda(x^c)$, если переменная $x$ входит в многочлен $\Lambda(x)$ в степени $c$. Используя леммы, можно доказать следующую теорему.

Теорема 4.9 ([33]). Пусть разложение для $\varphi$ имеет вид:

$$\varphi(x) = x + \underset{t+1}{\Lambda^\varphi}(x) + \underset{t+2}{\Lambda^\varphi}(x^2) + \ldots + \underset{t+c}{\Lambda^\varphi}(x^c) + \ldots, \tag{4.11}$$

где, как и прежде, $\varphi$ зависит еще и от параметров. Тогда функция $S_{x,\varphi} \overset{\text{def}}{=} S$, определенная равенством (4.7), имеет следующее разложение в ряд Тейлора:

$$S(y) = y + \underset{t+2}{\Lambda^S}(x, y) + \underset{t+3}{\Lambda^S}(x^2, y^2) + \ldots + \underset{t+c}{\Lambda^S}(x^{c-1}, y^{c-1}) + \ldots. \tag{4.12}$$

Доказательство мы не приводим, так как оно довольно длинное. Отметим лишь два существенных факта, которые возникают в ходе рассуждений:

А) Многочлен $\underset{t+c}{\Lambda^S}$ является комитантом многочленов $\underset{t+k}{\Lambda^\varphi}$, где $k \leqslant c$.

Б) Многочлен $\underset{t+c}{\Lambda^\varphi}$ входит в $\underset{t+c}{\Lambda^S}$ в линеаризованном виде согласно формуле

$$\underset{t+c+1}{\Lambda^S}(x, y) = \underset{t+c+1}{\Lambda^\varphi}((x+y)^{c+1}) - \underset{t+c+1}{\Lambda^\varphi}(x^{c+1}) - \underset{t+c+1}{\Lambda}(y^{c+1}) + \ldots. \tag{4.13}$$

## § 5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $l_{x,y}$ И $r_{x,y}$ В ЛОКАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЛУПЕ

Как известно, с лупой $Q$ связан ряд инвариантных групп. Мы уже отметили стабилизатор единицы, $I$. Далее, правые сдвиги на $Q$ порождают группу $R_Q$, левые — группу $L_Q$; те и другие вместе — группу $G_Q$. Рассмотрим, например, группу $L_Q$. В случае, если $Q$ — группа, отображение $L: Q \to L_Q$, $L(x) = L_x$, есть изоморфизм, так как в силу ассоциативности $L_{x\cdot y} = L_x \circ L_y$. Поскольку в произвольной лупе ассоциативности, вообще говоря, нет, то оператор $L$ изоморфизмом не является, т. е. $L_{xy} \neq L_x \circ L_y$. В силу обозначения (1.5) это условие можно записать в виде $l_{x,y} \neq \mathrm{id}$.

Операторы $l_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ порождают ассоцианты лупы $Q$ (см. § 1), причем $as_l(Q)$ будет подгруппой в $L_Q$, а $as_r(Q)$ — подгруппой в $R_Q$. Отклонение от коммутативности в $Q$ характеризуется оператором $T_x = L_x^{-1} \circ R_x$, который называется собственным внутренним отображением [45]. Операторы $l_{x,y}$, $r_{x,y}$, $T_x$ оставляют на месте единицу, т. е. принадлежат группе $I$. По теореме Альберта—Брака они порождают подгруппу $I^*$ внутренних перестановок лупы $Q$, т. е. ту часть группы $I$, которая лежит в $G_Q$. Группа $I^*$ рассматривалась, например, в [42], [41], [14].

В случае, если лупа $Q$ является аналитической лупой, справедлива следующая

Лемма 5.1 ([33]). Операторы $T_x$, $l_{x,y}$, $r_{x,y}$, $m_{x,y}$ есть операторы, близкие к тождественному в смысле определения 4.1.

Действительно, используя разложение (3.1), легко получить формулу

$$T_x(y) = y + 2A(y, x) + \{3\}.$$

Для остальных операторов соответствующие разложения найдены в [29]:

$$l_{x,y}(u) = u - B(x, y, u) + \{4\}; \quad r_{x,y}(u) = u + B(u, x, y) + \{4\},$$
$$m_{x,y}(u) = u - B(x, u, y) + \{4\}. \tag{5.1}$$

Через $B$ обозначен второй основной тензор лупы $Q$, вычисляемый с помощью многочленов из разложения (3.1) по формуле [9]:

$$B(x, y, z) = \underset{31}{\Lambda}(x, y, z) - \underset{32}{\Lambda}(x, y, z) -$$
$$- A(x, A(y, z)) + A(A(x, y), z). \tag{5.2}$$

Для дальнейшего сформулированная ниже теорема является основной.

Теорема 5.2 ([33]). Ряд Тейлора функции $l_{x,y}$ имеет вид:

$$l_{x,y}(u) = u + \sum_{c=3}^{\infty} \underset{c}{\Lambda^l}(x^{c-2}, y^{c-2}, u^{c-2}) + \ldots, \tag{5.3}$$

т. е. наибольшая степень, в которой переменные $x$, $y$, $u$ входят в многочлен $\underset{c}{\Lambda}^l$, равна $c-2$.

Доказательство проведем индукцией по $c$. Для $c=3$ утверждение вытекает из формул (5.1). Рассмотрим равенство

$$xy\cdot v=x\cdot yu, \tag{5.4}$$

которое определяет элемент $v=l_{x,y}(u)$. Разложим обе части равенства (5.4) в ряд, используя разложение (3.1):

$$\begin{aligned}\pi(xy\cdot v)&=x+y+v+\sum_{c=2}^{\infty}\underset{c}{\widetilde{\Lambda}}_1(x,\ y,\ v)\overset{\text{def}}{=}\pi_1(x,\ y,\ v);\\ \pi(x\cdot yu)&=x+y+u+\sum_{c=2}^{\infty}\underset{c}{\widetilde{\Lambda}}_2(x,\ y,\ u)\overset{\text{def}}{=}\pi_2(x,\ y,\ u).\end{aligned} \tag{5.5}$$

Многочлены $\underset{c}{\widetilde{\Lambda}}_1$ и $\underset{c}{\widetilde{\Lambda}}_2$ являются комитантами многочленов $\underset{s}{\Lambda}$ из разложения (3.1), и поэтому обладают тем же свойством, что и последние: каждое из переменных входит в них в степени не выше $c-1$ (назовем это свойством А).

Пусть многочлены $\underset{c}{\Lambda}^l$ при $c<k$ удовлетворяют условию теоремы. Они определяются из уравнения

$$\mathrm{jet}_{k-1}\pi_1(x,\ y,\ v_{k-1})=\mathrm{jet}_{k-1}\pi_2(x,\ y,\ u), \tag{5.6}$$

где обозначено: $v_{k-1}=\mathrm{jet}_{k-1}v=u+\sum_{c=3}^{k-1}\underset{c}{\Lambda}^l$.

Вычислим теперь многочлен $\underset{k}{\Lambda}^l(x,\ y,\ v)$. Он удовлетворяет уравнению

$$\mathrm{jet}_k(\pi_1(x,\ y,\ v_k))=\mathrm{jet}_k(\pi_2(x,\ y,\ u))$$

или

$$\begin{aligned}\mathrm{jet}_{k-1}(\pi_1(x,\ y,\ v_k))&+\underset{k}{\widetilde{\Lambda}}_1(x,\ y,\ v_k)=\\ &=\mathrm{jet}_{k-1}\pi_2(x,\ y,\ u)+\underset{k}{\widetilde{\Lambda}}_2(x,\ y,\ u).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Но, согласно (5.5),

$$\mathrm{jet}_{k-1}\pi_1(x,\ y,\ v_k)=x+y+v_k+\sum_{c=2}^{k-1}\underset{c}{\widetilde{\Lambda}}_1(x,\ y,\ v_k).$$

Преобразуем это выражение, сохранив члены до порядка $k$. В силу свойства А и (5.3) имеем:

$$\begin{aligned}\mathrm{jet}_{k-1}\pi_1(x,\ y,\ v_k)&=x+y+(v_{k-1}+\underset{k}{\Lambda}^l(x,\ y,\ u))+\\ &+\underset{2}{\widetilde{\Lambda}}_1(x,\ y,\ v_{k-2}+\underset{k-1}{\Lambda}^l(x,\ y,\ u))+\end{aligned}$$

$$+\underset{3}{\widetilde{\Lambda}_1}(x,\ y,\ v_{k-3}+\underset{k-2}{\Lambda^l}(x, y, v))+\ldots+\underset{k-1}{\widetilde{\Lambda}_1}(x, y, v_1+\underset{2}{\Lambda^l}(x, y, u))=$$
$$=\mathrm{jet}_{k-1}\,\pi_1(x,\ y,\ v_{k-1})+\underset{k}{\Lambda^l}(x,\ y,\ u)+\underset{k}{R}(x,\ y,\ u),$$

причем в $\underset{k}{R}(x,\ y,\ v)$ входят многочлены $\underset{c}{\Lambda^l}$ и $\underset{c}{\widetilde{\Lambda}_1}$ при $c<k$.

Первое слагаемое в силу (5.6) заменится на $\mathrm{jet}_{k-1}\,\pi_2(x,\ y,\ u)$, поэтому равенство (5.7) примет вид:

$$\underset{k}{\Lambda^l}(x,\ y,\ u)+\underset{k}{R}(x,\ y,\ u)+\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_1}(x,\ y,\ v_k)=\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_2}(x,\ y,\ u).$$

Из вида разложения (5.3) следует, что $\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_1}(x, y, v_k)=\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_1}(x, y, u)+$ $+\{k+2\}$, так что последнее соотношение дает:

$$\underset{k}{\Lambda^l}(x,\ y,\ u)=(\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_2}(x,\ y,\ u)-\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_1}(x,\ y,\ u))-\underset{k}{R}(x,\ y,\ u). \quad (5.8)$$

С помощью этой формулы найдем наибольшую степень переменных, входящих в многочлен $\underset{k}{\Lambda^l}(x,\ y,\ u)$. Рассмотрим сначала многочлен $\underset{k}{R}(x,\ y,\ u)$. Как уже было сказано, он является коммитантом многочленов $\underset{c}{\Lambda^l}$ и $\underset{c}{\widetilde{\Lambda}_1}$ при $c<k-1$. Но в $\underset{c}{\widetilde{\Lambda}_1}$ переменные входят в степени не выше $c-1$ (свойство A), а в $\underset{c}{\Lambda^l}$ — в степени не выше $c-2$ (по предположению индукции). Следовательно, и в многочлен $\underset{k}{R}$ переменные входят в степени не выше $k-2$.

Рассмотрим теперь разность $\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_2}-\underset{k}{\widetilde{\Lambda}_1}$. Несложные рассуждения показывают, что переменные $x$, $y$, $u$ в степени $k-1$ (если они есть) могут находиться только в разности

$$-\underset{k}{\Lambda}(x,\ y)-\underset{k}{\Lambda}(xy,\ u)+\underset{k}{\Lambda}(x,\ yu)+\underset{k}{\Lambda}(y,\ u), \quad (5.9)$$

содержащейся в (5.8), причем эти наибольшие степени могут быть только в «крайних» формах, входящих в $\underset{k}{\Lambda}$, т. е. в $\underset{k1}{\Lambda}$ и $\underset{kk-1}{\Lambda}$ (см. (3.2)). Последние же входят в (5.9) в виде следующей комбинации:

$$\frac{1}{(k-1)!}[\underset{k1}{\Lambda}(x,\ y,\ u)+\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y,\ u)+\underset{k1}{\Lambda}(y,\ u)+\underset{kk-1}{\Lambda}(y,\ u)-$$
$$-\underset{k1}{\Lambda}(x,\ y)-\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y)-\underset{k1}{\Lambda}(xy,\ u)-\underset{kk-1}{\Lambda}(xy,\ u)].$$

Так как этот многочлен рассматривается с точностью до членов порядка $k+1$, то в нем, пользуясь (3.1), можно заменить $yu$ на $y+u$, $xy$ — на $x+y$. В результате получаем многочлен

$$\frac{1}{(k-1)!}[\underset{k1}{\Lambda}(x\ldots x,\ y+u)+\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y+u\ldots y+u)+$$

$$+\underset{k1}{\Lambda}(y\ldots y,\ u)+\underset{kk-1}{\Lambda}(y,\ u\ldots u)-\underset{k1}{\Lambda}(x\ldots x,\ y)-$$

$$-\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y\ldots y)-\underset{k1}{\Lambda}(x+y\ldots x+y,\ u)-\underset{kk-1}{\Lambda}(x+y,\ u\ldots u)]. \quad (5.10)$$

Рассмотрим, например, форму $\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y+u\ldots y+u)$. В силу линейности ее можно представить в виде суммы $2^{k-1}$ слагаемых, из которых только 2 содержат $u$ и $y$ в степени $k-1$: $\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y\ldots y)$ и $\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ u\ldots u)$. Точно так же раскладывается и форма $\underset{k1}{\Lambda}(x+y\ldots x+y,\ u)$. В результате, как легко видеть, все формы из (5.10), содержащие $x^{k-1}$, $y^{k-1}$, $u^{k-1}$, уничтожаются. Поэтому оба слагаемые в правой части равенства (5.10) содержат переменные $x$, $y$, $u$ в степени не выше $k-2$.

Нетрудно найти в $\underset{k}{\Lambda^{l}}(x,\ y,\ u)$ формы, содержащие переменные в степени $k-2$. Мы укажем лишь те из них, которые понадобятся в дальнейшем: это многочлены, выражающиеся через формы вида $\underset{k1}{\Lambda},\ldots,\underset{kk-1}{\Lambda}$ из разложения (3.1). Один из них получается из формы

$$\frac{1}{(k-1)!}\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y+u,\ldots,\ y+u),$$

входящей в сумму (5.10). Пользуясь линейностью формы $\underset{kk-1}{\Lambda}$ и ее симметричностью по последним $k-1$ аргументам, отсюда выделим слагаемое

$$\frac{1}{(k-1)!}(k-1)\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y,\ u,\ \ldots\ u)=\frac{1}{(k-2)!}\underset{kk-1}{\Lambda}(x,\ y,\ u\ \ldots\ u). \quad (5.1)$$

Другой многочлен получим, рассмотрев формы $\underset{k2}{\Lambda}$ и $\underset{kk-2}{\Lambda}$, входящие в сумму (5.9). Согласно обозначениям (3.2), эти формы входят в виде следующей комбинации:

$$\frac{1}{(k-2)!\,2!}\Big[\underset{k2}{\Lambda}(y\ \ldots\ y,\ u,\ u)+\underset{kk-2}{\Lambda}(y,\ y,\ u\ \ldots\ u)+$$

$$+\underset{k2}{\Lambda}(x\ \ldots\ x,\ y+u,\ y+u)+\underset{kk-2}{\Lambda}(x,\ x,\ y+u\ \ldots\ y+u)-$$

$$-\underset{k2}{\Lambda}(x\ \ldots\ x,\ y,\ y)-\underset{kk-2}{\Lambda}(x,\ x,\ y\ \ldots\ y)-$$

$$-\underset{k2}{\Lambda}(x+y\ \ldots\ x+y,\ u,\ u)-\underset{kk-2}{\Lambda}(x+y,\ x+y,\ u\ \ldots\ u)\Big]. \quad (5.12)$$

Последнее слагаемое преобразуется так:

$$\underset{kk-2}{\Lambda}(x+y,\ x+y,\ u\ \ldots\ u)=\underset{kk-2}{\Lambda}(x,\ x,\ u\ \ldots\ u)+$$

$$+\underset{kk-2}{\Lambda}(y,\ y,\ u\ \ldots\ u)+2\underset{kk-2}{\Lambda}(x,\ y,\ u\ \ldots\ u).$$

После сокращения в (5.12) останется единственная форма степени $k-2$ относительно $u$:

$$-\frac{1}{(k-2)!2!}2\underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u \ldots u)=-\frac{1}{(k-2)!}\underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u \ldots u).$$

Полученный результат доказывает теорему 5.1; сформулируем его отдельно.

Лемма 5.3. Многочлен $\underset{k}{\Lambda^l}(x, y, u)$ из разложения (5.3) содержит формы степени $k-2$ относительно переменной $u$, причем те из них, которые выражаются через многочлены $\underset{k}{\Lambda}$ разложения (3.1), имеют вид:

$$\lambda(u)=\frac{1}{(k-2)!}\left(\underset{kk-1}{\Lambda}\left(x, y, \underbrace{u \ldots u}_{k-2}\right)-\underset{kk-2}{\Lambda}\left(x, y, \underbrace{u \ldots u}_{k-2}\right)\right). \tag{5.13}$$

Аналогично доказывается

Теорема 5.4. Ряд Тейлора функции $r_{x,y}(u)$ имеет вид:

$$r_{x,y}(u)=u+\sum_{k=3}^{\infty}\underset{k}{\Lambda^r}(x^{k-2}, y^{k-2}, u^{k-2}).$$

Многочлен $\underset{k}{\Lambda^r}$ содержит формы степени $k-2$ относительно переменной $u$, причем те из них, которые выражаются через многочлены $\underset{k}{\Lambda}$ разложения (3.1), имеют вид:

$$\rho(u)=\frac{1}{(k-2)!}\left(\underset{k1}{\Lambda}(u \ldots u, x, y)-\underset{k2}{\Lambda}(u \ldots u, x, y)\right). \tag{5.14}$$

Из теорем 5.1 и 5.4 вытекает важное следствие.

Следствие 5.5. Функции $l_{x,y}$ и $r_{x,y}$ удовлетворяют условию теоремы 4.9.

## § 6. ОСНОВНЫЕ ТЕНЗОРЫ ЛОКАЛЬНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЛУПЫ

Рассмотрим последовательность функций, определенных на локальной аналитической лупе $Q$ (см. (4.7)):

$$\begin{aligned} &S_l^0=l_{x,y}, \quad S_l^1=S_{u_1,S_l^0}, \quad S_l^2=S_{u_2,S_l^1}, \ldots, \\ &S_r^0=r_{x,y}, \quad S_r^1=S_{u_1,S_r^0}, \quad S_r^2=S_{u_2,S_r^1}, \ldots. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Применяя лемму 5.1 и теорему 4.9, находим, что функции $S_l^k$ и $S_r^k$ ($k=0, 1, 2 \ldots$) являются операторами, близкими к тождественному, зависящими от параметров $x$, $y$, $u_1 \ldots u_k$, причем разложение их в ряд Тейлора может быть записано в виде:

$$S_l^k(u)=u-\underset{k}{\mathscr{L}}(x, y, u_1 \ldots u_k, u)+\{k+4\}, \tag{6.2}$$

$$S_r^k(u) = u + \underset{k}{\mathscr{R}}(x, y, u_1 \ldots u_k, u) + \{k+4\}.$$

Из теоремы 4.9 получаем, что многочлены $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$ будут линейными относительно всех входящих в них переменных. Поэтому, в соответствии со следствием 4.8,

$$\underset{k}{\mathscr{L}} = d\left(\Delta S_l^{k-1}(x, y, u_1 \ldots u_{k-1})(u_k, u)\right);$$

$$\underset{k}{\mathscr{R}} = -d\left(\Delta S_r^{k-1}(x, y, u_1 \ldots u_{k-1})(u_k, u)\right).$$

При допустимых преобразованиях локальных координат в лупе (т. е. таких преобразованиях, при которых единица сохраняет нулевые координаты) $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$ меняются по тензорному закону.

Определение 6.1. Назовем тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$, $k=0, 1, \ldots,$ основными тензорами локальной аналитической лупы.

Итак, с лупой $Q$ связаны следующие основные тензоры. Первый основной тензор $A(x, y)$ [9], характеризующий отклонение от коммутативности в $Q$; второй основной тензор $B(x, y, z)$ [9], характеризующий отклонение от ассоциативности в лупе $Q$; наконец, тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$, $k \in \mathrm{N}$, алгебраический смысл которых состоит в том, что они характеризуют для функций последовательности (6.1) главную часть их отклонения от автоморфизма. (Что касается тензоров $\underset{0}{\mathscr{L}}$ и $\underset{0}{\mathscr{R}}$, то они выражаются через $B$. Действительно, из (5.1) и (6.2) имеем: $B(x, y, z) = \underset{0}{\mathscr{L}}(x, y, z) = \underset{0}{\mathscr{R}}(y, z, x)$).

Тензоры $\mathscr{L} \equiv \underset{1}{\mathscr{L}}$ и $\mathscr{R} \equiv \underset{1}{\mathscr{R}}$, как уже отмечено в § 1, были определены в [29]. Кроме них в [29] был введен еще тензор $\mathscr{M}$, связанный с оператором $m_{x,y}$. Но так как он не является независимым, а выражается через $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$, то в настоящей работе функции вида $S_{u, m_{x,y}}$, определяемые оператором $m_{x,y}$, не рассматриваются.

2. Рассмотрим аналитическую три-ткань $W$, заданную на многообразии $M$, $\dim M = 2r$. В каждой ее координатной лупе $l_p$, $p \in M$ (см. § 1), возникает последовательность тензоров $\underset{k}{\mathscr{L}}|_p$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}|_p$. Соответственно на многообразии $M$ возникают тензорные поля $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$. С другой стороны, с три-тканью $W$ связана последовательность ее основных тензоров — ковариантных производных тензора кривизны [30]. Между этими двумя наборами тензоров существует связь, о которой и пойдет речь в этом параграфе.

Зададим, следуя [2], слоения три-ткани $W$ тремя вполне интегрируемыми системами Пфаффа $\underset{1}{\omega}^i=0$, $\underset{2}{\omega}^i=0$, $\underset{1}{\omega}^i+\underset{2}{\omega}^i=0$; $i, j, k \ldots =1, \ldots, r$. Соответствующее семейство адаптированных реперов на $M$ допускает преобразования с матрицами вида $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix}$, где $A \in GL(r, \mathbb{R})$. Группа таких матриц определяет $g$-структуру на $M$, которая называется $g_W$-структурой [30]. Формы $\underset{1}{\omega}=(\underset{1}{\omega}^i)$, $\underset{2}{\omega}=(\underset{2}{\omega}^i)$ удовлетворяют на $g_W$-структуре уравнениям:

$$d\underset{1}{\omega}=\omega\wedge\underset{1}{\omega}+a\circ\underset{1}{\omega}\wedge\underset{1}{\omega}, \quad d\underset{2}{\omega}=\omega\wedge\underset{2}{\omega}-a\circ\underset{2}{\omega}\wedge\underset{2}{\omega}, \tag{6.3}$$
$$d\omega=\omega\wedge\omega+b\circ\underset{1}{\omega}\wedge\underset{2}{\omega}, \quad \nabla b=\underset{1}{c}\circ\underset{1}{\omega}+\underset{2}{c}\circ\underset{2}{\omega},$$

и некоторым другим, которые в этой работе не понадобятся. Через $\omega=(\omega_j^i)$ обозначена структурная 1-форма $g_W$-структуры, порождающая на $M$ связность Чженя [43], [2], [9], [46], [30]; $a=(a^i_{jk})$ и $b=(b^i_{jkl})$ — тензоры кручения и кривизны ткани $W$; $(a\circ\underset{1}{\omega}\wedge\underset{1}{\omega})^i=a^i_{jk}\underset{1}{\omega}^j\wedge\underset{1}{\omega}^k$, $(b\circ\underset{1}{\omega}\wedge\underset{2}{\omega})^i_j=b^i_{jkl}\underset{1}{\omega}^k\wedge\underset{2}{\omega}^l$.

Ковариантные производные $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ тензора $b$ относительно связности Чженя являются тензорами типа $\binom{1}{4}$. Если последовательно дифференцировать последнее уравнение (6.3), то возникают ковариантные производные порядка $k$, $k=2, 3, \ldots$, являющиеся тензорами типа $\binom{1}{k+3}$:

$$\nabla\underset{1}{c}=\underset{11}{c}\circ\underset{1}{\omega}+\underset{12}{c}\circ\underset{2}{\omega}, \quad \nabla\underset{2}{c}=\underset{21}{c}\circ\underset{1}{\omega}+\underset{22}{c}\circ\underset{2}{\omega},$$

и т. д. [30]. Их будем обозначать $\underset{\alpha}{c}$, где $\alpha=(\alpha_1 \ldots \alpha_k)$ — последовательность чисел 1 и 2. Тензоры $\underset{\alpha}{c}$ связаны рядом соотношений и при фиксированном $k$ среди них $k+1$ независимых, которые называются основными тензорами ткани $W$ [30]. В числе последних — тензоры $\underset{\alpha}{c}$ и $\underset{\beta}{c}$, где $\alpha=(1 \ldots 1)$, $\beta=(2 \ldots 2)$, о которых пойдет речь ниже.

Приведем определение замкнутой $g_W$-структуры, которое часто встречается в настоящей работе. Согласно [5], [30], $g_W$-структура, определяемая три-тканью $W$, является замкнутой класса $k$, если все ковариантные производные $\underset{\alpha}{c}$ порядка $s$ при $s\geqslant k-2$ выражаются через тензоры $a$, $b$ и ковариантные производные $\underset{\alpha}{c}$, порядок которых меньше $k-2$.

3. Значения основных тензоров в произвольной точке $p$ многообразия $M$, несущего ткань $W$, могут быть выражены в терминах координатной лупы $l_p$ этой ткани. Если умножение в

лупе $l_p$ представлено в виде ряда (3.1), то тензоры ткани вычисляются через его коэффициенты. Для тензоров $a$ и $b$ имеем [9]:

$$a|_p(x, y) = -A(x, y); \quad b|_p(x, y, z) = -B(y, x, z),$$

причем $B$ дается формулой (5.2). Выражения для тензоров $\underset{1}{c}$ и $\underset{2}{c}$ приведены в [27]. Соответствующая формула для производных любого порядка обсуждалась в [30], где она записана в виде[1])

$$c^l_{jkr+lj_1\ldots j_c r+j_{c+1}\ldots r+j_s} = -a^l_{jkj_1\ldots j_c r+lr+j_{c+1}\ldots r+j_s} + \\ + a^l_{kj_1\ldots j_c r+jr+lr+j_{c+1}\ldots r+j_s} + R^l_{jk\ldots r+j_s},$$

где $a^l_{jk\ldots r+j_s}$ и т. д. —коэффициенты многочлена $\underset{s+3}{\Lambda}$ из разложения (3.1), $R^l_{j\ldots r+j_s}$ —комитант от коэффициентов многочленов $\underset{c}{\Lambda}$ где $c<s+3$. Отсюда, в частности, при $c=s$ и $c=0$ получаем следующие тензоры типа $\binom{1}{s+3}$:

$$c^l_{jkr+lj_1\ldots j_s} = -a^l_{jkj_1\ldots j_s r+l} + a^l_{kj_1\ldots j_s r+jr+l} + \underset{1}{R}^l_{jk\ldots j_s},$$

$$c^l_{jkr+lr+j_1\ldots r+j_s} = -a^l_{jkr+l\ldots r+j_s} + a^l_{kr+jr+l\ldots r+j_s} + \underset{2}{R}^l_{jk\ldots j_s}.$$

В обозначениях настоящей статьи эти равенства принимают вид

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{c}(x, y, u, u_1\ldots u_s) &= -\underset{s+3,1}{\Lambda}(x, y, u_1\ldots u_s, u) + \\ &+ \underset{s+3,2}{\Lambda}(y, u_1\ldots u_s, x, u) + \underset{\alpha}{R}, \\ \underset{\beta}{c}(x, y, u, u_1\ldots u_s) &= -\underset{s+3,s+1}{\Lambda}(x, y, u, u_1\ldots u_s) + \\ &+ \underset{s+3,s+2}{\Lambda}(y, x, u, u_1\ldots u_s) + \underset{\beta}{R}, \end{aligned} \tag{6.4}$$

где $\alpha = (\overbrace{1\ldots 1}^{s})$, $\beta = (\underbrace{2\ldots 2}_{s})$. Сменив индексы и учтя симметрию форм $\underset{kl}{\Lambda}$, получим:

$$\begin{aligned} \underset{\alpha}{c}(x, y, u_1\ldots u_k, u) &= -\underset{k+3,1}{\Lambda}(u_1\ldots u_k, u, x, y) + \\ &+ \underset{k+3,2}{\Lambda}(u_1\ldots u_k, u, x, y) + \underset{\alpha}{R}, \\ \underset{\beta}{c}(x, y, u_1\ldots u_k, u) &= -\underset{k+3,k+1}{\Lambda}(y, x, u_1\ldots u_k, u) + \\ &+ \underset{k+3,k+2}{\Lambda}(y, x, u_1\ldots u_k, u) + \underset{\beta}{R}. \end{aligned}$$

[1]) Далее, где нет опасности перепутать, мы пишем $c$ вместо $c|_p$.

Теорема 6.1 ([33]). Тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$, $k\in\mathrm{N}$, определенные на три-ткани $W$, выражаются через ковариантные производные тензора кривизны этой ткани следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\underset{k}{\mathscr{L}}(x, y, u_1 \dots u_k, u) = -\underset{\beta}{c}(y, x, u_1 \dots u_k, u) + \underset{\beta}{R},\\
&\underset{k}{\mathscr{R}}(x, y, u_1 \dots u_k, u) = -\underset{\alpha}{c}(x, u_1, y, u_2 \dots u_k, u) + \underset{\alpha}{R},
\end{aligned}\tag{6.5}$$

где $\underset{\alpha}{R}$ и $\underset{\beta}{R}$ — комитанты от ковариантных производных тензора $b$, порядок которых меньше $k$.

Доказательство. Рассмотрим многочлен $\underset{k}{\Lambda}(u)$, входящий в разложение (5.3). Мы выделили в нем многочлен $\lambda(u)$ (см. (5.13)), содержащий переменную $u$ в наибольшей возможной степени —$(k-2)$. Применяя следствие Б) из теоремы 4.9, находим, что линеаризованная часть от $\lambda(u)$ (обозначим ее $\lambda(u_1, u)$) попадает в многочлен $\underset{k}{\Lambda}^{S_l^1}(u)$ из ряда Тейлора для функции $S_l^1$. Согласно (5.13) имеем:

$$\begin{aligned}
&\lambda(u_1, u) = \lambda(u+u_1) - \lambda(u) - \lambda(u_1) =\\
&= \frac{1}{(k-2)!}\Big[\underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u+u_1 \dots u+u_1) - \underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u \dots u) -\\
&- \underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u_1 \dots u_1)\Big] - \frac{1}{(k-2)!}\Big[\underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u+u_1 \dots u+u_1) -\\
&- \underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u \dots u) - \underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u_1 \dots u_1)\Big].
\end{aligned}$$

Выделим отсюда многочлен, содержащий переменную $u$ в наибольшей степени, т. е. $k-3$, и обозначим его $\tilde{\lambda}(u_1, u)$. Используя симметричность форм $\underset{kk-1}{\Lambda}$ и $\underset{kk-2}{\Lambda}$, получим:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\lambda}(u_1, u) =\\
&= \frac{1}{(k-2)!}(k-2)\Big[\underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u_1, u \dots u) - \underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u_1, u \dots u\Big].
\end{aligned}$$

Далее рассмотрим функцию $S_l^2$, следующую за $S_l^1$ в последовательности (6.1). Применяя теорему 4.9 и следствие Б) из нее, находим, что многочлен $\underset{k}{\Lambda}^{S_l^2}(u)$ содержит многочлен $\lambda(u_1, u_2, u)$, полученный линеаризацией из $\tilde{\lambda}(u_1, u)$:

$$\lambda(u_1, u_2, u) = \tilde{\lambda}(u_1, u+u_2) - \tilde{\lambda}(u_1, u) - \tilde{\lambda}(u_1, u_2).$$

Выделяя в нем формы, содержащие $u$ в степени $k-4$, получим многочлен

$$\tilde{\lambda}(u_1, u_2, u) = \frac{1}{(k-2)!}(k-2)(k-3)\times$$
$$\times\Big[\underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u_1, u_2, u \ldots u) - \underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u_1, u_2, u \ldots u)\Big].$$

Продолжая рассуждения, через $k-3$ шага придем к многочлену

$$\tilde{\lambda}(u_1, u_2 \ldots u_{k-3}, u) = \underset{kk-1}{\Lambda}(x, y, u_1 \ldots u_{k-3}, u) -$$
$$- \underset{kk-2}{\Lambda}(x, y, u_1 \ldots u_{k-3}, u),$$

который с точностью до комитанта $\underset{\alpha}{R}$ совпадает с тензором $\underset{\beta}{c}(x, y, u_1 \ldots u_{k-3}, u)$ (см. (6.4)), где $\beta = (\overbrace{2 \ldots 2}^{k-3})$. Форма $\tilde{\lambda}(u_1 \ldots u_{k-3}, u)$ входит уже в многочлен $\underset{k}{\Lambda}^{S_l^{k-3}}(u)$ из ряда Тейлора функции $S_l^{k-3}$. Но этот многочлен будет первым нетривиальным многочленом ряда, поэтому, согласно определению 6.1, $\underset{k}{\Lambda}^{S_l^{k-3}} = -\underset{k-3}{\mathscr{L}}$. Отсюда вытекает, что производная $-\underset{\alpha}{c}$ входит в тензор $\underset{k-3}{\mathscr{L}}$.

Остается доказать, что в $\underset{k-3}{\mathscr{L}}$ не входят (кроме $\underset{\alpha}{c}$) никакие другие ковариантные производные того же порядка. Действительно, поскольку мы применяли линеаризацию $k-3$ раза, то в $\underset{k-3}{\mathscr{L}}$ могли попасть только те из форм $\underset{k}{\Lambda}^l(u)$, которые имели степень не меньше $k-2$ относительно переменной $u$; остальные в результате линеаризации обратились в нуль. Но формы степени $k-2$, входящие в $\underset{k}{\Lambda}^l(u)$, делятся в свою очередь, на две части: одна есть многочлен $\lambda(u)$, содержащий коэффициенты порядка $k$ из разложения (3.1), и он привел нас к тензору $-\underset{\alpha}{c}$. Другая часть получена из членов ряда (3.1), степень которых меньше $k$, и поэтому в ней содержатся тензоры вида $\underset{\gamma}{c}$ типа $\binom{1}{s}$, где $s < k$. Применяя к последним процесс линеаризации, мы придем (после $k-3$ шагов) к производным вида $\underset{\gamma}{c}$, порядок которых меньше $k-3$. Это и доказывает теорему.

Чтобы получить точное выражение для тензоров $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$ через производные $\underset{\alpha}{c}$, нужно вычислить комитанты $\underset{\alpha}{R}$ и $\underset{\beta}{R}$, входящие в равенства (6.5). Соответствующие формулы для $\underset{1}{\mathscr{L}}$ и $\underset{1}{\mathscr{R}}$ найдены в [29] (см. (1.8)); для $\underset{2}{\mathscr{L}}$ и $\underset{2}{\mathscr{R}}$ требуются уже значительные вычисления.

С помощью тензоров $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$ можно ввести в касательном пространстве $T_e$ к лупе $l_p$ в единице $e$ операции арности $k+3$ так же, как это сделано в [4] для тензоров $a$ и $b$, образующих касательную $W$-алгебру ткани, в [29] для тензоров $\mathscr{L}\equiv\underset{1}{\mathscr{L}}$, $\mathscr{R}=\underset{1}{\mathscr{R}}$ и $\mathscr{M}$, образующих вместе с тензорами $a$ и $b$ касательную $W_4$-алгебру. Но для адекватного описания касательной $W_k$-алгебры ткани $W$ при $k>4$ двух тензоров $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$, принадлежащих дифференциальной окрестности порядка $k+3$, недостаточно — таких тензоров нужно $k+1$. Правда, $W_k$-алгебру можно определить и описать формально, с помощью тензоров $\underset{\alpha}{c}$, как это сделано в [10]. Однако тензоры $\underset{\alpha}{c}$ не имеют столь хорошей алгебраической интерпретации, какую имеют тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$. В связи с этим обстоятельством возникает проблема нахождения других $k-1$ тензоров, принадлежащих дифференциальной окрестности порядка $k+3$ и имеющих столь же ясный алгебраический смысл, какой имеют тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$.

## § 7. НОВЫЕ ТОЖДЕСТВА И ФИГУРЫ ЗАМЫКАНИЯ

1. Полученные в §§ 4—6 результаты дают возможность продолжить и углубить классификацию три-тканей по условиям замыкания, предложенную еще в тридцатые годы (см. § 1), с помощью новых условий замыкания, связанных уже с дифференциальными окрестностями порядка $s>3$. Для $s=4$ эта классификация дана в [28].

Новые фигуры замыкания определяются на три-ткани $W$ равенствами вида

$$S_l^{k-1}(x, y, u_1\dots u_{k-1})(u\cdot v)=$$
$$=S_l^{k-1}(x, y, u_1\dots u_k)(u)\cdot S_l^{k-1}(x, y, u_1\dots u_k)(v), \tag{7.1}$$
$$S_r^{k-1}(x, y, u_1\dots u_{k-1})(u\cdot v)=$$
$$=S_r^{k-1}(x, y, u_1\dots u_{k-1})(u)\cdot S_r^{k-1}(x, y, u_1\dots u_{k-1})(v), \tag{7.2}$$

выполняемыми в координатных лупах $l_p$ этой ткани. Здесь $k\in\mathrm{N}$, а функции $S_l^{k-1}$ и $S_r^{k-1}$ взяты из последовательности (6.1). Равенства (7.1) и (7.2), рассматриваемые как тождества относительно $u$ и $v$, означают, что оператор $S_l^{k-1}$ или $S_r^{k-1}$ является локальным автоморфизмом в $l_p$. В силу определения и свойств оператора $S$ (см. § 4), равенства (7.1) и (7.2) эквивалентны следующим:

$$S_l^k(x, y, u_1\dots u_{k-1}, u)(v)=v,\qquad S_r^k(x, y, u_1\dots u_{k-1}, u)(v)=v. \tag{7.3}$$

В частности, при $k=1$ из (7.1) и (7.2) получаем соотношения

$$l_{x,y}(u\cdot v)=l_{x,y}(u)\cdot l_{x,y}(v), \tag{7.4}$$

$$r_{x,y}(u\cdot v)=r_{x,y}(u)\cdot r_{x,y}(v), \tag{7.5}$$

рассмотренные в [28], [29].

Опишем построение фигуры замыкания, определяемой равенством (7.4). Сначала с помощью рис. 8 строим элемент $w=l_{x,y}(u)$, который является решением уравнения $xy\cdot w=x\cdot yu$. Его построение изображено на рис. 15.

Предположим, что элементы $l_{x,y}(u)=w$, $l_{x,y}(v)=z$, $l_{x,y}(u\cdot v)=t$ уже построены, тогда равенство (7.4) равносильно тому, что слои $w\cdot z$ и $t$ совпадают (рис. 16). Если все построения совместить на одном рисунке, то получим вид фигуры замыкания, соответствующей равенству (7.4). Мы ее не приводим, так как она громоздка и, кроме того, далее не используется. Аналогично строится и фигура по равенству (7.5); построение элемента $w=r_{x,y}(u)$ показано на рис. 17.

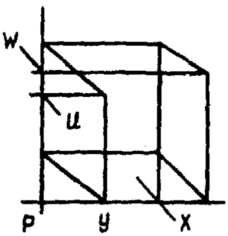


Рис. 15

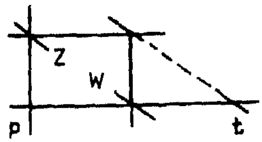


Рис. 16

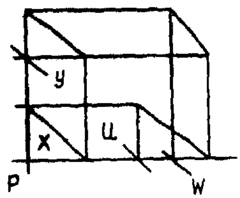


Рис. 17

Лупы, в которых все операторы вида $l_{x,y}$ ($r_{x,y}$) являются автоморфизмами, называются левыми (правыми) специальными лупами, или $A$-лупами [42], [14], [45]. Мы их кратко обозначим $A_l$ ($A_r$), а лупы с тождествами (7.1) и (7.2) — через $A_l^k$ и $A_r^k$ соответственно, так что $A_l\equiv A_l^1$, $A_r\equiv A_r^1$.

Определение 7.1. Три-ткань $W$, каждая координатная лупа которой есть $A_l^k$-лупа ($A_r^k$-лупа), назовем тканью $A_l^k$ ($A_r^k$). Соответствующие фигуры замыкания обозначим теми же буквами.

Из этого определения получаем очевидное следствие: три-ткань $W$ принадлежит классу $A_l^k$ ($A_r^k$) тогда и только тогда, когда на ней замыкаются все фигуры $A_l^k$ ($A_r^k$), образованные слоями этой ткани.

Фигуры $A_l^k$ и $A_r^k$ при $k>1$ имеют еще более сложный вид, чем описанная выше фигура $A_l^1$, но тем не менее и для них можно дать подробное индуктивное описание.

Если в равенствах (7.1) или (7.2) отождествить несколько (в частности, все) переменных, то получим новые тождества, которым отвечают новые классы тканей. Назовем их тождествами (тканями) типа $A_l^k$ или $A_r^k$. Соответствующие фигуры будут получаться из фигур $A_l^k$ и $A_r^k$ отождествлением некоторых слоев (как, например, фигуры Боля или фигура $H$ получаются из фигуры $R$, см. рис. 2—4).

2. Сейчас будет показано, что некоторые из определенных в п. 1 классов тканей типа $A_l$ или $A_r$ совпадают с известными классами — $B_r$, $B_l$, $R$. При этом мы рассмотрим только тождество (7.4), так как для (7.5) все рассуждения и построения аналогичны.

Полагая в (7.4) $u=y$, $v=\underbrace{y(y(\ldots(yy))}_{n-1}\ldots)$, получим равенство

$$O_l(n): l_{x,y}(\underbrace{y(y(\ldots(yy))}_{n}\ldots))=l_{x,y}(y)\cdot l_{x,y}(\underbrace{y(y(\ldots(yy))}_{n-1}\ldots)). \quad (7.6)$$

Соответствующую фигуру и условие замыкания обозначим также через $O_l(n)$.

Теорема 7.1 ([28]). Пусть на три-ткани $W$ выполняются условия замыкания $O_l(n)$ и $O_l(n+1)$. Тогда эта ткань является правой тканью Боля.

Доказательство. Рассмотрим случай $n=2$. Пусть в координатных лупах ткани $W$ выполняются тождества $O_l(2)$ и $O_l(3)$:

$$O_l(2): l_{x,y}(y^2)=(l_{x,y}(y))^2, \quad (7.7)$$

$$O_l(3): l_{x,y}(y\cdot y^2)=l_{x,y}y\cdot l_{x,y}(y^2). \quad (7.8)$$

Тогда на этой ткани замыкаются фигуры $O_l(2)$ и $O_l(3)$, вид которых изображен на рис. 18 и 19. Они построены согласно описанному выше правилу и с помощью схемы, приведенной на рис. 15.

Замыканию фигуры $O_l(3)$, изображенной на рис. 19, отвечает наличие слоя $CD$. Сравнивая рис. 18 и 19, мы обнаружим на втором из них фигуру $O_l(2)$, расположенную ниже горизон-

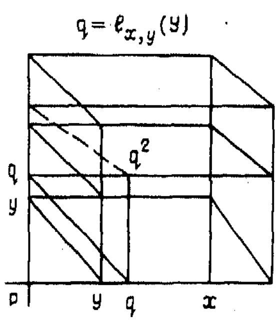


Рис. 18

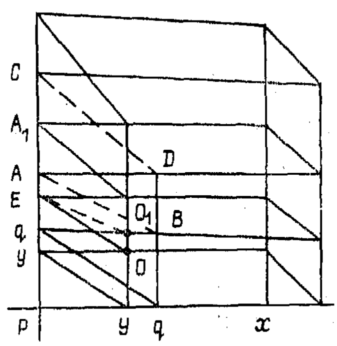


Рис. 19

тального слоя, проходящего через точку $A_1$. По условию теоремы эта фигура должна быть замкнутой, поэтому точки $A$ и $B$ лежат на одном слое третьего слоения ткани $W$.

Теперь рассмотрим часть фигуры $O_l(3)$, расположенную выше горизонтального слоя, проходящего через точку $q$. Сравнивая с рис. 18, находим, что это есть фигура $O_l(2)$. Так как она должна замыкаться, то существует слой третьего слоения, проходящий через точки $E$ и $O_1$. Но по определению три-ткани через каждую точку проходит только один слой каждого слоения. Поэтому $O \equiv O_1$, что влечет $q=y \Rightarrow l_{x,y}(y) = = y \Rightarrow xy \cdot y = x \cdot y^2$. Поскольку $x$ и $y$ были взяты произвольно, то получаем, что в лупе $l_p$ выполняется тождество правой альтернативности. Эти рассуждения справедливы для любой координатной лупы ткани $W$, откуда и вытекает, что она является правой тканью Боля. При $n>2$ доказательство проходит аналогично, только увеличивается число «этажей» в фигуре, изображенной на рис. 19. Теорема доказана.

Следствие 7.2. Класс тканей $O_l(n) \& O_l(n+1)$ совпадает с классом правых тканей Боля. Действительно, импликация $O_l(n) \& O_l(n+1) \Rightarrow B_r$ доказана в теореме 7.1. Обратное утверждение следует из того известного факта [49], что в лупе $B_r$ выполняется тождество $(xy^p)y^q = x \cdot y^{p+q}$, эквивалентное $l_{x,y}(y^k) = y^k$, в силу которого (7.6) удовлетворяется тождественно.

С помощью теоремы 7.1 легко решить проблему 4, сформулированную в [23] и частично решенную в [24]: найти класс одулей, в котором универсально тождество правой геометричности [22]:

$$l_{x,y}(ty) = tl_{x,y}(y), \quad t \in \mathbf{R}. \tag{7.9}$$

(Одуль есть моноассоциативная лупа, в которой $ty \overset{\text{def}}{=} y^t$; точное определение см. в [21].) В [24] были указаны лишь необходимые условия, характеризующие указанный класс одулей. В следующей теореме указаны необходимые и достаточные условия.

Теорема 7.3 ([28]). Тождество правой геометричности универсально в классе правых луп Боля.

Доказательство. Полагая в (7.9) $t=2$ и $t=3$, получим тождества (7.7) и (7.8). При этом мы воспользовались моноассоциативностью одуля, в силу которой $3y = y^3 = y^2 \cdot y = = y \cdot y^2$. Предположим, что тождество (7.9) универсально в некотором классе луп (одулей). Согласно § 1, этому классу отвечает три-ткань, в каждой координатной лупе которой выполняются условия замыкания $O_l(2)$ и $O_l(3)$. Но тогда по теореме 7.1 получаем, что эта ткань есть ткань $B_r$, а значит и ее координатные лупы будут правыми лупами Боля. Таким образом, рассматриваемый класс одулей входит в класс правых луп Боля, а по следствию 7.2 совпадает с ним.

3. Полагая в тождестве (7.4) $u=y$, получим тождество

$$l_{x,y}(y\cdot v)=l_{x,y}(y)\cdot l_{x,y}(v). \qquad (7.10)$$

Теорема 7.4. Пусть в каждой координатной лупе ткани $W$ выполняется тождество (7.10). Тогда эта ткань является тканью $R$.

Доказательство. Положив в (7.10) $v=y$, затем $v=y^2$, получим тождества (7.7) и (7.8). Отсюда на основании теоремы 7.1 заключаем, что рассматриваемая ткань есть ткань $B_r$. Для последней, как отмечалось при доказательстве следствия 7.2, $l_{x,y}(y)=y$, поэтому тождество (7.10) принимает вид:

$$l_{x,y}(y\cdot v)=y\cdot l_{x,y}(v). \qquad (7.11)$$

Соответствующая фигура замыкания (обозначим ее $F$) имеет вид, изображенный на рис. 20 (без учета пунктирных линий). Эта фигура имеет следующую особенность: ее верхняя и нижняя части независимы, так как положение верхней определяется только выбором элемента $v$, а нижней — выбором элемента $y$. «Передвинем» нижнюю часть в другое положение

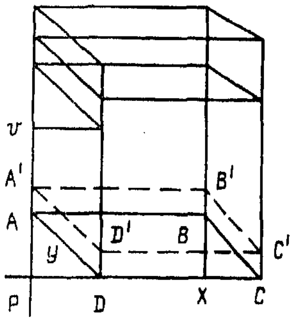


Рис. 20

$A'B'C'D'$, изображенное на рис. 20 пунктиром. Получим новую фигуру $F'$ у которой верхняя часть та же самая. По условию теоремы фигура $F'$ обязана замыкаться, поэтому замыкается и фигура $R=\{ABCDA'B'C'D'\}$. Так как фигуры $F$ и $F'$ можно подобным образом присоединить к любой фигуре $R$ на рассматриваемой ткани $W$, то получаем, что на последней замыкаются все фигуры $R$. $\triangleleft$

Поскольку тождество (7.10) является частным случаем тождества (7.4), которое характеризует ткани $A_l$, то из теоремы 7.4 вытекает очевидное

Следствие 7.5. Всякая три-ткань $A_l$ есть ткань $R$.

Аналогичный вывод справедлив и для тканей $A_r$.

4. Рассмотрим равенство

$$H_l(n): l_{x,x}(\underbrace{x(x(\ldots(xx))}_{n}\ldots))=$$

$$=l_{x,x}(x)\cdot l_{x,x}(\underbrace{x(x(\ldots(xx))\ldots)}_{n-1}), \qquad (7.12)$$

которое получается из (7.6) при $y=x$.

Теорема 7.6 ([28]). Пусть на ткани $W$ выполняются условия замыкания $H_l(n)$ и $H_l(n+1)$. Тогда эта ткань есть ткань $H$.

Доказательство в точности повторяет доказательство теоремы 7.1, с той лишь разницей, что всюду нужно положить $y=x$. Тогда мы получим, что замыкаются фигуры $B_r$, у которых два вертикальных слоя — $x$ и $y$ — совпадают (см. рис. 18). Но это фигуры $H$, что и доказывает теорему.

Следствие 7.7. Класс тканей $H_l(n)\&H_l(n\times 1)$ совпадает с классом тканей $H$. (Ход доказательства такой же, как и в следствии 7.2.)

Теорема 7.8. Пусть в каждой координатной лупе ткани $W$ выполняется тождество

$$l_{x,x}(x\cdot v)=l_{x,x}(x)\cdot l_{x,x}(v). \qquad (7.13)$$

Тогда эта ткань есть левая ткань Боля.

Доказательство. Полагая в (7.13) $v=x$, затем $v=x^2$, получим тождества $H_l(2)$ и $H_l(3)$. Поэтому в силу теоремы 7.6 рассматриваемая ткань будет тканью $H$, и для нее $l_{x,x}(x)=x$. В результате тождество (7.13) примет вид:

$$l_{x,x}(x\cdot v)=x\cdot l_{x,x}(v). \qquad (7.14)$$

Так как это тождество получается из тождества (7.11) при $x=y$, то ему отвечает такая фигура $F$ (см. рис. 20), у которой вертикальные слои $x$ и $y$ совпадают. Проводя такие же рассуждения, как при доказательстве теоремы 7.4, придем к тому, что на рассматриваемой ткани замыкаются фигуры $R$, у которых совпадают вертикальные слои $x$ и $y$. Но это есть фигура $B_l$ (см. рис. 3), что и доказывает теорему.

Следствие 7.9. Если в каждой координатной лупе ткани $W$ преобразования вида $l_{x,x}$ являются автоморфизмами, то эта ткань является левой тканью Боля общего типа.

Действительно, пусть в каждой координатной лупе ткани $W$ выполняется тождество

$$l_{x,x}(u\cdot v)=l_{x,x}(u)\cdot l_{x,x}(v). \qquad (7.15)$$

Из него вытекает тождество (7.14), которое означает, что рассматриваемая ткань есть ткань $B_l$. Но тогда в ее координатных лупах выполняется тождество левой альтернативности $x^2\cdot y=x\cdot xy$, или $l_{x,x}(y)=y$, в силу которого (7.15) удовлетворяется тождественно. ◁

Таким образом, тождества (7.4), (7.5), (7.10), (7.7) и (7.8) вместе, (7.13), (7.15) не приводят к новым классам тканей. Поэтому представляет интерес исследование более широких классов типа $A_l$, определяемых менее сильными условиями, например, одним условием замыкания типа $O_e(n)$ или $H_e(n)$ ($n$ фиксировано). Кроме того, остается открытым такой вопрос: какие из тождеств типа $A_l^k$ или $A_r^k$ при $k>1$ приводят к известным классам тканей? Таким образом, задача классификации три-тканей по новым условиям замыкания приводит в первую очередь к следующей проблеме: выяснить, какие из классов тканей типа $A_l^k$ и $A_r^k$ (включая и те, которые получаются подобно классу $O_l(n)$ заменой какого-либо элемента словом или даже многочленом от другой переменной) совпадают с известными классами, а какие являются новыми.

5. Из равенств (7.3) и (6.2) вытекает

Теорема 7.10. Пусть три-ткань $W$ является тканью $A_l^k$, т. е. в ее координатных лупах выполняется тождество (7.1). Тогда на этой ткани тензор $\underset{k}{\mathscr{L}}$ равен нулю:

$$\underset{k}{\mathscr{L}}(x, y, u_1 \ldots u_{k-1}, u, v) = 0; \tag{7.16}$$

для тканей типа $A_r^k$, определяемых тождеством (7.2), выполняется

$$\underset{k}{\mathscr{R}}(x, y, u_1 \ldots u_{k-1}, u, v) = 0. \ \triangleleft \tag{7.17}$$

Для других тканей типа $A_l^k$ и $A_r^k$ соответствующие тензорные равенства получатся после отождествления какого-то числа переменных в (7.16) или (7.17).

Возникает вопрос: верна ли теорема, обратная теореме 7.10, т. е. будут ли условия (7.16) и (7.17) достаточными для того, чтобы ткань $W$, на которой они выполняются, являлась бы тканью $A_l^k$ или соответственно $A_r^k$? Для тканей с классическими условиями замыкания — $T$, $R$, $B$, $H$ обратное утверждение, как известно, справедливо: каждый из этих классов характеризуется определенными соотношениями на тензоры кручения и кривизны ткани, выполнение которых достаточно для замыкания соответствующих фигур [9]. Поэтому естественно высказать гипотезу, что обратное утверждение справедливо и для тканей типа $A_l^k$ и $A_r^k$. Однако его доказательство будет, по-видимому, весьма непростым, так как, в отличие от классического случая (где доказательство тоже нетривиально!), здесь придется работать в дифференциальной окрестности порядка $s>3$. Во всяком случае, если гипотеза окажется справедливой, то по крайней мере при $s=4$ теория тканей примет (ввиду работы [29]) такой же завершенный вид, какой она имеет в дифференциальной окрестности третьего порядка.

6. В заключение заметим, что доказательство предложений 7.1, 7.2, 7.3—7.9 носит алгебраический характер, поэтому сформулированные в них результаты справедливы и для абстрактных тканей (см. § 1). Например, следствие 7.5 допускает такую ре-

дакцию: если каждый главный изотоп $A_l$-лупы $Q$ также является $A_l$-лупой, то лупа $Q$ изотопна некоторой группе (или изоморфна некоторой группе[1]). Этот и другие результаты настоящего параграфа существенно дополняют работу [42] в той ее части, где рассматриваются универсальные свойства $A$-луп (см. § 1).

Во-вторых, отметим, что тождество (7.11), универсальность которого согласно теореме 7.4 приводит к тканям $R$, может быть рассмотрено и без требования универсальности, т. е. в *одной лупе*. Тогда эта лупа уже не является, вообще говоря, группой. По форме тождество (7.11) напоминает тождество левой геометричности (7.9), но, по-видимому, сильней его. Оно может быть записано в виде $l_{x,y}\circ L_y = L_y\circ l_{x,y}$, которое допускает алгебраическую интерпретацию в терминах групп $L_Q$ и $as_l(Q)$ (см. § 5).

Последнее замечание относится и к тем тождествам, которые получаются из (7.11) отождествлением каких-либо двух или всех трех переменных, а также к тождеству (7.14) и его обобщениям (в сторону увеличения различных переменных). Описание свойств перечисленных луп представляется нам важной и интересной задачей.

## § 8. УСЛОВИЯ ЗАМЫКАНИЯ И ЗАМКНУТЫЕ $g_W$-СТРУКТУРЫ

Как уже отмечалось в § 1, все классические условия замыкания — $T$, $R$, $B$, $H$, приводят к замкнутости $g_W$-структуры, определяемой три-тканью $W$. Те из новых условий замыкания, рассмотренных в § 7, которые сводятся к известным классам тканей, по этой причине также дают замкнутость $g_W$-структуры. Приведенная ниже теорема показывает, что среди новых условий замыкания существуют такие, которые хотя и приводят к замкнутости $g_W$-структуры ткани, но не сводятся (по крайней мере очевидным образом) к известным условиям замыкания.

Рассмотрим условия замыкания, определяемые тождествами:

$$H_l^k:\ S_l^{k-1}(x\ldots x)(x\cdot x)=(S_l^{k-1}(x\ldots x)(x))^2, \qquad (8.1)$$

$$H_r^k:\ S_r^{k-1}(x\ldots x)(x\cdot x)=(S_r^{k-1}(x\ldots x)(x))^2, \qquad (8.2)$$

которые получаются из равенств (7.1) и (7.2) отождествлением всех переменных.

Теорема 8.1 [33]. Пусть на три-ткани $W$ выполняются условия замыкания $H_l^k$ и $H_r^k$ вместе. Тогда соответствующая $g_W$-структура будет замкнутой $g$-структурой порядка $2(k+2)$[2].

Доказательство. Пусть на три-ткани $W$ выполняются условия замыкания, соответствующие тождествам (8.1) и (8.2).

[1] Теорема Алберта: если лупа $Q$ изотопна некоторой группе, то она ей изоморфна, т. е. сама является группой [38].

[2] В [30], следуя [5], мы писали «класса 2 $(k+2)$».

Тогда тензоры $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$ этой ткани удовлетворяют уравнениям

$$\underset{k}{\mathscr{L}}(\underbrace{x \ldots x}_{k+3})=0, \quad \underset{k}{\mathscr{R}}(\underbrace{x \ldots x}_{k+3})=0, \tag{8.3}$$

которые получаются из (7.16) и (7.17). Используя далее формулы (6.5), придем к соотношениям

$$\underset{\beta}{c}(\underbrace{x \ldots x}_{k+3})=\underset{\beta}{R}|_D, \quad \underset{\alpha}{c}(\underbrace{x \ldots x}_{k+3})=\underset{\alpha}{R}|_D, \tag{8.4}$$

где, согласно теореме 6.1, $\underset{\alpha}{R}|_D$ и $\underset{\beta}{R}|_D$ есть комитанты тензоров вида $\underset{\gamma}{c}$ — ковариантных производных тензора кривизны ткани $W$, порядок которых меньше $k+3$. По терминологии работы [30] тензоры $\underset{\alpha}{c}$ и $\underset{\beta}{c}$ являются замкнутыми, так как в силу (8.4) они выражаются через тензоры, принадлежащие дифференциально-геометрическому объекту ткани, порядок которого меньше $k+3$. Далее пользуемся теоремой 5.2 из [30], согласно которой из замкнутости симметрированных тензоров

$$\underset{\alpha}{c}=(c^i_{(jlr+mj_1\ldots j_k)}), \quad \underset{\beta}{c}=(c^i_{(jlr+mr+j_1\ldots r+j_k)})$$

вытекает, что определяемая этой тканью $g_W$-структура есть замкнутая $g$-структура порядка $2(k+2)$.◁

При $k=1$ отсюда получаем утверждение, доказанное в [28].

Из теоремы 8.1 вытекает, что если на ткани $W$ выполняются два условия замыкания, одно из которых типа $A_l{}^k$, а второе, ему соответствующее, типа $A_r{}^k$, то $g_W$-структура оказывается замкнутой. Так будет, например, если взять тождество (7.6) и соответствующее тождество для правого оператора $r_{x,y}$. Они приведут к тензорным равенствам $\mathscr{L}(x, y, y, y)=0$ и $\mathscr{R}(y, x, y, y)=0$, связанным с тождествами левой и правой геометричности в одулях [24].

Однако, результаты работы [30], с помощью которой доказана теорема 8.1, не дают возможности ответить на вопрос: будет ли замкнутой $g_W$-структура ткани, на которой обращается в нуль только один тензор, скажем, $\mathscr{L}(x, y, y, y)$? Если проблема «обратной теоремы», сформулированная в п. 5 § 7, решается положительно, то условие $\mathscr{L}(x, y, y, y)=0$ ведет к выполнению тождества (7.6), а оно, в свою очередь,— к классу тканей $B_r$, т. е. к замкнутости $g_W$-структуры. Однако, даже в случае выполнения обратной теоремы нельзя ответить, например, на такой вопрос: будет ли замкнутой $g_W$-структура ткани $W$, на которой выполняется уравнение $\mathscr{L}(x, x, x, x)=0$? Это самостоятельная проблема.

## § 9. АВТОМОРФИЗМЫ ЛОКАЛЬНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ЛУП И ЗАМКНУТЫЕ $g_W$-СТРУКТУРЫ

1. В [30] и настоящей работе обсуждаются два подхода к классификации многомерных три-тканей. В [30] рассматривались ткани с замкнутой $g_W$-структурой, здесь — ткани типа $A_l^k$ и $A_r^k$. Взаимоотношение между ними выясняется в § 7, 8, где показано, что значительный класс тканей $A_l^k(A_r^k)$ обладает замкнутой $g_W$-структурой, причем ткани типа $A_l^1(A_r^1)$ включают в себя «классические» ткани — $H$, $B$, $M$, $R$. Возникает предположение, что всякое условие замыкания типа $A_l^k(A_r^k)$, выполняемое на три-ткани $W$, влечёт замкнутость определяемой ею $g_W$-структуры. Если в соответствующих тождествах (7.1) и (7.2) переменные $u$ и $v$ считать независимыми между собой и независимыми от остальных переменных $x$, $y$, $u_1 \ldots u_{k-1}$, то эта гипотеза формулируется так: всякая три-ткань, координатные лупы которой допускают автоморфизмы вида $S_l^k$ и $S_r^k$, обладает замкнутой $g_W$-структурой. В настоящем параграфе мы расширяем проблему и устанавливаем связь между наличием автоморфизмов (не обязательно внутренних ) в координатных лупах ткани $W$ и замкнутостью ее $g_W$-структуры.

Автоморфизмы координатных луп ткани $W$ связаны с преобразованиями самой ткани, называемыми автотопиями. Пусть, как и выше, аналитическая ткань $W$ образована слоениями $\lambda_\alpha$. $\alpha=1, 2, 3$, на многообразии $M$. Обозначим через $q(\cdot)$ трехбазисную локальную аналитическую квазигруппу этой ткани [1], умножение в которой записывается как $z=x\cdot y$, где $x\in\lambda_1$, $y\in\lambda_2$, $z\in\lambda_3$, причем слой $z$ проходит через точку пересечения слоев $x$ и $y$. Автотопией три-ткани $W$ (или ее координатной квазигруппы $q$) называется тройка $A=(A_1, A_2, A_3)$ локальных диффеоморфизмов $A_\alpha:\lambda_\alpha\to\lambda_\alpha$, при которых слои этой ткани переходят в слои того же семейства и сохраняется их инцидентность. В терминах координатной квазигруппы $q$ это означает, что выполняется условие

$$A_1(x)\cdot A_2(y)=A_3(x\cdot y). \tag{9.1}$$

Все автотопии ткани $W$ образуют группу $\mathfrak{A}$ относительно естественной операции композиции: $A\circ A'=(A_1\circ A_1', A_2\circ A_2', A_3\circ A_3')$, где $A=(A_\alpha)$, $A'=(A_\alpha')$ — автотопии из $\mathfrak{A}$. Если квазигруппа $H(\circ)$

изотопна квазигруппе $q(\cdot)$, причем изотопия $H \to q$ имеет вид: $T=(\alpha, \beta, \gamma)$ (см. § 1), и $A=(A_\alpha)$ — автотопия в $q(\cdot)$, то в $H(\circ)$ возникает автотопия

$$T^{-1} \circ A \circ T = (\alpha^{-1} \circ A_1 \circ \alpha,\ \beta^{-1} \circ A_2 \circ \beta,\ \gamma^{-1} \circ A_3 \circ \gamma). \tag{9.2}$$

Рассмотрим координатную лупу $l_p$ ткани $W$. Напомним, что умножение $(\circ)$ в ней задается, согласно рис. 8, формулой

$$x \circ y = R_{y_0}^{-1}(x) \cdot L_{x_0}^{-1}(y),$$

где $x_0 \in \lambda_1$, $y_0 \in \lambda_2$ — слои ткани, проходящие через точку $p$, а $L_{x_0}$ и $R_{y_0}$ — сдвиги в $q$. Из этой формулы видно, что лупа $l_p$ главноизотопна координатной квазигруппе $q$, причем изотопия $l_p \to q$ имеет вид $(R_{y_0}^{-1}, L_{x_0}^{-1}, \mathrm{id})$. Поэтому, если $A=(A_\alpha)$ — автотопия в $q$, то в $l_p$ возникает автотопия

$$A(x_0, y_0) = (R_{y_0} \circ A_1 \circ R_{y_0}^{-1},\ L_{x_0} \circ A_2 \circ L_{x_0}^{-1},\ A_3).$$

Лупа $l_p$ задана на третьем слоении ткани $W$ (см. рис. 81), и, в отличие от квазигруппы $q$, является однобазисной. Поэтому для нее имеет смысл понятие автоморфизма, т. е. автотопии вида $(A, A, A) \equiv A$. Справедливо

Предложение 9.1. Автотопия $A=(A_\alpha)$ ткани $W$ является автоморфизмом ее координатной лупы $l_p$, если и только если преобразования $A_\alpha$ оставляют неподвижными слои ткани $W$, проходящие через точку $p$.

Действительно, приравнивая компоненты автотопии $A(x_0, y_0)$, придем к равенствам $A_1 \circ R_{y_0} = R_{y_0} \circ A_3$, $A_2 \circ L_{x_0} = L_{x_0} \circ A_3$. Действуя этими преобразованиями на элементы $x_0$ и $y_0$, получаем:

$$A_1(x_0) \cdot y_0 = A_3(x_0 \cdot y_0), \quad x_0 \cdot A_2(y_0) = A_3(x_0 \cdot y_0).$$

С другой стороны из (9.1) находим, что $A_1(x_0) \cdot A_2(y_0) = A_3(x_0 \cdot y_0)$. Отсюда $A_1(x_0) = x_0$, $A_2(y_0) = y_0$, $A_3(x_0 \cdot y_0) = x_0 \cdot y_0$, что и требовалось доказать.

Автотопия $A=(A_\alpha)$ индуцирует локальный диффеоморфизм многообразия $M$, несущего три-ткань $W$, при котором точка $p = x_0 \cap y_0$ переходит в точку $p' = A_1(x_0) \cap A_2(y_0)$ (как и выше, $x_0$ и $y_0$ суть слои ткани $W$, проходящие через точку $p$). Этот диффеоморфизм обозначим также через $A$. Он является автоморфизмом $g_W$-структуры и связности Чженя (§ 6), определяемых тканью $W$. Точнее, имеет место.

Теорема 9.2. ([48]). Пусть $A$ локальный диффеоморфизм многообразия $M$, несущего три-ткань $W$. Следующие утверждения эквивалентны: а) $A$ есть автотопия ткани $W$; б) $A$ есть автоморфизм $g_W$-структуры, определяемой этой тканью; в) $A$ есть автоморфизм связности Чженя, присоединенной к ткани $W$.

Эквивалентность первых двух условий очевидна и следует прямо из определения автотопии и $g_W$-структуры, остальное доказывается также несложно, см. [48].

2. В теории групп Ли известен следующий факт: в канонических координатах первого рода всякий автоморфизм группы Ли $G$ является линейным преобразованием. Отсюда вытекает, что автоморфизмы локальной группы Ли являются автоморфизмами ее алгебры Ли. Как сейчас будет показано, аналогичные утверждения справедливы и для локальных аналитических луп.

Сначала заметим, что канонические координаты в произвольной локальной аналитической лупе $Q$ введены в [1]; их существование доказано в [11]. Эти координаты определяются условием $(x\cdot x)^i = 2x^i$, которое в случае, если умножение в лупе представлено в виде ряда (3.1)—(3.2), приводит к следующим соотношениям на входящие в него многочлены $\underset{s}{\Lambda}$ [1]:

$$\underset{s}{\Lambda}(x, x) = 0, \quad s = 2, 3 \ldots . \tag{9.3}$$

Разложение (3.1) при условии (9.3) называется каноническим.

Теорема 9.3. ([31]). Пусть $Q(\cdot)$ — локальная аналитическая лупа, отнесенная к каноническим координатам. Если $\varphi \in \operatorname{Aut} Q$, $\varphi \in C^\omega$, то $\varphi$ — линейное преобразование.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \operatorname{Aut} Q$. Так как координаты единицы $e$ лупы $Q$ равны нулю и $\varphi(e) = e$, то ряд Тейлора функции $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(x), \tag{9.4}$$

где $\Phi_k(x)$ — однородный многочлен степени $k$. Обозначим симметричную полилинейную форму, полярную многочлену $\Phi_k(x)$, через $\Phi_k(x, y, \ldots, z)$.

Предположим, что координаты $x^i$ являются каноническими, и докажем, что $\Phi_k(x) = 0$ при $k > 1$. По определению автоморфизма $\forall x, y \in Q$ имеем:

$$\varphi(x\cdot y) = \varphi(x)\cdot\varphi(y). \tag{9.5}$$

Используя формулы (3.1) и (9.4), разложим в ряд обе части этого равенства. В результате получим:

$$\sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l\left(x + y + A(x, y) + \sum_{s=3}^{\infty} \underset{s}{\Lambda}(x, y)\right) = \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(x) + \sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(y) +$$
$$+ A\left(\sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(x), \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(y)\right) + \sum_{s=3}^{\infty} \underset{s}{\Lambda}\left(\sum_{l=1}^{\infty} \Phi_l(x), \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_j(y)\right). \tag{9.6}$$

Это соотношение должно удовлетворяться тождественно относительно переменных $x$ и $y$. В силу линейности формы $\Phi_1$ слагаемые первой степени исчезают, а сравнение членов второй и третьей степени дает:

$$\Phi_1(A(x, y)) + \Phi_2(x + y) = \Phi_2(x) + \Phi_2(y) + A(\Phi_1(x), \Phi_1(y)); \tag{9.7}$$

$$\Phi_1(\underset{3}{\Lambda}(x, y)) + 2\Phi_2(x + y, A(x, y)) + \Phi_3(x + y) =$$

$$= \Phi_3(x) + \Phi_3(y) + A(\Phi_1(x), \Phi_2(y)) + A(\Phi_2(x), \Phi_1(y)) + \\ + \underset{3}{\Lambda}(\Phi_1(x), \Phi_1(y)). \qquad (9.8)$$

Полагая в (9.7) $x=y$ и пользуясь кососимметричностью формы $A$ (см. § 3), придем к соотношению $\Phi_2(2x)=2\Phi_2(x)$. Но $\Phi_2(2x)=4\Phi_2(x)$, поэтому предыдущее равенство даст $\Phi_2(x)=0$. С учетом этого равенства и полилинейности формы $\Phi_3$ соотношение (9.8) при $x=y$ принимает вид:

$$\Phi_1(\underset{3}{\Lambda}(x, x)) + 8\Phi_3(x) = 2\Phi_3(x) + \underset{3}{\Lambda}(\Phi_1(x), \Phi_1(x)).$$

Отсюда, пользуясь условием (9.3), получим $\Phi_3(x)=0$.

Далее рассуждаем по индукции. Пусть $\Phi_2(x) = \ldots \Phi_{k-1}(x) = =0$. Подставим эти значения в (9.6) и выделим в полученном равенстве члены порядка $k$. В результате получим:

$$\Phi_1(\underset{k}{\Lambda}(x, y)) + \Phi_k(x+y) = \Phi_k(x) + \Phi_k(y) + \underset{k}{\Lambda}(\Phi_1(x), \Phi_1(y)),$$

или, при $x=y$

$$\Phi_1(\underset{k}{\Lambda}(x, x)) + 2^k\Phi_k(x) = 2\Phi_k(x) + \underset{k}{\Lambda}(\Phi_1(x), \Phi_1(x)).$$

Отсюда в силу (9.3) получаем $\Phi_k(x)=0$. Теорема доказана.

Теорема 9.4. Пусть $Q$ — локальная аналитическая лупа, отнесенная к каноническим координатам, и $\varphi: Q \to Q$ — линейное преобразование. $\varphi \in \operatorname{Aut} Q$, если и только если все формы канонического разложения (3.1) лупы $Q$ инвариантны относительно $\varphi$.

Доказательство. Пусть $\varphi$ — автоморфизм в $Q$. Тогда выполняются соотношения (9.7), (9.8) и т. д., из которых, так как $\Phi_1 \equiv \varphi$, $\Phi_2 = \Phi_3 = \ldots = 0$, имеем:

$$\varphi \circ A = A \circ \varphi^2, \quad \varphi \circ \underset{31}{\Lambda} = \underset{31}{\Lambda} \circ \varphi^3, \quad \varphi \circ \underset{32}{\Lambda} = \underset{32}{\Lambda} \circ \varphi^3 \ldots \varphi \circ \underset{kl}{\Lambda} = \underset{kl}{\Lambda} \circ \varphi^k, \qquad (9.9)$$

где $k=3, 4, \ldots, l=1, \ldots, k-1$ и обозначено

$$(\varphi \circ A)(x, y) \overset{\text{def}}{=} \varphi(A(x, y)), \quad (A \circ \varphi^2)(x, y) \overset{\text{def}}{=} A(\varphi(x), \varphi(y)),$$

и т. д. Соотношения (9.9) и означают, что формы $\underset{kl}{\Lambda}$ инвариантны относительно оператора $\varphi$, что и требовалось доказать.

Обратно, если $\varphi: Q \to Q$ — линейное преобразование и выполнены соотношения (9.9), то равенства (9.7), (9.8) и им подобные удовлетворяются тождественно. Следовательно, выполняется равенство (9.5), т. е. $\varphi \in \operatorname{Aut} Q$. Теорема доказана.

**3.** Всякую локальную аналитическую лупу $Q$ можно рассматривать как координатную лупу $l_p$ некоторой **три-ткани** $W$. Поэтому с лупой $Q \equiv l_p$ связаны две последовательности тензоров типа $\binom{1}{s}$. Это, во-первых, основные тензоры ткани $W$, вычисленные в точке $p - a(p)$, $b(p)$, $\underset{\alpha}{c}(p)$, и, во-вторых, инвариантные формы $\underset{kl}{\Lambda}$, определяемые каноническим разложением лупы. Они задают в касательном пространстве $T_e$ единицы $e$ лупы $Q$ полилинейные операции соответствующей арности. Совокупность тензоров до арности $k$ включительно, взятых из первой последовательности, назовем касательной $W_k$-алгеброй лупы Q; взятых из второго набора тензоров — касательной $\Lambda_k$-алгеброй этой лупы. Совокупность всех операций того или другого вида назовем касательной алгеброй лупы $Q$ и обозначим, соответственно, через $W(Q)$ и $\Lambda(Q)$. ($W_k$-алгебры были введены в [10] и названы там касательными алгебрами ткани $W$ в точке $p$. Они обобщают введенные ранее в [3] $W_3$-алгебры, называемые теперь также алгебрами Акивиса).

Как нетрудно заметить, равенства (9.9) выражают тот факт, что оператор $\varphi$ является автоморфизмом алгебры $\Lambda(Q)$. Поэтому теорему 9.4 можно сформулировать так: в канонических координатах $\varphi \in \operatorname{Aut} Q \Leftrightarrow \varphi \in \operatorname{Aut} \Lambda(Q)$, т. е. группы $\operatorname{Aut} Q$ и $\operatorname{Aut} \Lambda(Q)$ изоморфны.

Аналогичное утверждение справедливо и для касательной алгебры $W(Q)$, так как группы $\operatorname{Aut} W_k$ и $\operatorname{Aut} \Lambda_k$ (в частности, $\operatorname{Aut} W(Q)$ и $\operatorname{Aut} \Lambda(Q)$ изоморфны. Это, в свою очередь, вытекает из теоремы 7.1 из [30], которая в терминах касательных алгебр формулируется так:

Теорема 9.5. При любом $k$ касательная $W_k$-алгебра и касательная $\Lambda_k$-алгебра лупы $Q$ эквивалентны в том смысле, что операции одной выражаются через операции другой.

Наряду с алгебрами $W(Q)$ и $\Lambda(Q)$ в касательном пространстве $T_e$ лупы $Q$ определяется более общий алгебраический объект, а именно клон $\mathscr{K}(Q)$ операций, который образован всевозможными комитантами от операций, входящих в алгебру $W(Q)$ или $\Lambda(Q)$, что в силу теоремы 9.5 равнозначно. В связи с этим каждая из указанных алгебр представляет собой базисную систему операций (или просто базис) в $\mathscr{K}(Q)$, причем алгебра $\Lambda(Q)$ играет роль «натурального» базиса. Как и алгебры $W(Q)$ и $\Lambda(Q)$, клон $\mathscr{K}(Q)$ градуирован.

Из теоремы 6.1 вытекает, что клону $\mathscr{K}(Q)$ принадлежат и операции, определяемые введенными в § 6 тензорами $\underset{k}{\mathscr{L}}$ и $\underset{k}{\mathscr{R}}$. Более того, легко убедиться в том, что ему принадлежат также и операции, определяемые инвариантными тензорными полями некоторых других связностей, рассматриваемых на три-ткани $W$: $\Gamma_{\alpha\beta}$, $\widetilde{\Gamma}_{\alpha\beta}$ и средней связности $\overset{*}{\Gamma}$ [9].

**4.** Вернемся к системе (9.9), которой удовлетворяет всякий автоморфизм $\varphi$ лупы $Q$, отнесенной к каноническим координатам. Эти уравнения означают, что группа $\operatorname{Aut} Q$ имеет $\infty$

инвариантных форм $\underset{kl}{\Lambda}$. Пусть лупа $Q$ произвольна (смысл этого термина см. на стр. 121).

Тогда соотношения (9.9) при каждом фиксированном $k$ независимы от остальных, так что $r^2$ величин $\varphi_j^i$ (координат оператора $\varphi$) удовлетворяют $\infty$ независимых уравнений. Следовательно, произвольная лупа не допускает нетривиальных автоморфизмов.

С другой стороны, имеется класс луп, допускающих транзитивную (т. е. достаточно большую) группу автоморфизмов. Это так называемые $G$-лупы, или лупы, изоморфные всем своим изотопам. Их алгебраическая структура описана в [14], [39]. В соответствии с [39] аналитическая $G$-ткань, т. е. ткань, координатные лупы которой являются $G$-лупами, строится следующим образом. Пусть $G$ — локальная группа Ли размерности $2r+r_0$, содержащая три подгруппы $H_\alpha$ размерности $r+r_0$ каждая, пересекающиеся по общей подгруппе $H$ размерности $r_0$. $G$-ткань образована множествами $gH_\alpha/H$ ($gH_\alpha$ обозначает смежный класс) на однородном пространстве $M=G/H$. Автотопиями такой ткани будут, например, преобразования на $M$, индуцированные (левыми) сдвигами группы $G$. В частности, если группа $G$ является прямым произведением подгрупп $H_1$ и $H_2$, то подгруппа $H_3$ будет графиком некоторого изоморфизма $H_1 \to H_2$, и, согласно [9], соответствующая $G$-ткань становится тканью $R$. Координатные лупы последней есть, как известно, группы Ли, изоморфные группе $H_1$. Таким образом, класс тканей $R$ (групп Ли) содержится в классе $G$-тканей ($G$-луп).

Каноническое разложение $G$-луп обобщает ряд Кэмпбела-Хаусдорфа: входящие в разложение формы $\underset{kl}{\Lambda}$ выражаются только через компоненты структурного тензора исходной группы Ли $G$, с помощью которой строится рассматриваемая $G$-лупа. Этот факт подсказывает важное определение, обобщающее понятие замкнутой $g_W$-структуры. Прежде чем его дать, заметим, что на ткани $W$, для которой лупа $Q$ является одной из ее координатных луп $l_p$, возникают (при изменении $p$) поля касательных алгебр $\Lambda(l_p)$, $W(l_p)$, и поле клона $\mathscr{K}(l_p)$. Обозначим их через $\mathscr{T}\Lambda$, $\mathscr{T}W$ и $\mathscr{T}\mathscr{K}$ соответственно.

Определение 9.1. $g_W$-структура, определяемая тканью $W$, называется $P$-замкнутой (параметрически замкнутой), если в касательном клоне $\mathscr{T}\mathscr{K}$ ткани $W$ существует конечный базис. Это означает, что существует конечное число тензорных полей $t_\lambda$, $\lambda=1, \ldots, \rho$, определенных на $g_W$-структуре и принадлежащих клону $\mathscr{T}\mathscr{K}$, через которые выражаются все входящие в него операции.

Из определения 9.1 следует, что класс координатных луп ткани с $P$-замкнутой $g_W$-структурой характеризуется тем, что их касательные алгебры допускают конечный базис. Несложно доказывается следующая

Теорема 9.6. *Локальная аналитическая лупа $Q$ допускает нетривиальную группу $\mathrm{Aut}\,Q$ $C^\omega$-автоморфизмов, если выполняются следующие три условия:*

*а) касательный клон $\mathscr{K}(Q)$ имеет конечный базис;*

*б) каждый из базисных тензоров $t_\lambda$, $\lambda=1, \ldots, \rho$, клона $\mathscr{K}(Q)$ допускает нетривиальную группу автоморфизмов $\mathrm{Aut}\,t_\lambda$;*

*в) пересечение $\Pi=\bigcap\limits_\lambda \mathrm{Aut}\,t_\lambda$ содержит более одного элемента.*

*Тогда $\mathrm{Aut}\,Q \simeq \Pi$.*

С другой стороны, как сейчас будет показано, существуют лупы с нетривиальной группой автоморфизмов, касательный клон которых не имеет, вообще говоря, конечного базиса.

Рассмотрим грассманову три-ткань $W$ [2], [6], [9], задаваемую тремя гладкими гиперповерхностями $V_\alpha$, $\alpha=1, 2, 3$, в проективном пространстве $P^{r+1}$. Слоями этой ткани будут связки прямых с вершинами на $V_\alpha$. Поскольку грассманова ткань задана на многообразии прямых пространства $P^{r+1}$, то ее автотопиями являются проективные преобразования, переводящие в себя гиперповерхности $V_\alpha$. Таким образом, группа $\mathfrak{A}$ автотопий грассмановой ткани $W$ есть подгруппа проективной группы, для которой поверхности $V_\alpha$, определяющие эту ткань, являются $\mathfrak{A}$-инвариантами.

Для простоты рассуждений сузим проективную группу до евклидовой и предположим, что поверхности $V_\alpha$ имеют общую гиперплоскость симметрии $\pi$, а в остальном произвольны. Тогда группа $\mathfrak{A}$ состоит из двух элементов — $\mathrm{id}$ и симметрии $s$ относительно $\pi$. Рассмотрим координатную лупу $l_p$ ткани $W$, причем такую, что $p \in \pi$. Тогда $s(p)=p$, и, согласно предложению 9.1, автотопия $s$ ткани $W$ является автоморфизмом лупы $l_p$. Таким образом, с одной стороны, группа $\mathrm{Aut}\,l_p$ нетривиальна. С другой, поскольку поверхности $V_\alpha$ достаточно произвольны, соответствующая $g_W$-структура не будет, вообще говоря, $P$-замкнутой. Следовательно, условие а) теоремы 9.6 для рассматриваемой лупы $l_p$ не выполняется.

Аналогично строится грассманова три-ткань с конечной группой автотопий, содержащей более двух элементов, таких, что для соответствущих им координатных луп условие а) теоремы 9.6 также не выполняется.

Вместе с тем легко обнаружить грассмановы ткани с $P$-замкнутой $g_W$-структурой. Рассмотрим, например, ткань, определяемую гиперплоскостью $\pi$ и квадрикой $Q$, т. е. положим $V_1 \equiv V_2 \equiv Q$, $V_3 \equiv \pi$. Известно [6], что это ткань Боля. Считая плоскость $\pi$ бесконечно удаленной, $Q$ — сферой, получим, что группа автотопий $\mathfrak{A}$ рассматриваемой ткани $W$ изоморфна группе вращений. Еще один пример получаем, взяв в качестве $V_\alpha$ три концентрические сферы. Эта ткань, в отличие от первой, уже не является алгебраизуемой, так как поверхности $V_\alpha$ не принадлежат одной кубике.

Поскольку группа вращений действует на многообразии прямых не транзитивно, то обе ткани не являются $G$-тканями. Однако в обоих случаях $g_W$-структура будет $P$-замкнутой, так как ткань определяется постоянными — радиусами сфер.

Перечисленные примеры приводят к предположению, что если группа автотопий ткани $W$ достаточно велика , то ее $g_W$-структура будет $P$-замкнутой. Эта гипотеза хорошо согласуется с результатами, полученными в [19], где изучались инфинитезимальные автотопии тканей (в [19] они названы инфинитезимальными автоморфизмами). Итак, возникает следующая задача: для заданного класса $K$ три-тканей найти наименьшее натуральное число $n$, удовлетворяющее следующему условию: если три-ткань $W$ из $K$ допускает $n$-мерную группу Ли автотопий, то ее $g_W$-структура является $P$-замкнутой. Используя результаты этого параграфа, нетрудно привести пример грассмановой ткани, допускающей одномерную группу автотопий, но не обладающую $P$-замкнутой $g_W$-структурой. Следовательно, для класса грассмановых тканей $n>1$.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Акивис М. А.* О канонических разложениях уравнений локальной аналитической квазигруппы // Докл. АН СССР.— 1969.— *188*, № 5.— С. 967—970 (РЖМат, 1970, 3А468).
2. — О три-тканях многомерных поверхностей // Тр. геометр. семинара. Ин-та научн. и техн. информ. АН СССР.— 1969.— *2*.— С. 7—31 (РЖМат, 1970, 4А647).
3. — Локальные дифференцируемые квазигруппы и три-ткани многомерных поверхностей // Исслед. по теории квазигрупп и луп. Кишинев: Штиинца, 1973.— С. 3—12 (РЖМат, 1973, 12А635).
4. — О локальных алгебрах многомерной три-ткани // Сиб. мат. ж.— 1976.— *17*, № 1.— С. 5—11 (РЖМат, 1976, 7А888).
5. — О замкнутых $G$-структурах на дифференцируемом многообразии // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1975.— *7*.— С. 69—79 (РЖМат, 1976, 9А623).
6. — Дифференциальная геометрия тканей // Итоги науки и техн. ВИНИТИ Пробл. геом.— 1983.— *15*.— С. 187—213 (РЖМат, 1984, 7А630).
7. —, *Герасименко С. А.* Многомерные ткани Боля // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1986.— *18*.— С. 73—103 (РЖМат, 1987, 5А730).
8. —, *Шелехов А. М.* О вычислении тензоров кривизны и кручения многомерной три-ткани и ассоциатора связанной с ней локальной квазигруппы // Сиб. мат. ж.— 1971.— *12*, № 5.— С. 953—966 (РЖМат, 1972, 1А1088).
9. —, — Основы теории тканей.— Калинин, 1981.— 88 с.
10. —, — О подтканях многомерных три-тканей. Ред. Сиб. мат. ж.— Новосибирск, 1985.— 20 с. Библиогр.: 4 назв.— Деп. в ВИНИТИ 09.10.85 № 7130—В (РЖМат, 1986, 2А770 ДЕП).
11. —, — О канонических координатах в локальной аналитической лупе // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1986.— С. 120—124 (РЖМат, 1986, 8А208).

12. —, —Об альтернаторах четвертого порядка локальной аналитической лупы и три-тканях многомерных поверхностей. Изв. Вузов. Мат.— 1989.— № 4.— С. 12—16
13. *Белоусов В. Д.* Уравновешенные тождества в квазигруппах. Мат. сб.— 1966.— *70,* № 1.— С. 55—97 (РЖМат, 1966, 12А257).
14. — Основы теории квазигрупп и луп.— М.: Наука, 1967.— 223 с. (РЖМат, 1967, 11А212К).
15. —, *Рыжков В. В.* Геометрия тканей // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Алгебра. Топология. Геометрия.— 1972.— *10.*— С. 159—188 (РЖМат, 1973, 2А602).
16. *Биллиг В. А., Шелехов А. М.* О классификации тождеств от одной переменной в гладкой локальной лупе // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1987.— С. 24—32 (РЖМат, 1987, 7А722).
17. *Бляшке В.* Введение в геометрию тканей.— М.: ГИФМЛ, 1959.— 144 с. (РЖМат, 1961, 6А475 К)
18. *Вечтомов В. Е.* О фигурах замыкания для одного класса универсальных тождеств // Мат. исследования.— Кишинев, 1975.— *10.*— Вып. 2(36) С. 36—63 (РЖМат, 1976, 1А265).
19. *Гвоздович Н. В.* Некоторые вопросы общей теории инфинитезимальных автоморфизмов многомерных три-тканей // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1985. С. 49—54 (РЖМат, 1985, 10А716).
20. *Сабинин Л. В.* О геометрии луп // Мат. заметки.— 1972.— *12,* № 5.— С. 605—616 (РЖМат, 1973, 4А309).
21. — Методы неассоциативной алгебры в дифференциальной геометрии: Добавление к кн. // *Кобаяси Ш., Номидзу К.* Основы дифференциальной геометрии.— М.: 1981.— Наука, Т. I.— 344 с. (РЖМат, 1981, 11а686К).
22. — Геометрические одули // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1987.— С. 88—98 (РЖМат, 1987, 7А726).
23. — О нелинейной геометрической алгебре // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1988.— С. 32—37 (РЖМат, 1988, 6А765).
24. —, *Шелехов А. М.* К вопросу об универсальности тождества геометричности // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1988, 84—87 (РЖМат, 1988, 6А819).
25. *Шелехов А. М.* О замкнутых $g$-структурах, определяемых многомерными три-тканями. Калинин. ун-т.— Калинин, 1985.— 49 с. Библиогр.: 24 назв.— Деп. в ВИНИТИ 25.12.85, № 8815-В 85 (РЖМат, 1986, 4А877 ДЕП).
26. — Тождества с одной переменной в лупах, эквивалентные моноассоциативности // Пробл. теории тканей и квазигрупп.— Калинин, 1985.— С. 89—93 (РЖМат, 1985, 10А257).
27. — О вычислении ковариантных производных тензора кривизны многомерной три-ткани // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1986.— С. 96—103 (РЖМат, 1986, 8А796).
28. — О фигурах замыкания и тождествах, определяемых в дифференциальной окрестности четвертого порядка многомерной три-ткани. Калинин. ун-т.— Калинин, 1987.— 7 с.— Библиогр.: 7 назв.— Деп. в ВИНИТИ 25.11.87, № 8300-В87 (РЖМат, 1988, 3А856 ДЕП).
29. — О касательной $W_4$-алгебре многомерной три-ткани // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1988.— С. 4—16 (РЖМат, 1988, 6А792).
30. — О Дифференциально-геометрических объектах высших порядков многомерной три-ткани // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Пробл. геом.— 1987.— 19.— С. 101—154 (РЖМат, 1988, 4А670).
31. — Об автоморфизмах локальных аналитических луп. Калинин. ун-т.— Калинин, 1987.— 11 с.— Библиограф.: 16 назв.— Деп. в ВИНИТИ 02.12.87, № 8466-В87 (РЖМат, 1988, 4А441 ДЕП).
32. — О три-тканях с эластичными координатными лупами. Калинин. ун-т. Калинин, 1987.— 7 с.— Библиогр.: 6 назв. Деп. в ВИНИТИ 02.12.87, № 8465-В87 (РЖМат, 1988, 3А857ДЕП).

33. — Об инвариантных тензорах аналитической лупы. Калинин. ун-т.— Калинин, 1988.— 29 с.— Библиогр.: 20 назв.— Деп. в ВИНИТИ 02.02.88, № 887-В88 (РЖМат, 1988, 6А802 ДЕП).
34. —, *Шестакова М. А.* Геометрическое доказательство универсальности некоторых тождеств в лупах // Ткани и квазигруппы.— Калинин, 1984.— С. 118—124 (РЖМат, 1985, 1А325).
35. —, — О тождествах в лупах со слабой ассоциативностью // Пробл. теории тканей и квазигрупп.— Калинин, 1985.— С. 115—121 (РЖМат, 1985, 10А258).
36. *Aczél I.* Quasi-groups, nets and nomograms // Adv. Math.— 1965.— *1*, № 3.— С. 383—450 (РЖМат, 1966, 10А425).
37. — On the Thomsen condition for webs // J. Geom.— 1981.— *17*.— С. 155—160, № 2 (РЖМат, 1982, 9А553).
38. *Albert A. A.* Quasigroups. I // Trans. Amer. Math. Soc.— 1943.— *54*.— С. 507—519.
39. *Barlotti A., Strambach K.* The geometry of binary systems // Adv. Math. 1983.— *49*, № 1.— С. 1—105 (РЖМат, 1984, 3А325).
40. *Blaschke W., Bol G.* Geometrie der Gewebe.— Berlin: Springer—Verlag, 1938.— 339 p.
41. *Bruck R. H.* A survey of binary systems.— Berlin: Springer, 1971. 186 с. (РЖМат, 1971, 7А282К).
42. —, *Paige L. J.* Loops whose innner mapping are automorphisms // Ann. Math.— 1956.— *63*, № 2.— С. 308—323 (РЖМат, 1958, 1028).
43. *Chern S.-S.* Bine Invarianten theorie der 3-Gewebe aus -dimensionalen Mannigfaltigkeiten in $R_{2r}$ // Abh. Math. Sem. in Univ. Hamburg.— 1936.— *11*.— С. 333—358.
44. *Fenyves F.* Extra-loops. II // Publs. math.— 1969.— *16*, № 1—4.— С. 187—192 (РЖМат, 1971, 6А251).
45. *Kikkawa Michihiko.* Geometry of homogneneous Lie loops // Hiroshima Math. J.— 1975.— *5*, № 2.— С. 141—179 (РЖМат, 1976, 2А848).
46. — Canonical connections of homogeneous Lie loops and 3-webs // Mem. Fac. Sci. Shimane Univ.— 1985.— *19*.— С. 37—55.
47. *Murdoch D. G.* Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws // Amer. J. Math.— 1939.— *61*.— С. 509—522.
48. *Nagy Pèter T.* On complete group 3-webs and 3-nets. Preprint № 86/1987. Mathem. Inst. Hungarian Acad. of Sciences.
49. *Robinson D. A.* Bol loops // Trans. Amer. Math. Soc.— 1966.— *123*.— С. 341—354 (РЖМат, 1967, 5А253).
50. *Suschkewitsch A.* On a generalization of the associative law // Trans. Amer. Math. Soc.— 1929.— *31*.— С. 204—214.