

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Ваньков, В. М. Журавлёв, Правильные паркеты и производящие функции,  
*Матем. просв.*, 2018, выпуск 22, 127–157

<https://www.mathnet.ru/mp906>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.9.175

17 мая 2025 г., 20:57:45



---

---

# Наш семинар: математические сюжеты

---

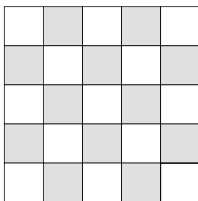
---

## Правильные паркеты и производящие функции

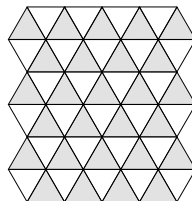
К. А. Ваньков, В. М. Журавлёв

### § 1. ВВЕДЕНИЕ

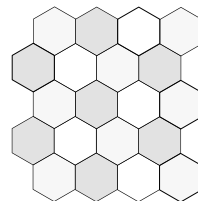
С давних времён известны три правильные мозаики (рис. 1). В качестве элементов этих мозаик используются квадрат, правильный треугольник и правильный шестиугольник. Определения, относящиеся к мозаикам, см. в § 2. В популярной математической литературе некоторые мозаики называются паркетами.



(а) полимино



(б) полиамонд



(в) полигекс

Рис. 1. Три правильные мозаики

В комбинаторной геометрии рассматриваются конечные фигуры, составленные из одинаковых квадратов — полимино, из одинаковых правильных треугольников — полиамонды и из одинаковых правильных шестиугольников — полигексы (см., например, [1]). Ф. Харари называл  $n$ -мино

(полимино, состоящих из  $n$  единичных квадратов) «монстрами, составленными из  $n$  ячеек». По аналогии полиамонды и полигексы называются треугольными и шестиугольными монстрами. Фактически эти фигуры можно рассматривать как связанные конечные подмножества соответствующих правильных мозаик (паркетов).

*Трансляционный* тип полимино (полиамондов, полигексов) получается, если мы считаем одинаковыми фигуры, совпадающие при параллельном переносе. *Вращательный* (ротационный) тип возникает, если считать одинаковыми любые два монстра, эквивалентные относительно группы собственных движений плоскости — поворотов и параллельных переносов. *Изометрический* тип возникает, если считать одинаковыми (эквивалентными) любые два конгруэнтных монстра.

Трансляционное полимино называют *горизонтально-выпуклым* (соответственно *вертикально-выпуклым*), если пересечение любой горизонтальной (вертикальной) прямой с полимино либо пусто, либо состоит только из одного отрезка.

Пусть  $s_n$  обозначает количество различных горизонтально-выпуклых  $n$ -мино. Начальные члены этой последовательности  $s_1 = 1$ ,  $s_2 = 2$ ,  $s_3 = 6$ ,  $s_4 = 19$ ,  $s_5 = 61$ ,  $s_6 = 196$  (см. [14]). Известно, что эта последовательность удовлетворяет рекуррентному соотношению третьего порядка

$$s_n = 5s_{n-1} - 7s_{n-2} + 4s_{n-3} \quad \text{для } n \geq 5. \quad (1)$$

*Производящей функцией* для последовательности будет рациональная функция

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-5x+7x^2-4x^3}. \quad (2)$$

*Производящей функцией* для количества выпуклых по строкам полигексов будет

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^n = \frac{x(1-x)^3}{1-6x+10x^2-7x^3+x^4}. \quad (3)$$

Как следствие, последовательность для количества выпуклых по строкам полигексов удовлетворяет рекуррентному соотношению четвёртого порядка

$$h_n = 6h_{n-1} - 10h_{n-2} + 7h_{n-3} - h_{n-4} \quad \text{для } n \geq 5. \quad (4)$$

Начальные члены этой последовательности 1, 3, 11, 42, 162, 626, 2419, ... (см. [15]).

Доказано, что количество выпуклых по строкам полиамондов удовлетворяет рекуррентному соотношению седьмого порядка

$$t_n = 3t_{n-1} - 4t_{n-3} + t_{n-4} + t_{n-5} + 3t_{n-6} - t_{n-7} \quad \text{для } n \geq 8. \quad (5)$$

Начальные члены этой последовательности 2, 3, 6, 14, 34, 84, 208, 515, ... (см. [16]). Производящей функцией для этой последовательности будет рациональная функция

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n x^n = \frac{x(1-x)(2-x-4x^2+2x^4+3x^5)}{1-3x+4x^3-x^4-x^5-3x^6+x^7}. \quad (6)$$

Рекуррентное соотношение (1) впервые было обнаружено Д. Пойа в 1938 году, но не было им опубликовано до 1969 года, см. [12]. Производящие функции  $S(x)$  и  $H(x)$ , см. (2), (3), были получены Д. Кларнером в [11] с помощью комбинаторной интерпретации интеграла Фредгольма. В [9] приведено ещё одно доказательство формулы (2), полученное И. Гессель с помощью метода трансфер-матрицы. Комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (1), использующее элементарные выкладки, предложено Д. Хикерсоном в работе [10]. Подсчёт горизонтально-выпуклых полимино с использованием техники частных производных рядов производящих функций многих переменных предложен в книге [3]. С горизонтально-выпуклыми полиамондами история немного затянулась. Тем не менее, в статье [4] доказана формула (6) и найдено несколько других рациональных производящих функций. Там же предложено комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (5). Нам известно комбинаторное доказательство соотношения (4), найденное школьником Гаем Шотландом.

Рассмотрим теперь однородные мозаики (рис. 2). Мы также можем рассмотреть связанные конечные подмножества этих мозаик. Назовём их мозаичными монстрами. По аналогии введём определения горизонтально-выпуклых мозаичных монстров. Оказывается, в этом случае можно определить соответствующие последовательности, которые будут удовлетворять рекуррентным соотношениям. Более того, преодолев технические сложности, удаётся вычислить несколько производящих функций для этих последовательностей.

В этой статье мы будем в основном использовать технику из книги [3], но, в отличие от книги, мы предпочитаем маркировать строки, а не столбцы. Иногда мы будем упрощать выкладки с помощью комбинаторных рассуждений, построив биекции между некоторыми множествами мозаичных монстров. Для одной из мозаик будет предложено комбинаторное доказательство соответствующего рекуррентного соотношения.

## § 2. МОЗАИКИ И ПРАВИЛЬНЫЕ ПАРКЕТЫ

*Мозаика* — это семейство  $\mathcal{T} = \{T_1, T_2, \dots\}$  замкнутых множеств  $T_i$  (элементов мозаики), покрывающих плоскость без существенных (имеющих ненулевую площадь) пробелов и перекрытий (см. [2]).

Мозаика называется *правильной*, если группа симметрии мозаики действует транзитивно на флаги мозаики, где *флаг* — это тройка, состоящая из взаимно смежных вершин, рёбер и плиток мозаики. Это означает, что для любой пары флагов существует операция симметрии, переводящая первый флаг во второй, что эквивалентно мозаике соединённых ребро к ребру конгруэнтных правильных многоугольников. Получаем, что в каждой вершине должно быть или шесть правильных треугольников или четыре квадрата или три правильных шестиугольника.

*Паркетом* называется покрытие плоскости правильными многоугольниками, при котором два многоугольника не имеют общих внутренних точек. Паркет называется *правильным*, если его можно наложить на себя так, что любая заданная его вершина наложится на любую другую наперёд заданную вершину (и каждый многоугольник паркета целиком наложится на некоторый многоугольник паркета).

Всего имеется 11 правильных<sup>1)</sup> паркетов (см., например, [8]). Они соответствуют трём правильным и восьми однородным мозаикам и изображены на рис. 1 и 2.

Для обозначения паркетов мы используем наборы чисел, указывающих на состав правильных многоугольников в вершине паркета.

*Вершинная транзитивность* означает, что для любой пары вершин существует параллельный перенос или симметрия, отображающая первую вершину во вторую. Если требование транзитивности флагов ослаблено до транзитивности вершин, но условие соединения плиток «ребро к ребру» сохраняется, то существует восемь дополнительных мозаик, которые известны как *архимедовы*, *однородные* или *полуправильные*.

Пусть  $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$  — (конечное) семейство таких замкнутых множеств, что каждый элемент  $T_i$  мозаики ( $T_i$ ) конгруэнтен одному из множеств  $P_j$ . Тогда  $\mathcal{P}$  называется множеством *прототипных элементов* или *прототипов* мозаики  $\mathcal{T}$ , и говорят, что  $\mathcal{P}$  *реализуется* в виде мозаики  $\mathcal{T}$ . Если  $\mathcal{P}$  содержит ровно  $k$  различных фигур и все эти фигуры используются в  $\mathcal{T}$ , то мозаика  $\mathcal{T}$  называется *k-эдрической*.

При  $k = 1$  мозаика называется *моноэдрической*. Примерами являются правильные мозаики.

<sup>1)</sup> Иногда такие паркетки называют полуправильными, но мы предпочитаем определение А. Н. Колмогорова.

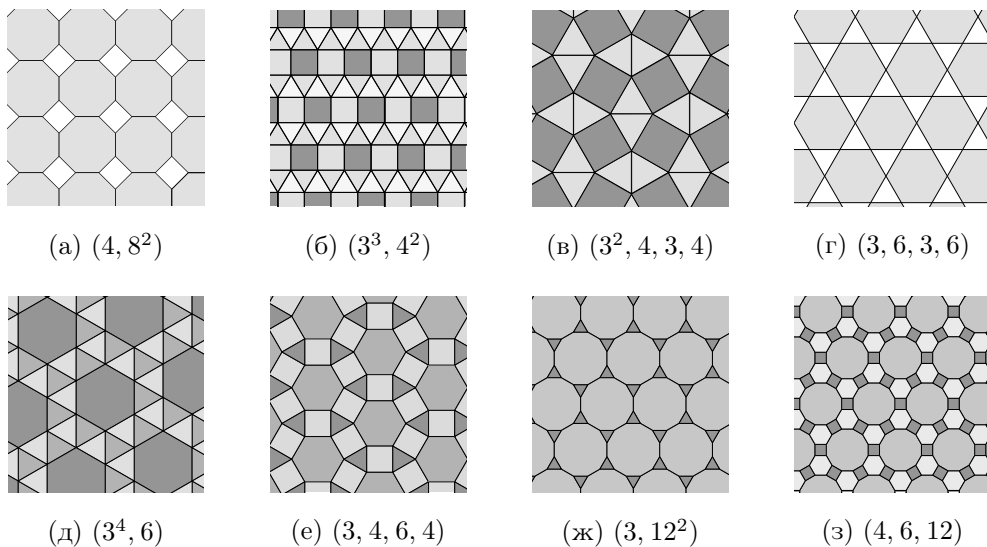


Рис. 2. Однородные мозаики

Однородные мозаики (рис. 2) были знакомы ещё Кеплеру. Они подразделяются на 2-эдрические и 3-эдрические. Одна из мозаик  $(3^4, 6)$  может иметь два зеркально-симметричных друг другу вида.

Для паркетов мы используем определения, предложенные А. Н. Колмогоровым в статье [6].

### § 3. ГОРИЗОНТАЛЬНО-ВЫПУКЛЫЕ, ШТАБЕЛЬНЫЕ, СЛОЁНЫЕ

В случае полимино или полиамондов недостаточно обычной геометрической связности составленной фигуры. Необходимо, чтобы каждый правильный многоугольник с длиной стороны 1 имел общую сторону с каким-нибудь другим правильным многоугольником с длиной стороны 1. В вышеупомянутой книге [1] С. Голомб отмечает, что поставленная на любую клетку полимино ладья сможет за конечное число ходов перейти на любую другую клетку того же полимино. Термин «ход ладьи» не является общепринятым для случая фигур, составленных из правильных треугольников и шестиугольников. В этой ситуации мы можем каждой такой фигуре сопоставить граф. Каждому правильному многоугольнику с длиной стороны 1 будет соответствовать вершина графа. Если два таких многоугольника имеют общую сторону, то соединим соответствующие им вершины ребром. Таким образом, требование связности составленной фигуры заменяется более сильным требованием связности соответствующего этой фигуре графа.

Если не будет оговорено иное, под связностью мы понимаем именно связность соответствующего конечного или бесконечного графа.

По-видимому первым, кто начал рассматривать трансляционные  $n$ -мино, составленные из горизонтальных полосок, был М. Иден<sup>2)</sup>. Поскольку по виду они напоминают штабеля досок, их можно было бы называть *штабельными  $n$ -мино*. Несколько позже Д. Кнут предложил называть штабельные  $n$ -мино *выпуклыми по строкам* или *горизонтально-выпуклыми*. *Выпуклыми* называют полимино, которые одновременно выпуклы по строкам и по столбцам. Отметим, что выпуклое полимино не обязано быть выпуклой геометрической фигурой.

В множестве трансляционных мозаичных монстров мы рассмотрим подмножество горизонтально-выпуклых. Для определения горизонтально-выпуклых мозаичных монстров нам понадобится разбить правильные паркеты на бесконечные слои. *Бесконечным слоем* мы считаем связное бесконечное подмножество паркета, переходящее в себя при некотором параллельном переносе. Слою соответствует некоторый бесконечный связный граф. С геометрической точки зрения толщина слоя нигде не равна 0.

Прямую, которая целиком принадлежит слою и пересекает каждый правильный многоугольник, принадлежащий слою, назовём *направляющей*. Отметим, что при таком определении **не** всякая горизонтальная прямая будет направляющей.

Количество и форма горизонтально-выпуклых мозаичных монстров у нас будет зависеть от разбиения паркета на слои. Иногда для удобства горизонтально-выпуклые мозаичные монстры мы будем называть слоёными мозаичными монстрами.

Итак, пусть у нас есть паркет с разбиением на бесконечные слои и каждый слой содержит хотя бы одну направляющую.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ.** Горизонтально-выпуклыми (слоёными) называются такие мозаичные монстры, что каждая направляющая либо не пересекает мозаичный монстр, либо пересекает его по отрезку или точке.

Наше определение согласуется с определениями для горизонтально-выпуклых полимино и горизонтально-выпуклых полиамондов. В этих случаях любая горизонтальная прямая будет направляющей какого-нибудь слоя. При определении горизонтально-выпуклых полигексов мы видим, что не всякая горизонтальная прямая пересекает горизонтально-выпуклый полигекс по отрезку. Однако прямая, проходящая через центры шестиугольников слоя, пересекает такой полигекс по отрезку, т. е. такую прямую можно рассматривать в качестве направляющей.

---

<sup>2)</sup> См. [5, с. 313–314].

Существует естественное отображение гексагонального паркета в кирпичную кладку (рис. 3а), см., например, [13].

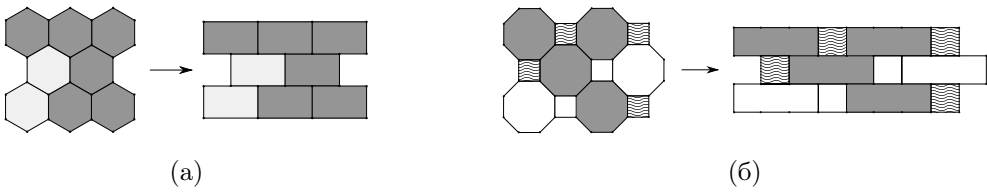


Рис. 3. Отображения паркетов в слоёную кладку из блоков

Очевидно, что любая горизонтальная прямая либо не пересекает образ горизонтально-выпуклого полигекса на кирпичной кладке, либо пересекает его по отрезку.

Перейдём теперь к примерам для паркетов. Выберем естественные разбиения паркетов на слои. Если это необходимо, повернём паркеты так, чтобы направляющие были горизонтальны.

Мозаичные монстры, располагающиеся на паркете рис. 2а, состоят из правильных восьмиугольников и квадратов. Для простоты будем называть такие монстры полиоктами. Как видим, паркет можно разбить на одинаковые бесконечные слои (рис. 4а). Как мы условились, на рисунке паркет повернут так, чтобы направляющие были горизонтальны.

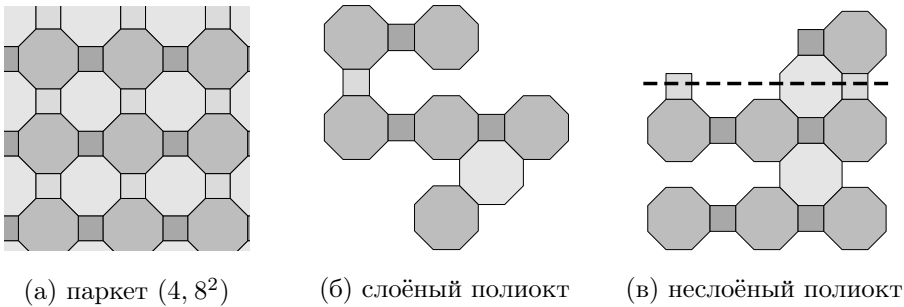


Рис. 4. Бесконечный паркет и конечные полиокты

Нетрудно видеть, что в каждом слое есть бесконечно много направляющих и в то же время есть горизонтальные прямые, не принадлежащие ни одному слою, т. е. не являющиеся направляющими. В качестве одной из направляющих можно рассматривать прямую, проходящую через центры всех квадратов и восьмиугольников слоя.

На рис. 4б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) полиокта. На рис. 4в приведён пример полиокта, не являющегося горизонтально-



выпуклым, поскольку существует направляющая, которая пересекает слой по двум отрезкам.

При таком разбиении паркета на слои мы можем построить отображение паркета  $(4, 8^2)$  в кладку из блоков (рис. 3б). В отличие от кирпичной кладки, в кладке из блоков мы имеем два типа блоков, а именно: квадратные блоки и блоки размером  $1 \times 3$ . В этой кладке квадратные блоки располагаются строго над (под) серединой блоков размером  $1 \times 3$ .

УПРАЖНЕНИЕ 1. Найдите другое такое разбиение паркета  $(4, 8^2)$  на бесконечные слои, что каждый слой содержит хотя бы одну направляющую.

Мозаичные монстры на паркете рис. 2б состоят из правильных треугольников и квадратов. Для простоты будем их называть политайлы<sup>3)</sup>. Как видим, паркет  $(3^3, 4^2)$  можно разбить на бесконечные слои (рис. 5а). При этом слои из квадратов чередуются со слоями из правильных треугольников. При таком разбиении на бесконечные слои любая горизонтальная прямая является направляющей некоторого слоя. На рис. 5б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета  $(3^3, 4^2)$ . На рис. 5в приведён пример политайла, не являющегося слоёным, поскольку существует направляющая, которая пересекает слой по двум отрезкам.

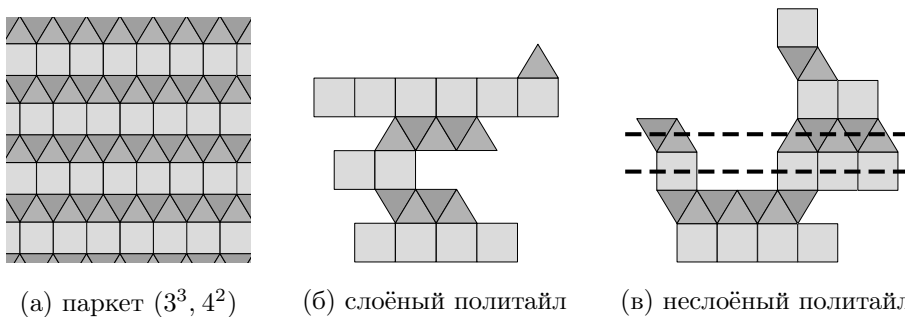


Рис. 5. Бесконечный паркет  $(3^3, 4^2)$  и конечные политайлы

УПРАЖНЕНИЕ 2. Найдите другие разбиения паркета  $(3^3, 4^2)$  на бесконечные слои, когда каждый слой содержит хотя бы одну направляющую, но не всякая горизонтальная прямая является направляющей.

Паркет  $(3, 4, 6, 4)$  можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 6а). Слои из квадратов и правильных шестиугольников чередуются со слоями из квадратов и правильных треугольников. На рис. 6б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета  $(3, 4, 6, 4)$ .

<sup>3)</sup> Англ. tile — плитка, кафель, мозаика.

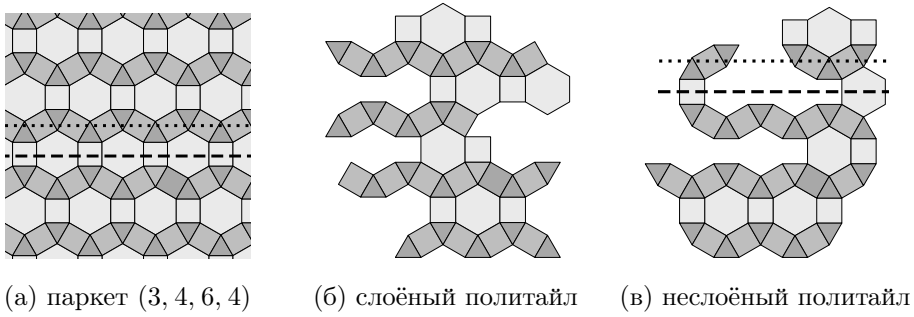


Рис. 6. Бесконечный паркет (3, 4, 6, 4) и конечные политайлы

Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 6в приведён пример политайла, не являющегося слоёным.

Паркет (4, 6, 12) можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 7а). Слои из квадратов и правильных двенадцатиугольников чередуются со слоями из квадратов и правильных шестиугольников. На рис. 7б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета (4, 6, 12). Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 7в приведён пример неслоёного политайла.

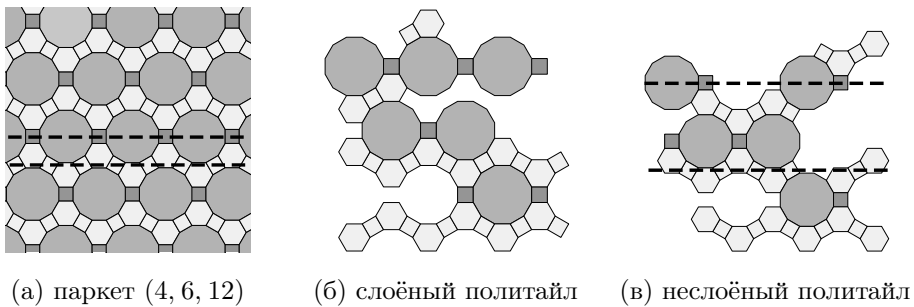


Рис. 7. Бесконечный паркет (4, 6, 12) и конечные политайлы

Паркет  $(3^2, 4, 3, 4)$  можно разбить на бесконечные слои (рис. 8а). На рис. 8б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политайла для паркета  $(3^2, 4, 3, 4)$ . Примерами направляющих служат прямые, проходящие через центры всех квадратов соответствующих слоёв. На рис. 8в приведён пример неслоёного политайла.

Паркет  $(3^4, 6)$  можно разбить на бесконечные слои двух видов (рис. 9а). Слои из правильных треугольников чередуются со слоями из правильных

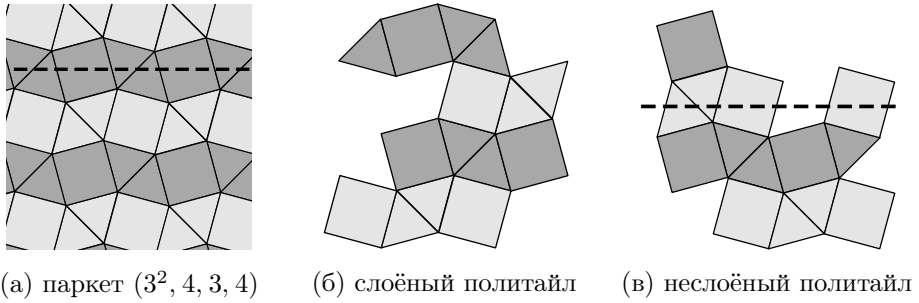


Рис. 8. Бесконечный паркет  $(3^2, 4, 3, 4)$  и конечные политаилы

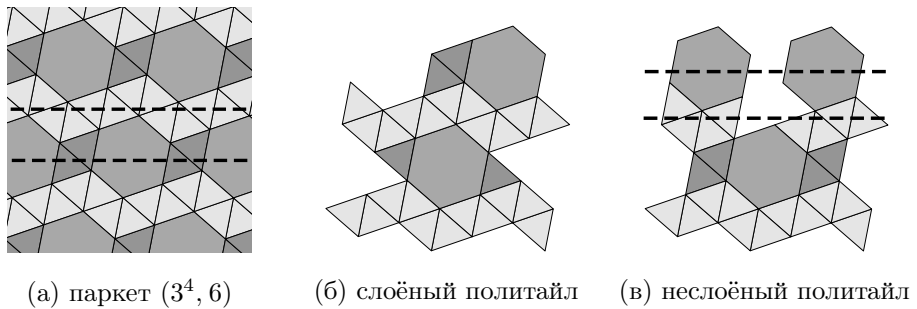


Рис. 9. Бесконечный паркет  $(3^4, 6)$  и конечные политаилы

треугольников и правильных шестиугольников. На рис. 9б приведён пример горизонтально-выпуклого (слоёного) политаила для паркета  $(3^4, 6)$ . На рис. 9в приведён пример неслоёного политаила.

Паркет  $(3, 6, 3, 6)$  можно разбить на одинаковые бесконечные слои (см. рис. 10а). Каждому слою принадлежит только одна направляющая. Однако в этом случае определение горизонтально-выпуклых мозаичных монстров потребует дополнительных оговорок. Предоставим читателям возможность самим поразмышлять над этим случаем.

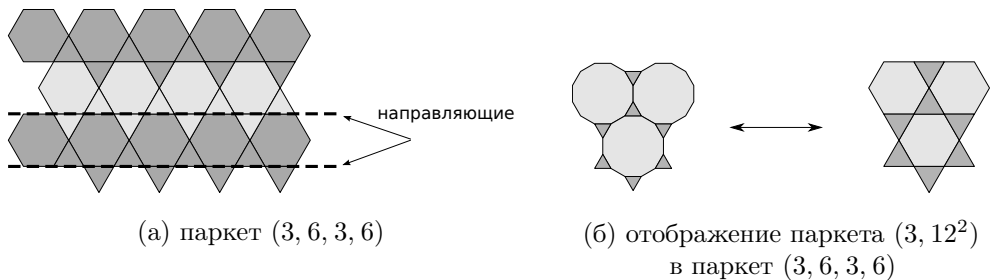


Рис. 10. Паркеты  $(3, 6, 3, 6)$  и  $(3, 12^2)$

Остался неохваченным паркет  $(3, 12^2)$ . Этот паркет, конечно же, можно разбить на слои. Но нельзя найти направляющие в каждом слое, т. е. прямые, которые лежали бы в слое и пересекали каждый многоугольник из слоя. На первый взгляд, получается, что построение горизонтально-выпуклых мозаичных монстров этого паркета невозможно. С другой стороны, существует взаимно однозначное соответствие между мозаичными монстрами паркета  $(3, 12^2)$  и паркета  $(3, 6, 3, 6)$  (рис. 10б). Таким образом, задачу про горизонтально-выпуклые мозаичные монстры для паркета  $(3, 12^2)$  мы, с некоторыми оговорками, можем считать эквивалентной задаче про горизонтально-выпуклые мозаичные монстры для паркета  $(3, 6, 3, 6)$ .

#### § 4. РЕКУРРЕНТНОЕ СООТНОШЕНИЕ ДЛЯ ПАРКЕТА $(4, 8^2)$ . КОМБИНАТОРНОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

В этом параграфе мы предложим комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения для горизонтально-выпуклых полиоктов.

Хотим обратить внимание, что комбинаторные доказательства доступны школьникам. Более того, при правильной постановке задачи они даже могут быть найдены школьниками. Так произошло с комбинаторным доказательством рекуррентного соотношения (4) для горизонтально-выпуклых полигексов. Школьнику Гаю Шотланду было сообщено об имеющихся комбинаторных доказательствах формул (1) и (5) и поставлена задача нахождения комбинаторного доказательства для полигексов. Он успешно справился с этой задачей и сделал доклад на 27-й Европейской конференции молодых учёных<sup>4)</sup> в Италии в 2015 г. Предлагаем читателям самостоятельно найти это доказательство (см. упражнение в конце этого параграфа).

Однако вернёмся к полиоктам.

Пусть множество  $G$  состоит из всех горизонтально-выпуклых полиоктов, а его подмножество  $G_n$  — из тех из них, которые состоят из  $n$  правильных многоугольников (квадратов и восьмиугольников). Положим  $g_n = |G_n|$ .

**ТЕОРЕМА 1.** *Для  $n \geq 6$  выполняется рекуррентное соотношение*

$$g_n = 5g_{n-1} - 3g_{n-2} - 5g_{n-3} + 7g_{n-4} - g_{n-5}. \quad (7)$$

Предлагаемое комбинаторное доказательство теоремы состоит из ряда лемм, которые связывают рекуррентными соотношениями количества полиоктов в определённых подмножествах и фактически устанавливают взаимно однозначное соответствие между несколькими подмножествами полиоктов. Вывод итогового соотношения представляет собой техническое упражнение.

<sup>4)</sup> 27 European Union Contest for Young Scientists, 17–22 September 2015 — Milan, Italy.

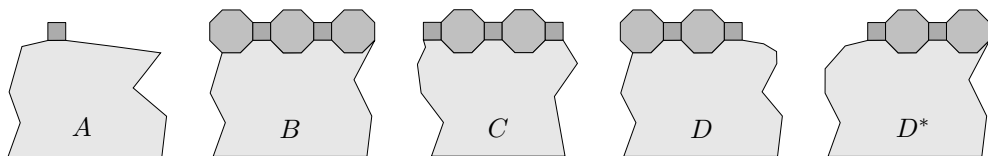


Рис. 11. Множества полиоктов в зависимости от вида верхнего слоя

Разобьём горизонтально-выпуклые полиокты на множества  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $D^*$  в зависимости от формы их верхнего слоя (рис. 11):

- а) если верхний слой состоит только из одного квадрата, то отнесём полиокт к множеству  $A$ ;
- б) если в верхнем слое количество восьмиугольников на единицу больше чем квадратов, то отнесём полиокт к множеству  $B$ ;
- в) если верхний слой содержит хотя бы один восьмиугольник и количество восьмиугольников на единицу меньше, чем квадратов, то отнесём полиокт к множеству  $C$ ;
- г) если в верхнем слое восьмиугольников и квадратов поровну, то отнесём полиокт к множествам  $D$  или  $D^*$ , если первая фигура справа квадрат или восьмиугольник соответственно.

К множеству  $H$  отнесём полиокты, которые в верхнем слое содержат хотя бы один восьмиугольник, т. е. множество  $H$  является объединением множеств  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $D^*$ . Множество  $G$  является объединением множеств  $A$  и  $H$ .

Через  $A_n$ ,  $B_n$ ,  $C_n$ ,  $D_n$ ,  $D_n^*$  и  $H_n$  обозначим подмножества множеств  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $D^*$  и  $H$ , в которых полиокты состоят из  $n$  правильных многоугольников. Положим  $a_n = |A_n|$ ,  $b_n = |B_n|$ ,  $c_n = |C_n|$ ,  $d_n = |D_n|$ ,  $d_n^* = |D_n^*|$  и  $h_n = |H_n|$ .

По соображениям симметрии, полиоктов в множестве  $D_n$  ровно столько же, сколько в множестве  $D_n^*$ . Следовательно, для любого  $n$  выполнено  $d_n = d_n^*$ . Из наших определений следует, что

$$h_n = b_n + c_n + d_n + d_n^* = b_n + c_n + 2d_n, \quad (8)$$

$$g_n = a_n + b_n + c_n + d_n + d_n^* = a_n + h_n. \quad (9)$$

Предварительно докажем несколько лемм.

ЛЕММА 1. Для  $n \geq 2$  выполняются соотношения

$$\text{а) } d_n = b_{n-1}, \quad \text{б) } c_n = d_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если мы добавим квадрат справа в верхний слой полиокта из множества  $B$ , то получим полиокт из множества  $D$ . Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества  $D$ , удаляя правый квадрат из верхнего слоя, мы получим полиокт из множества  $B$  (рис. 12).

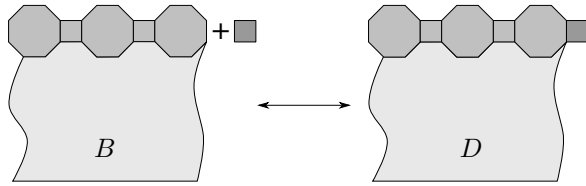


Рис. 12. Соответствие между множествами  $B$  и  $D$

б) Проведём аналогичные рассуждения, только манипуляции выполним с квадратом с левой стороны верхнего слоя. Получим, что для  $n \geq 2$  выполняются соотношения  $c_n = d_{n-1}$ .  $\square$

Учитывая результат леммы 1, для  $n \geq 3$  перепишем (8) в виде

$$h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}. \tag{10}$$

Далее используем отображение паркета  $(4, 8^2)$  в кладку из блоков, см. рис. 36. Восьмиугольники на рисунках и в тексте будут заменены блоками размером  $1 \times 3$ , которые мы будем называть *кирпичами*.

Рассмотрим ещё несколько подмножеств слоёных полиоктов.

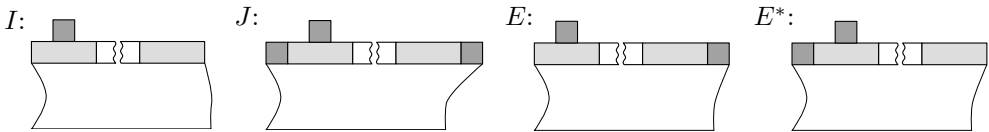


Рис. 13. Подмножества полиоктов из множества  $A$

В множестве  $A$  определим подмножества горизонтально-выпуклых полиоктов  $I, J, E$  и  $E^*$  в зависимости от формы их второго сверху слоя (рис. 13):

- а) если во втором сверху слое полиокта количество кирпичей (восьмиугольников) на единицу больше, чем квадратов, то отнесём его к множеству  $I$ ;
- б) если второй сверху слой содержит хотя бы один кирпич и количество кирпичей на единицу меньше, чем квадратов, то отнесём его к множеству  $J$ ;
- в) если второй сверху слой содержит кирпичей и квадратов поровну, то отнесём его к множествам  $E$  или  $E^*$ , если первая фигура справа квадрат или кирпич соответственно.

Через  $I_n, J_n, E_n, E_n^*$  обозначим подмножества множеств  $I, J, E, E^*$ , полиокты которых состоят из  $n$  элементов паркета (т. е. квадратов и кирпичей). Положим  $i_n = |I_n|, j_n = |J_n|, e_n = |E_n|, e_n^* = |E_n^*|$ .

Соображения симметрии опять показывают, что количество полиоктов в множестве  $E_n$  такое же, как в множестве  $E_n^*$ . Следовательно, для любого  $n$  выполнено равенство  $e_n = e_n^*$ .

Множество  $A$  является объединением непересекающихся подмножеств  $I$ ,  $J$ ,  $E$  и  $E^*$ . Следовательно, для  $n \geq 2$

$$a_n = i_n + j_n + e_n + e_n^* = i_n + j_n + 2e_n. \quad (11)$$

ЛЕММА 2. Для  $n \geq 2$  выполняются соотношения

$$\text{а) } e_n = i_{n-1}, \quad \text{б) } j_n = e_{n-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если мы добавим квадрат справа во второй сверху слой полиокта из множества  $I$ , то получим полиокт из множества  $E$ . Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества  $E$ , удаляя правый квадрат из второго сверху слоя, мы получим полиокт из множества  $I$  (рис. 14). Следовательно, для  $n \geq 2$  выполнено равенство  $e_n = i_{n-1}$ .

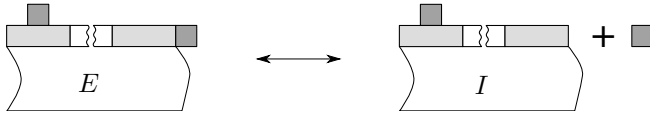


Рис. 14. Соответствие между множествами  $E_n$  и  $I_{n-1}$

б) Проведём аналогичные рассуждения, только манипуляции выполним с квадратом с левой стороны второго сверху слоя. Получим, что для  $n \geq 2$  выполнено равенство  $j_n = e_{n-1}$ .  $\square$

Учитывая результат леммы 2, перепишем (11) для  $n \geq 3$  в виде

$$a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}. \quad (12)$$

Наконец, нам понадобятся ещё три подмножества горизонтально-выпуклых полиоктов (см. рис. 15).

К множеству  $P$  отнесём полиокты из множества  $B$ , у которых крайний правый кирпич верхнего слоя расположен над самым левым элементом паркета (т. е. квадратом или кирпичом) второго слоя.

К множеству  $Q$  отнесём те полиокты из  $I$ , у которых квадрат из верхней строки не расположен над самым правым кирпичом второй строки.

К множеству  $R$  отнесём те полиокты из  $Q$ , у которых крайний правый кирпич второго сверху слоя расположен над самым левым элементом паркета третьего сверху слоя. Таким образом, полиокты из множества  $R$  состоят не менее чем из трёх слоёв.

На рис. 15 крестиком обозначена позиция, запрещённая для расположения квадрата.

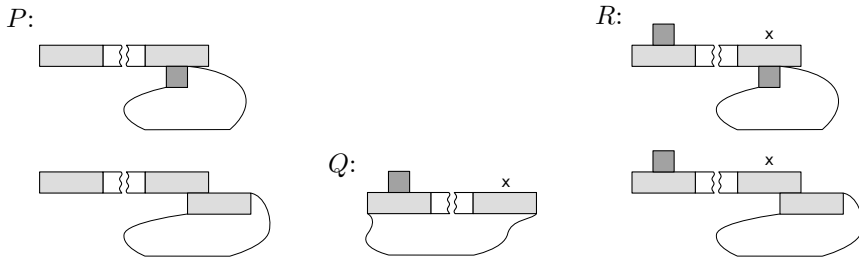


Рис. 15. Дополнительные подмножества

Через  $P_n, Q_n, R_n$  обозначим подмножества множеств  $P, Q, R$ , полиокты которых состоят из  $n$  элементов паркета. Положим  $p_n = |P_n|, q_n = |Q_n|, r_n = |R_n|$ .

ЛЕММА 3. Для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $p_n = p_{n-2} + q_{n-1}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если верхний слой полиокта из множества  $P_n$  состоит из не менее чем трёх элементов паркета, то уберём из него слева кирпич и квадрат и получим полиокт из множества  $P_{n-2}$  (рис. 16). В случае когда в верхнем слое полиокта из множества  $P_n$  только один кирпич, этот кирпич расположен строго над крайним левым элементом паркета второго слоя. Удаляя этот кирпич, получаем полиокт из множества  $G_{n-1}$ . Эта процедура обратима. Следовательно, для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $p_n = p_{n-2} + q_{n-1}$ .  $\square$

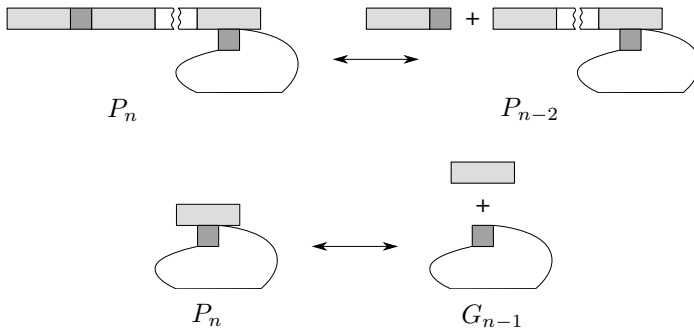


Рис. 16. К лемме 3

ЛЕММА 4. Для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $i_n = q_n + b_{n-1}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В полиоктах из множества  $I_n \setminus Q_n$  единственный квадрат верхнего слоя расположен на самом правом кирпиче второго слоя. Если мы уберём этот квадрат, то получим полиокт из множества  $B_{n-1}$  (рис. 17). Эта процедура обратима, и из каждого полиокта из множества  $B_{n-1}$ , добавляя квадрат сверху на самый правый кирпич верхнего слоя,



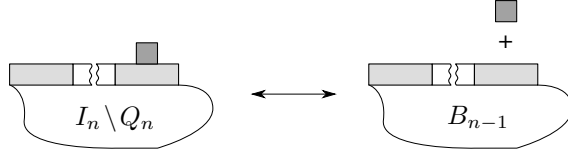


Рис. 17. К лемме 4

получим полиокт из множества  $I_n \setminus Q_n$ . Поэтому для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $i_n - q_n = b_{n-1}$ .  $\square$

ЛЕММА 5. Для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $q_n = r_n + i_{n-2}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Множество  $Q_n \setminus R_n$  состоит из полиоктов, у которых можно вырезать квадрат и кирпич справа из второго слоя; при этом мы получим полиокт из множества  $I_{n-2}$  (рис. 18). Эта процедура обратима, и из каждого слоёного полиокта из множества  $I_{n-2}$ , добавляя квадрат и кирпич справа во второй сверху слой, получим слоённый полиокт из множества  $Q_n \setminus R_n$ . Следовательно, для  $n \geq 3$  выполнено равенство  $q_n - r_n = i_{n-2}$ .  $\square$

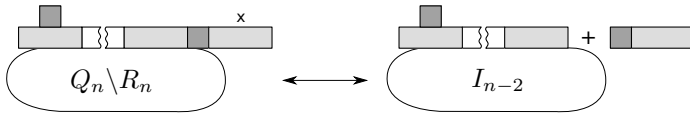


Рис. 18. К лемме 5

ЛЕММА 6. Для  $n \geq 4$  выполнено равенство  $r_n = r_{n-2} + p_{n-3}$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если квадрат из первого слоя полиокта из множества  $R_n$  находится в точности над самым левым кирпичом, то уберём из полиокта квадрат верхнего слоя и слева из второго слоя кирпич и квадрат. Получим полиокт из множества  $P_{n-3}$ . В случае когда квадрат в верхнем

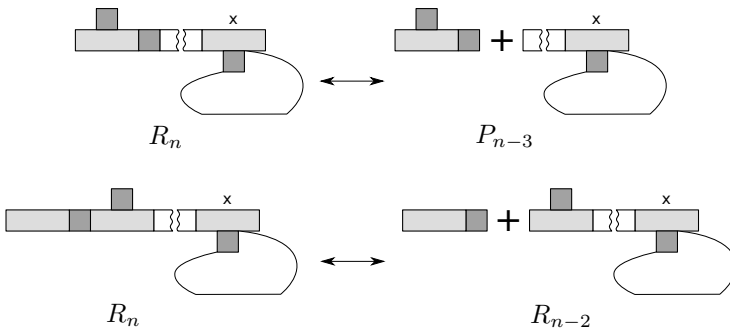
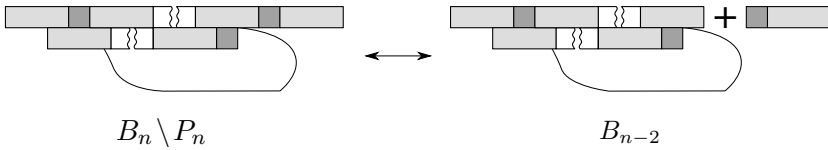


Рис. 19. К лемме 6

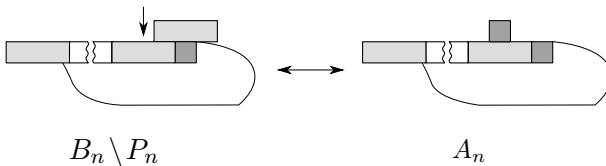
слое полиокта не находится над самым левым кирпичом второго слоя, уберём из полиокта слева из второго слоя кирпич и квадрат. Получим полиокт из множества  $R_{n-2}$  (рис. 19). Эта процедура обратима. Следовательно, для  $n \geq 4$  выполнено равенство  $r_n = r_{n-2} + p_{n-3}$ .  $\square$

ЛЕММА 7. Для  $n \geq 4$  выполнено равенство  $b_n = p_n + b_{n-2} + a_n$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как следует из определения, в самом верхнем слое полиокта из множества  $B$  содержится нечётное число элементов паркета. Рассмотрим полиокты из множества  $B_n \setminus P_n$ . Если в самом верхнем слое полиокта содержится три или более элементов, то, вырезав квадрат и кирпич справа из верхнего слоя, получим полиокт из множества  $B_{n-2}$  (рис. 20а). Эта операция обратима, т. е. всегда к полиокту из множества  $B_{n-2}$  можно добавить в верхний слой квадрат и кирпич.



(а) Верхний слой содержит три и более элементов



(б) верхний слой содержит только один кирпич

Рис. 20. К лемме 7

Пусть верхний слой полиокта из множества  $B_n \setminus P_n$  состоит только из одного кирпича. Поскольку этот полиокт не принадлежит множеству  $P_n$ , заменив самый верхний кирпич на квадрат, расположенный левее, мы получим полиокт из множества  $A_n$  (рис. 20б). Таким образом, у нас есть взаимно однозначное соответствие между полиоктами из множества  $A_n$  и полиоктами из множества  $B_n \setminus P_n$ , у которых верхний слой состоит только из одного кирпича. Понятно, что количество таких полиоктов равняется  $a_n$ .

Следовательно, для  $n \geq 4$  выполнено  $b_n - p_n = b_{n-2} + a_n$ , что и требовалось.  $\square$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. *Первый способ.* Сведём полученные рекуррентные соотношения вместе:

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_n = a_n + h_n, & \text{из (9)} \\ h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}, & \text{из (10)} \\ a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}, & \text{из (12)} \\ p_n = p_{n-2} + g_{n-1}, & \text{из леммы 3} \\ i_n = q_n + b_{n-1}, & \text{из леммы 4} \\ q_n = r_n + i_{n-2}, & \text{из леммы 5} \\ r_n = r_{n-2} + p_{n-3}, & \text{из леммы 6} \\ b_n = p_n + b_{n-2} + a_n, & \text{из леммы 7} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} g_n = a_n + h_n, \\ h_n = b_n + 2b_{n-1} + b_{n-2}, \\ a_n = i_n + 2i_{n-1} + i_{n-2}, \\ p_n - p_{n-2} = g_{n-1}, \\ i_n - i_{n-2} = r_n + b_{n-1}, \\ r_n - r_{n-2} = p_{n-3}, \\ b_n - b_{n-2} = p_n + a_n. \end{array} \right.$$

Получим из них некоторые другие рекуррентные соотношения.

Имеем для  $n \geq 4$ :

$$h_n - h_{n-1} = p_n + a_n + p_{n-1} + a_{n-1}.$$

Следовательно,  $g_n - g_{n-1} = 2a_n + p_n + p_{n-1}$ . Тогда

$$g_n - g_{n-1} - (g_{n-1} - g_{n-2}) = 2a_n - 2a_{n-1} + g_{n-1}.$$

Получаем для  $n \geq 4$

$$g_n - 3g_{n-1} + g_{n-2} = 2a_n - 2a_{n-1}. \quad (13)$$

С другой стороны,  $a_n - a_{n-1} = r_n + b_{n-1} + r_{n-1} + b_{n-2}$ . Тогда для  $n \geq 5$

$$a_n - a_{n-1} - (a_{n-2} - a_{n-3}) = p_{n-3} + p_{n-4} + p_{n-1} + a_{n-1} + p_{n-2} + a_{n-2}.$$

Следовательно,

$$a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} = p_{n-1} + p_{n-2} + p_{n-3} + p_{n-4}.$$

Далее,

$$\begin{aligned} a_n - 2a_{n-1} - 2a_{n-2} + a_{n-3} - (a_{n-1} - 2a_{n-2} - 2a_{n-3} + a_{n-4}) &= \\ &= p_{n-1} - p_{n-3} + p_{n-3} - p_{n-5} = g_{n-2} + g_{n-4}. \end{aligned}$$

Тогда  $g_{n-2} + g_{n-4} = a_n - 3a_{n-1} + 3a_{n-3} - a_{n-4}$ . Преобразуем правую часть последнего соотношения и используем (13). Получаем для  $n \geq 6$ :

$$\begin{aligned} g_{n-2} + g_{n-4} &= a_n - a_{n-1} - 2(a_{n-1} - a_{n-2}) - 2(a_{n-2} - a_{n-3}) + a_{n-3} - a_{n-4} = \\ &= \frac{g_n - 3g_{n-1} + g_{n-2}}{2} - (g_{n-1} - 3g_{n-2} + g_{n-3}) - \\ &\quad - (g_{n-2} - 3g_{n-3} + g_{n-4}) + \frac{g_{n-3} - 3g_{n-4} + g_{n-5}}{2} = \\ &= \frac{g_n - 5g_{n-1} + 5g_{n-2} + 5g_{n-3} - 5g_{n-4} + g_{n-5}}{2}. \end{aligned}$$

Значит,  $2g_{n-2} + 2g_{n-4} = g_n - 5g_{n-1} + 5g_{n-2} + 5g_{n-3} - 5g_{n-4} + g_{n-5}$ . В итоге имеем  $g_n = 5g_{n-1} - 3g_{n-2} - 5g_{n-3} + 7g_{n-4} - g_{n-5}$ . Теорема 1 доказана.  $\square$

В таблице 1 собраны начальные значения рассмотренных последовательностей.

Таблица 1

Первые члены последовательностей из теоремы 1

$n$	$a$	$b$	$c$	$d$	$i$	$j$	$e$	$p$	$q$	$r$	$h$	$g$
1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2
2	1	3	0	1	1	0	0	2	0	0	5	6
3	5	12	1	3	3	0	1	6	0	0	19	24
4	20	49	3	12	13	1	3	26	1	0	76	96
5	83	197	12	49	54	3	13	102	5	2	307	390
6	337	802	49	197	216	13	54	416	19	6	1245	1582
7	1370	3251	197	802	884	54	216	1684	82	28	5052	6422
8	5559	13 199	802	3251	3575	216	884	6838	324	108	20 503	26 062
9	22 561	53 558	3251	13 199	14 527	884	3575	27 746	1328	444	83 207	105 768

УПРАЖНЕНИЕ 3. Используя стратегию доказательства теоремы 1, найдите комбинаторное доказательство формулы (4) для количества горизонтально-выпуклых полигексов.

### § 5. О ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЯХ

В этом и следующих разделах мы будем рассматривать формальные степенные ряды от одной или нескольких переменных, не вдаваясь в вопросы их сходимости. Операции сложения, умножения, дифференцирования рядов мы рассматриваем как соответствующие операции над формальными степенными рядами. Решения упражнений и часть выкладок опущены; они приведены в электронной версии статьи

[https://www.mcsme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22\\_poly.pdf](https://www.mcsme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf)

УПРАЖНЕНИЕ 4. Докажите формулы для сумм бесконечных геометрических прогрессий

$$а) \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \frac{v}{1-v}, \quad б) (2+2u) \sum_{k=1}^{\infty} u^{2k} = \frac{2u^2}{1-u}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 5. Используя интегрирование и дифференцирование формальных рядов, докажите, что

$$\text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)v^k = \frac{v^2}{(1-v)^2}, \quad \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} kv^k = \frac{v}{(1-v)^2}, \quad \text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1)v^k = \frac{2v^2}{(1-v)^3}.$$

УПРАЖНЕНИЕ 6. Используя результаты упражнений 4 и 5, докажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} ku^k v^{k-1} &= \frac{u}{(1-uv)^2}, & \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} (kv+1)u^k v^{k-1} &= \frac{u+uv-u^2v}{(1-uv)^2}, \\ \text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} k^2 u^k v^{k-1} &= \frac{u+u^2v}{(1-uv)^3}, & \text{г) } \sum_{k=1}^{\infty} k(kv+1)u^k v^{k-1} &= \frac{u(1+v-uv+uv^2)}{(1-uv)^3}. \end{aligned}$$

УПРАЖНЕНИЕ 7. Докажите, что

$$\begin{aligned} \text{а) } \sum_{k=1}^{\infty} (ku + (2+u)(k-1))u^{2k} &= \frac{u^3}{(1-u)^2}, \\ \text{б) } \sum_{k=1}^{\infty} (u + 2k + 2uk)u^{2k} &= \frac{u^2(2-u)}{(1-u)^2}, \\ \text{в) } \sum_{k=1}^{\infty} (k^2u + (k-1)(2k+u(k+1)))u^{2k} &= \frac{u^3(1+2u-u^2)}{(1+u)(1-u)^3}. \end{aligned}$$

Пусть

$$H(u, v, y) = \sum_{p, q, m} h(p, q, m) u^p v^q y^m$$

— некоторая производящая функция от трёх переменных. Для значения частной производной по  $y$  степенного ряда  $H(u, v, y)$  при  $y = 1$  введём обозначение

$$\chi(u, v) = \left. \frac{\partial}{\partial y} H(u, v, y) \right|_{y=1}.$$

При почленном дифференцировании формального ряда получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial}{\partial y} (y^k H(u, v, y)) \right|_{y=1} &= \left( \frac{\partial}{\partial y} \left( \sum_{p, q, m} h(p, q, m) u^p v^q y^{m+k} \right) \right) \Big|_{y=1} = \\ &= \sum_{p, q, m} (m+k) h(p, q, m) u^p v^q = \sum_{p, q} \left( \sum_m (m+k) h(p, q, m) \right) u^p v^q, \end{aligned}$$

для всех целых  $k \geq 0$ .

По формуле для производной произведения функций получим

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^k H(u, v, y))\Big|_{y=1} = kH(u, v, 1) + \chi(u, v).$$

Следовательно, для всех целых  $k \geq 0$

$$kH(u, v, 1) + \chi(u, v) = \sum_{p,q} \left( \sum_m (m+k)h(p, q, m) \right) u^p v^q. \quad (14)$$

В частности, при  $k = 0$

$$\chi(u, v) = \sum_{p,q} \left( \sum_m mh(p, q, m) \right) u^p v^q. \quad (15)$$

В двух следующих параграфах мы применим найденные соотношения.

### § 6. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПАРКЕТА $(4, 8^2)$

*ТЕОРЕМА 2. Производящими функциями для множеств горизонтально-выпуклых (слоёных) полиоктов будут рациональные функции*

$$G(u, v, 1) = (1 - uv)^3(u + v + 2uv) \cdot (1 - 2u - 9uv + 4u^2v - 4uv^2 - u^3v + 14u^2v^2 - uv^3 - 6u^3v^2 + 4u^2v^3 - 13u^3v^3 - 4u^3v^4 + u^4v^4)^{-1}$$

*и*

$$G(x) = \sum_n g_n x^n = \frac{2x(1-x)^3(1+x)}{1-5x+3x^2+5x^3-7x^4+x^5},$$

где переменная  $u$  маркирует количество восьмиугольников,  $v$  — количество квадратов,  $x$  — общее количество правильных многоугольников.

Для доказательства теоремы потребуется детализация полиоктов по количеству составляющих их восьмиугольников и квадратов. Более того, для нас будет важно, сколько восьмиугольников расположено в самом верхнем слое полиокта.

Определим множества слоёных полиоктов  $A, B, C, D, D^*, H$  и  $G$  как в § 4.

Пусть  $a(p, q, 0), b(p, q, m), c(p, q, m), d(p, q, m), d^*(p, q, m), h(p, q, m)$  — количества таких полиоктов из множеств  $A, B, C, D, D^*, H$  соответственно, которые состоят из  $p$  восьмиугольников и  $q$  квадратов, а верхний слой которых содержит  $m$  восьмиугольников.

Отметим, что самый верхний слой полиокта из  $B$  содержит  $m$  восьмиугольников и  $m - 1$  квадратов,  $m \geq 1$ . В самом верхнем слое полиокта из  $C$

содержится  $m$  восьмиугольников и  $m + 1$  квадрат,  $m \geq 1$ . В самом верхнем слое полиоктов из множеств  $D$  и  $D^*$  содержится  $m$  восьмиугольников и  $m$  квадратов,  $m \geq 1$ . Из соображений симметрии можно заключить, что полиоктов в множестве  $D$  столько же, сколько и в множестве  $D^*$ , при этом  $d(p, q, m) = d^*(p, q, m)$ . Следовательно, производящие функции множеств  $D$  и  $D^*$  равны.

Рассмотрим производящие функции от трёх переменных. Считаем, что переменная  $u$  маркирует количество восьмиугольников,  $v$  — количество квадратов, а  $y$  — количество восьмиугольников в верхнем слое.

Производящие функции для полиоктов типов  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  и  $D^*$ :

$$\begin{aligned} A(u, v, y) &= \sum_{p, q} a(p, q, 0) u^p v^q, \\ B(u, v, y) &= \sum_{p, q, m} b(p, q, m) u^p v^q y^m, \\ C(u, v, y) &= \sum_{p, q, m} c(p, q, m) u^p v^q y^m, \\ D(u, v, y) &= D^*(u, v, y) = \sum_{p, q, m} d(p, q, m) u^p v^q y^m. \end{aligned}$$

Заметим, что  $A(u, v, y)$  не зависит от  $y$ , поэтому  $A(u, v, y) = A(u, v, 1)$  и

$$\frac{\partial}{\partial y} A(u, v, y) = 0.$$

ЛЕММА 8. Для всех  $p \geq 1$ ,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 1$  выполняется равенство

$$b(p, q, m) = d(p, q + 1, m) = c(p, q + 2, m).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет доказательство леммы 1 (рис. 12).  $\square$

Из леммы 8 получаем следующие равенства для производящих функций:

$$D(u, v, y) = vB(u, v, y), \quad C(u, v, y) = v^2B(u, v, y).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} H(u, v, y) &= B(u, v, y) + C(u, v, y) + D(u, v, y) + D^*(u, v, y) = \\ &= (1 + 2v + v^2)B(u, v, y), \end{aligned} \quad (16)$$

$$G(u, v, y) = A(u, v, y) + H(u, v, y) = A(u, v, y) + (1 + 2v + v^2)B(u, v, y).$$

Отметим, что для доказательства теоремы 2 не требуется находить функцию от трёх переменных  $G(u, v, y)$ . Достаточно найти её выражение при  $y = 1$ , т. е. найти  $G(u, v, 1)$ .

Как и прежде, используем обозначение

$$\chi(u, v) = \left. \frac{\partial}{\partial y} H(u, v, y) \right|_{y=1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Мы получим рекуррентные соотношения на коэффициенты  $a(p, q, m)$ ,  $b(p, q, m)$ ,  $h(p, q, m)$  и затем составим соотношения для производящих функций.

Посмотрим, как получаются полиокты из  $A$ . Возьмём квадрат и начнём прикладывать его сверху к некоторому полиокту (назовём его исходным) так, чтобы получился новый полиокт. Мы не сможем проделать такую операцию, если исходный полиокт был из  $A$ . Если исходный полиокт из  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  восьмиугольников, то такую операцию можно проделать  $m$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиокты подмножества  $A$ , кроме собственно квадрата. Следовательно, для всех  $p, q$  выполняются равенства

$$a(p, q + 1, 0) = \sum_m mh(p, q, m).$$

Для квадрата имеем  $a(0, 1, 0) = 1$ .

Получаем соотношение для производящих функций

$$A(u, v, y) = v + v \left( \left. \frac{\partial H(u, v, y)}{\partial y} \right) \right|_{y=1} = v + v\chi(u, v). \quad (17)$$

Действительно, вспоминая (15), получаем

$$\begin{aligned} v + v\chi(u, v) &= v + \sum_{p,q} \left( \sum_m mh(p, q, m) \right) u^p v^{q+1} = \\ &= v + \sum_{p,q} a(p, q + 1, 0) u^p v^{q+1} = A(u, v, y). \end{aligned}$$

Посмотрим, как получаются полиокты из  $B$ . Возьмём полиокт из  $B$  с одной строкой, состоящий из  $k$  восьмиугольников и  $k - 1$  квадрата, и начнём прикладывать его сверху к некоторому исходному полиокту так, чтобы получился новый полиокт. Если исходный полиокт был из  $A$ , то такую операцию можно проделать  $k$  способами. Если исходный полиокт из  $H$  и в его верхней строке содержится  $m$  восьмиугольников, то такую операцию можно проделать  $m + k$  способами. Заметим, что таким образом мы можем получить все полиокты подмножества  $B$ , кроме тех, которые состоят из одной строки. Следовательно, для всех  $p, q$  выполняются равенства

$$b(p + k, q + k - 1, k) = ka(p, q, 0) + \sum_m (m + k) h(p, q, m).$$



Для полиоктов подмножества  $B$ , состоящих из одной строки, получаем  $b(k, k-1, k) = 1$ .

Используя равенства (14)–(17), можно вывести искомые формулы для производящих функций. Полное доказательство приводится на [https://www.mcsme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22\\_poly.pdf](https://www.mcsme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf)  $\square$

При помощи онлайн-калькулятора (например, [17]) нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от двух переменных:

$$\begin{aligned} A(u, v, 1) &= v + uv + 2u^2v + 3uv^2 + 4u^3v + 13u^2v^2 + 3uv^3 + \\ &\quad + 8u^4v + 41u^3v^2 + 33u^2v^3 + uv^4 + \dots \\ G(u, v, 1) &= u + v + 2u^2 + 4uv + 4u^3 + 14u^2v + 6uv^2 + \\ &\quad + 8u^4 + 42u^3v + 42u^2v^2 + 4uv^3 + \\ &\quad + 16u^5 + 113u^4v + 192u^3v^2 + 68u^2v^3 + uv^4 + \dots \end{aligned}$$

Аналогично получаем разложение в ряд производящих функций от одной переменной:

$$\begin{aligned} A(x) &= x + x^2 + 5x^3 + 20x^4 + 83x^5 + 337x^6 + 1370x^7 + \\ &\quad + 5559x^8 + 22\,561x^9 + 91\,554x^{10} + \dots \\ G(x) &= 2x + 6x^2 + 24x^3 + 96x^4 + 390x^5 + 1582x^6 + 6422x^7 + \\ &\quad + 26\,062x^8 + 105\,768x^9 + 429\,228x^{10} + \dots \end{aligned}$$

Понятно, что эти разложения согласуются с таблицей 1.

Теперь нетрудно получить ещё одно доказательство теоремы 1.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Второй способ.** Используя результат теоремы 2, для  $G(x)$  имеем

$$(1 - 5x + 3x^2 + 5x^3 - 7x^4 + x^5) \sum_n g_n x^n = 2x(1-x)^3(1+x).$$

Поскольку правая часть равенства — многочлен, и левая должна быть многочленом. Следовательно, последовательность  $\{g_n\}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению пятого порядка:

$$g_{n+5} = 5g_{n+4} - 3g_{n+3} - 5g_{n+2} + 7g_{n+1} - g_n. \quad \square$$

Характеристическое уравнение для рекуррентного соотношения будет следующим (см. [7]):  $x^5 - 5x^4 + 3x^3 + 5x^2 - 7x + 1 = 0$ . Это уравнение имеет действительные корни, наибольший из них  $x_{\max} \approx 4,058206109671$ .

Поскольку  $x_{\max}$  не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку  $4,0582^n \leq g_n \leq 4,05821^n$ .

Обратим внимание на производящую функцию, полученную при подстановке  $v = 1$ :

$$G(u, 1, 1) = \frac{(1-u)^3(1+3u)}{1-16u+22u^2-24u^3+u^4} = \sum_n w_n u^n.$$

Член последовательности  $\{w_n\}$  равен количеству горизонтально-выпуклых полиоктов, в составе которых ровно  $n$  восьмиугольников.

При этом мы полагаем  $w_0 = 1$ , т. е. полиокт состоит только из одного квадрата. Следующие члены этой последовательности таковы:

$$w_1 = 16, \quad w_2 = 228, \quad w_3 = 3328, \quad w_4 = 48\,612, \quad w_5 = 710\,032.$$

Последовательность  $\{w_n\}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению четвёртого порядка:

$$w_{n+4} = 16w_{n+3} - 22w_{n+2} + 24w_{n+1} - w_n.$$

Этой последовательности отвечает характеристическое уравнение

$$u^4 - 16u^3 + 22u^2 - 24u + 1 = 0.$$

Уравнение имеет действительные корни, наибольший из них

$$u_{\max} \approx 14,6059427255653.$$

Поскольку  $u_{\max}$  не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку  $14,6059^n \leq w_n \leq 14,606^n$ .

Остаётся отметить, что количество горизонтально-выпуклых полиоктов, содержащих ровно  $n$  квадратов, бесконечно.

## § 7. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ ПАРКЕТА $(3^3, 4^2)$

Пусть множество  $F$  состоит из всех горизонтально-выпуклых политайлов для паркета  $(3^3, 4^2)$ . Через  $F_n$  обозначим подмножество множества  $F$ , в котором политайлы состоят из  $n$  правильных многоугольников (треугольников и квадратов). Положим  $f_n = |F_n|$ .

Определим следующие многочлены от двух переменных:

$$\begin{aligned} S(u, v) = & 2u + v - 4u^2 - 9uv - 3v^2 + 17u^2v + 17uv^2 + 3v^3 + 4u^4 - 3u^3v - \\ & - 26u^2v^2 - 15uv^3 - v^4 - 2u^5 - 17u^4v - 4u^3v^2 + 17u^2v^3 + \\ & + 5uv^4 + 9u^5v + 35u^4v^2 + 15u^3v^3 - 6u^2v^4 - 5u^5v^2 - 29u^4v^3 - \\ & - 4u^3v^4 - 9u^6v^2 - 11u^5v^3 + 9u^4v^4 + u^7v^2 + 10u^6v^3 + 3u^5v^4 + \\ & + 4u^7v^3 - 3u^6v^4 - u^7v^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R(u, v) = & 1 - 3u - 4v + 2u^2 + 12uv + 6v^2 + 2u^3 - 10u^2v - 18uv^2 - 4v^3 - 3u^4 - \\
 & - 6u^3v + 12u^2v^2 + 12uv^3 + v^4 + u^5 + 12u^4v + 16u^3v^2 - 6u^2v^3 - \\
 & - 3uv^4 - 4u^5v - 16u^4v^2 - 14u^3v^3 + 2u^2v^4 - 4u^5v^2 + 8u^4v^3 + \\
 & + 2u^3v^4 + 4u^6v^2 + 8u^5v^3 - u^4v^4 - u^6v^3 - u^5v^4 - u^7v^3.
 \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 3. Производящие функции множества горизонтально-выпуклых политайлов для паркета  $(3^3, 4^2)$  — это рациональные функции

$$F(u, v, 1) = \frac{S(u, v)}{R(u, v)}$$

и

$$F(x) = \sum_n f_n x^n = \frac{x(1-x)(3-13x+24x^2-17x^3-18x^4+35x^5-3x^6-14x^7+x^9)}{1-7x+20x^2-30x^3+16x^4+20x^5-32x^6+6x^7+11x^8-2x^9-x^{10}},$$

где многочлены  $S(u, v)$  и  $R(u, v)$  определены выше, при этом переменная  $u$  маркирует количество треугольников,  $v$  — количество квадратов,  $x$  — общее количество правильных многоугольников.

Для доказательства используем детализацию политайлов по количеству составляющих их треугольников и квадратов.

Разобьём горизонтально-выпуклые политайлы на множества  $A, B, C, D, D^*$  и  $E$  в зависимости от формы их верхнего слоя (рис. 21):

- если верхний слой состоит из одного треугольника  $\triangle$ , то отнесём политайл к множеству  $A$ ;
- если верхний слой является трапецией, у которой нижнее основание — большее, то отнесём политайл к множеству  $B$ ;
- если верхний слой является трапецией, у которой нижнее основание — меньшее, то отнесём политайл к множеству  $C$ . К этому же множеству отнесём единственный «перевёрнутый» треугольник  $\nabla$ ;
- если верхний слой — параллелограмм, то отнесём политайл к множествам  $D$  или  $D^*$ , если первая фигура справа треугольник типа  $\nabla$  или  $\triangle$  соответственно;
- если верхний слой состоит из квадратов, то отнесём политайл к множеству  $E$ .

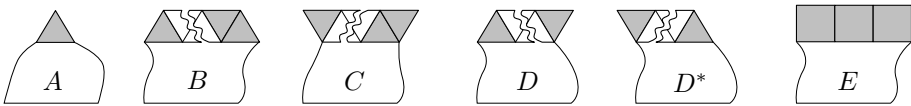


Рис. 21. Множества горизонтально-выпуклых политайлов в зависимости от формы их верхнего слоя

Пусть множество  $H$  является объединением множеств  $B, C, D$  и  $D^*$ . Таким образом, множество  $F$  является объединением множеств  $A, H$  и  $E$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Введём вспомогательные функции от трёх переменных. Считаем, что переменная  $u$  маркирует общее количество треугольников,  $v$  — общее количество квадратов, а  $y$  — количество «контактных площадок» (контактов) в верхнем слое (т. е. длину самого верхнего отрезка; сторона квадрата и треугольника равна 1).

Пусть  $a(p, q, 0)$  — количество политайлов типа  $A$ , которые состоят из  $p$  треугольников и  $q$  квадратов. Обозначим количество политайлов типов  $B, C, D, D^*$  и  $E$  соответственно, которые состоят из  $p$  треугольников и  $q$  квадратов, а верхний слой которых содержит  $m$  контактов, через  $b(p, q, m), c(p, q, m), d(p, q, m), d^*(p, q, m)$  и  $e(p, q, m)$ . Из соображений симметрии можно заключить, что политайлов в множестве  $D$  столько же, сколько и в множестве  $D^*$ , при этом  $d(p, q, m) = d^*(p, q, m)$ . Следовательно, производящие функции множеств  $D$  и  $D^*$  равны.

Рассмотрим производящие функции от трёх переменных для политайлов типов  $A, B, C, D, D^*$  и  $E$ :

$$A(u, v, y) = \sum_{p,q} a(p, q, 0)u^p v^q,$$

$$B(u, v, y) = \sum_{p,q,m} b(p, q, m)u^p v^q y^m,$$

.....

Заметим, что  $A(u, v, y)$  не зависит от  $y$  (в верхнем слое отсутствуют контактные площадки). Следовательно,

$$A(u, v, y) = A(u, v, 1) \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial y} A(u, v, y) = 0.$$

Нам понадобится

ЛЕММА 9. Для всех  $p \geq 1, q \geq 0, m \geq 0$  выполняются равенства

- а)  $d(p + 1, q, m + 1) = a(p, q, 0) + b(p, q, m),$
- б)  $c(p + 2, q, m + 2) = a(p, q, 0) + b(p, q, m).$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Если мы добавим треугольник типа  $\nabla$  справа в верхний слой политайла из множеств  $A$  или  $B$ , то получим слоёный политайл из множества  $D$ . При такой операции количество контактов увеличивается на 1. Эта процедура обратима: из каждого политайла из множества  $D$ , удаляя правый треугольник типа  $\nabla$  из верхнего слоя, мы получим

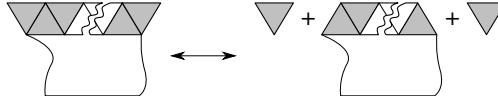


Рис. 22. Пояснения к доказательству леммы 9

политайл из множеств  $A$  или  $B$ . Следовательно, для всех  $p \geq 1$ ,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 0$  выполняется соотношение  $d(p + 1, q, m + 1) = a(p, q, 0) + b(p, q, m)$ .

б) Если мы добавим по треугольнику типа  $\nabla$  справа и слева в верхний слой политайла из множеств  $A$  или  $B$ , то получим слоёный политайл из множества  $C$  (рис. 22). При такой операции количество контактов увеличивается на 2. И наоборот, из каждого слоёного политайла из множества  $C$  (за исключением единственного треугольника  $\nabla$ ), удаляя по треугольнику типа  $\nabla$  справа и слева из верхнего слоя, мы получим слоёный политайл из множеств  $A$  или  $B$ . Имеем взаимно однозначное соответствие между множествами  $A \cup B$  и  $C \setminus \nabla$ . Следовательно, для всех  $p \geq 1$ ,  $q \geq 0$ ,  $m \geq 0$  выполнено  $c(p + 2, q, m + 2) = a(p, q, 0) + b(p, q, m)$ .  $\square$

Из леммы 9а получаем следующее соотношение для производящих функций:

$$D(u, v, y) = uy(A(u, v, y) + B(u, v, y)).$$

Учитывая, что треугольнику  $\nabla$  соответствует моном  $uy$ , из леммы 9б получаем соотношение для производящих функций

$$C(u, v, y) = uy + u^2y^2(A(u, v, 1) + B(u, v, y)) = uy + uyD(u, v, y).$$

Поскольку

$$H(u, v, y) = B(u, v, y) + C(u, v, y) + D(u, v, y) + D^*(u, v, y),$$

имеем

$$H(u, v, y) = uy + B(u, v, y) + (2 + uy)D(u, v, y), \quad (18)$$

$$F(u, v, y) = A(u, v, y) + H(u, v, y) + E(u, v, y). \quad (19)$$

Отметим, что нам достаточно найти выражение функции  $F(u, v, y)$  при  $y = 1$ . Рассуждениями того же типа, как выше, можно получить рекуррентные соотношения на коэффициенты  $a(p, q, m)$ ,  $b(p, q, m)$ ,  $d(p, q, m)$ ,  $e(p, q, m)$  и затем составить соотношения для производящих функций. Полное доказательство приводится на

[https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22\\_poly.pdf](https://www.mccme.ru/free-books/matpros/pdf/mp22_poly.pdf)  $\square$

При помощи онлайн-калькулятора нетрудно получить разложения производящих функций в степенной ряд от двух переменных. Приведём, например, разложение для  $F(u, v, 1)$  со слагаемыми степени не выше 7:

$$\begin{aligned}
 F(u, v, 1) = & 2u + v + 2u^2 + 2uv + v^2 + 2u^3 + 5u^2v + 4uv^2 + v^3 + \\
 & + 2u^4 + 10u^3v + 14u^2v^2 + 6uv^3 + v^4 + \\
 & + 2u^5 + 18u^4v + 34u^3v^2 + 29u^2v^3 + 8uv^4 + v^5 + \\
 & + 2u^6 + 30u^5v + 74u^4v^2 + 88u^3v^3 + 52u^2v^4 + 10uv^5 + v^6 + \\
 & + 2u^7 + 47u^6v + 146u^5v^2 + 228u^4v^3 + 194u^3v^4 + 85u^2v^5 + 12uv^6 + v^7 + \dots
 \end{aligned}$$

Можно получить разложения в ряд производящих функций от одной переменной:

$$\begin{aligned}
 E(x) = & x + 2x^2 + 5x^3 + 13x^4 + 34x^5 + 94x^6 + \\
 & + 266x^7 + 751x^8 + 2093x^9 + 5793x^{10} + \dots, \\
 H(x) = & x + 2x^2 + 4x^3 + 11x^4 + 32x^5 + 92x^6 + 255x^7 + \\
 & + 698x^8 + 1925x^9 + 5362x^{10} + \dots, \\
 A(x) = & x + x^2 + 3x^3 + 9x^4 + 26x^5 + 71x^6 + 194x^7 + \\
 & + 539x^8 + 1511x^9 + 4222x^{10} + \dots, \\
 F(x) = & 3x + 5x^2 + 12x^3 + 33x^4 + 92x^5 + 257x^6 + \\
 & + 715x^7 + 1988x^8 + 5529x^9 + 15\,377x^{10} + \dots
 \end{aligned}$$

Напомним, что  $f_n$  — количество горизонтально-выпуклых политайлов паркета  $(3^3, 4^2)$ , состоящих из  $n$  правильных многоугольников.

СЛЕДСТВИЕ. Последовательность  $\{f_n\}$  удовлетворяет рекуррентному соотношению десятого порядка:

$$\begin{aligned}
 f_{n+10} = & 7f_{n+9} - 20f_{n+8} + 30f_{n+7} - 16f_{n+6} - 20f_{n+5} + \\
 & + 32f_{n+4} - 6f_{n+3} - 11f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n. \quad (20)
 \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для  $F(x)$  имеем по теореме 3:

$$\begin{aligned}
 (1 - 7x + 20x^2 - 30x^3 + 16x^4 + 20x^5 - 32x^6 + 6x^7 + 11x^8 - 2x^9 - x^{10}) \sum_n f_n x^n = \\
 = x(1 - x)(3 - 13x + 24x^2 - 17x^3 - 18x^4 + 35x^5 - 3x^6 - 14x^7 + x^9).
 \end{aligned}$$

Поскольку правая часть равенства — многочлен, и левая часть должна быть многочленом. Поэтому выполняется рекуррентное соотношение (20).  $\square$

Характеристическое уравнение (см. [7]) имеет вид

$$x^{10} - 7x^9 + 20x^8 - 30x^7 + 16x^6 + 20x^5 - 32x^4 + 6x^3 + 11x^2 - 2x - 1 = 0.$$

У него есть действительные корни, наибольший из них  $x_{\max} \approx 2,77906203737$ .

Поскольку  $x_{\max}$  не является корнем числителя производящей функции, имеем асимптотическую оценку  $2,779^n \leq f_n \leq 2,7791^n$ .

Мы не пытались найти комбинаторное доказательство рекуррентного соотношения (20). По всей видимости, это доказательство будет слишком перегружено техническими подробностями.

## § 8. ЗАДАЧИ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ

Итак, рекуррентные формулы для количества горизонтально-выпуклых мозаичных монстров и производящие функции найдены для 5 из 11 правильных паркетов. Тем самым оставлено поле для дальнейшего исследования.

**Задача.** Найдите рекуррентное соотношение и производящую функцию для паркета а) (3, 4, 6, 4); б) (3<sup>4</sup>, 6); в) (3<sup>2</sup>, 4, 3, 4); г) (4, 6, 12).

Для умножения многочленов, нахождения корней и разложения в ряды авторами использовался онлайн-портал [17].

## БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят П. И. Самовола за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Голомб С. В.* Полимино. М.: Мир, 1975.
- [2] *Грюнбаум Б., Шепард Д. Ч.* Некоторые проблемы, связанные с плоскими мозаиками // Математический цветник. Сост. Д. А. Кларнер. М.: Мир, 1983. С. 220–252.
- [3] *Гульден Я., Джексон Д.* Перечислительная комбинаторика. М.: Наука, 1990. С. 69 (задача 2.3.15), с. 336–337 (решение задачи).
- [4] *Журавлёв В. М.* Горизонтально-выпуклые полиамонды и их производящие функции // Математическое просвещение. Сер. 3. Вып. 17. М.: МЦНМО, 2013. С. 107–129.
- [5] *Кларнер Д. А.* Моя жизнь среди полимино // Математический цветник. Сост. Д. А. Кларнер. М.: Мир, 1983. С. 303–328.
- [6] *Колмогоров А. Н.* Паркеты из правильных многоугольников // Квант. 1970. № 3. С. 24–27. [http://kvant.mccme.ru/1970/03/parkety\\_iz\\_pravilnyh\\_mnogougol.htm](http://kvant.mccme.ru/1970/03/parkety_iz_pravilnyh_mnogougol.htm)
- [7] *Маркушевич А. И.* Возвратные последовательности. 3-е изд. М.: Наука, 1983.
- [8] *Михайлов О.* Одиннадцать правильных паркетов // Квант. 1979. № 2. С. 9–14. [http://kvant.mccme.ru/1979/02/odinnadcat\\_pravilnyh\\_parketov.htm](http://kvant.mccme.ru/1979/02/odinnadcat_pravilnyh_parketov.htm)

- [9] *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 1990. Задача 4.7.18. С. 375–383.
- [10] *Hickerson D.* Counting horizontally convex polyominoes // Journal of Integer sequences. 1999. Vol. 2. Article 99.1.8.
- [11] *Klarnar D. A.* Cell growth problems // Canad. J. Math. Vol. 19. 1967. P. 851–863.
- [12] *Pólya G.* On the number of certain lattice polygons // J. Combinatorial Theory. 1969. Vol. 6, № 1. P. 102–105.
- [13] *Vöge M., Guttmann A. J.* On the number of hexagonal polyominoes // Theoretical Computer Science. 2003. Vol. 307, № 2. P. 433–453.
- [14] <http://oeis.org/A001169>
- [15] <http://oeis.org/A059716>
- [16] <http://oeis.org/A238823>
- [17] <https://cocalc.com>

---

Кирилл Анатольевич Ваньков, Гренобль (Франция)  
kirill.vankov@gmail.com

Валерий Михайлович Журавлёв, ПАО «Туполев», Москва  
zhuravlevvm@mail.ru