



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. К. Андреев, И. В. Степанова, Об одном конвективном течении бинарной смеси в вертикальном слое,
Сиб. журн. индустр. матем., 2011, том 14, номер 1, 17–26

<https://www.mathnet.ru/sjim647>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<https://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.91

28 апреля 2025 г., 01:20:31



ОБ ОДНОМ КОНВЕКТИВНОМ ТЕЧЕНИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ*)

В. К. Андреев, И. В. Степанова

Исследуется инвариантное решение уравнений термодиффузионной конвекции, описывающее стационарный процесс течения бинарной смеси в вертикальном слое под действием градиента давления и силы плавучести, нелинейно зависящей от температуры и концентрации. Установлен ряд общих свойств этого решения, доказана теорема существования. Проведен анализ численного решения задачи при степенной и экспоненциальной зависимости силы плавучести от ее аргумента.

Ключевые слова: бинарная смесь, термодиффузия, инвариантное решение.

Введение. Аэро- или гидростатическая сила (сила плавучести) возникает в результате изменения давления, переноса тепла и (или) химических компонентов. Существует много разных течений, вызванных силой плавучести, что обусловлено как отдельными эффектами, так и их комбинациями, а также разнообразием геометрических конфигураций, различием граничных условий и возникающих силовых полей. Поля скорости, температуры и концентрации в таких течениях всегда тесно связаны друг с другом, и их необходимо рассматривать совместно, что приводит к дополнительным трудностям при исследовании [1].

При выводе уравнений движения часто предполагается, что диффузионный поток массы зависит только от градиентов концентрации. Однако хорошо известно, что диффузия обусловлена и градиентами других параметров, например температуры, давления и массовых сил. Влияние градиентов двух последних параметров в общем случае пренебрежимо мало. При этом в ряде приложений градиенты температуры вызывают появление заметного диффузионного потока массы. Это явление называется термодиффузией или эффектом Соре.

При определении силы плавучести обычно предполагается, что плотность линейно зависит от концентрации и температуры (приближение Обербека — Буссинеска). Это достаточно точное приближение при малых изменениях данных параметров. В общем случае следует учитывать произвольную зависимость плотности от температуры и концентрации, а для глубоких водоемов и от давления.

1. Постановка задачи. Одной из наиболее популярных моделей конвекции являются уравнения Навье — Стокса, дополненные уравнениями переноса тепла и вещества. При этом предполагается, что отклонения плотности от некоторого среднего значения настолько малы, что их можно не учитывать во всех уравнениях, кроме уравнения импульса, где эти отклонения играют роль только в членах, отвечающих силе плавучести. Итак, в случае конвективного течения под действием эффекта Соре и сил плавучести уравнения движения имеют вид

*) Работа выполнена при финансовой поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 65.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{u} + R(\theta, c)\mathbf{g}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u} = 0, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \chi\Delta\theta, \quad \frac{dc}{dt} = d\Delta c + \alpha d\Delta\theta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$ — вектор координат, $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)$ — вектор скорости, p — давление, θ — малое отклонение температуры от среднего значения, c — малое отклонение концентрации легкой компоненты от среднего значения, $\rho_0 = \text{const}$ — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ — вектор массовых сил, ν — кинематическая вязкость, χ — коэффициент температуропроводности, d — коэффициент диффузии, α — коэффициент Соре, $R(\theta, c)$ — положительная функция, определяющая силу плавучести, $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ — символ полной производной. Заметим, что при $\alpha < 0$ термодиффузию называют нормальной, в этом случае тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие компоненты в более нагретые, при $\alpha > 0$ наблюдается аномальная термодиффузия, при которой направление движения компонентов меняется на противоположное.

Следует отметить, что наличие в системе (1) произвольной функции $R(\theta, c)$, входящей также в уравнение состояния, делает ее незамкнутой. Дифференциальные уравнения, описывающие реальные физические процессы, часто содержат произвольные параметры или функции, которые определяются из некоторых физических соображений или экспериментально. Задача определения вида этих функций очень важна как для науки, так и для конкретных приложений. Известны некоторые формы уравнения состояния для пресной и морской воды, полученные экспериментально [2–4]. Большинство из них представляют собой достаточно сложные алгебраические выражения. Помимо экспериментального определения зависимости плотности от параметров состояния среды для нахождения произвольной функции $R(\theta, c)$, входящей в уравнения (1), можно использовать методику группового анализа [5]. При таком подходе связывают вид произвольной функции, входящей в уравнение, с группой преобразований, допускаемой этим дифференциальным уравнением. Возникает задача групповой классификации: найти группу, допускаемую уравнением или системой уравнений, в зависимости от вида произвольных функций.

Пусть $\nu \neq 0$, $\chi \neq 0$, $d \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\chi \neq d$ (это соотношение для жидкостей выполняется). Тогда имеет место замена переменных

$$p = \rho_0 u^4, \quad \theta = \frac{\chi - d}{\alpha d} u^5, \quad c = u^5 + u^6. \quad (2)$$

Для системы (1) при замене переменных (2) задача групповой классификации относительно функции $R(\theta, c)$ была решена в [6]. Согласно полученным в этой работе результатам одна из специализаций функции R задается равенством $R = f(u^5 - u^6)$, где f — гладкая функция своего аргумента. Система (1) в координатном виде с учетом замены (2) при выбранной функции R переписется в виде

$$\begin{aligned} u_t^1 + u^1 u_{x_1}^1 + u^2 u_{x_2}^1 + u^3 u_{x_3}^1 + u_{x_1}^4 &= \nu(u_{x_1 x_1}^1 + u_{x_2 x_2}^1 + u_{x_3 x_3}^1), \\ u_t^2 + u^1 u_{x_1}^2 + u^2 u_{x_2}^2 + u^3 u_{x_3}^2 + u_{x_2}^4 &= \nu(u_{x_1 x_1}^2 + u_{x_2 x_2}^2 + u_{x_3 x_3}^2), \\ u_t^3 + u^1 u_{x_1}^3 + u^2 u_{x_2}^3 + u^3 u_{x_3}^3 + u_{x_3}^4 &= \nu(u_{x_1 x_1}^3 + u_{x_2 x_2}^3 + u_{x_3 x_3}^3) - gf(u^5 - u^6), \\ u_{x_1}^1 + u_{x_2}^2 + u_{x_3}^3 &= 0, \\ u_t^5 + u^1 u_{x_1}^5 + u^2 u_{x_2}^5 + u^3 u_{x_3}^5 &= \chi(u_{x_1 x_1}^5 + u_{x_2 x_2}^5 + u_{x_3 x_3}^5), \\ u_t^6 + u^1 u_{x_1}^6 + u^2 u_{x_2}^6 + u^3 u_{x_3}^6 &= d(u_{x_1 x_1}^6 + u_{x_2 x_2}^6 + u_{x_3 x_3}^6). \end{aligned} \quad (3)$$

Инвариантное решение системы (3) будем искать на операторах

$$\partial_t, \partial_{x^2}, \partial_{x^3} + \varphi \partial_{u^4} + A \partial_{u^5} + A \partial_{u^6}, \quad (4)$$

здесь A, φ — постоянные. В [6] показано, что система (3) допускает эти операторы при выбранном представителе функции R . Стационарное решение, соответствующее операторам (4), имеет следующее представление:

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(x^1), & u^2 &= u^2(x^1), & u^3 &= u^3(x^1), & u^4 &= P(x^1) + x^3 \varphi, \\ u^5 &= T(x^1) + Ax^3, & u^6 &= K(x^1) + Ax^3. \end{aligned}$$

Будем рассматривать только однонаправленное движение, т. е. положим $u^1 = u^2 = 0$, тогда $P = P_0 = \text{const}$. Пусть, далее, $x^1 = x, x^3 = z, u^3 = w$, при этом фактор-система сведется к системе ОДУ

$$w_{xx} = \frac{\varphi + gf(T - K)}{\nu}, \quad T_{xx} = \frac{Aw}{\chi}, \quad K_{xx} = \frac{Aw}{d}. \quad (5)$$

Граничные условия на твердых стенках $x = \pm l$ в физических переменных имеют вид

$$\begin{aligned} w(-l) = w(l) &= 0, & \theta(-l) &= \theta_1, & \theta(l) &= \theta_2, \\ c_x(-l) + \alpha \theta_x(-l) &= 0, & c_x(l) + \alpha \theta_x(l) &= 0. \end{aligned}$$

Здесь заданы условия прилипания, отсутствия потока вещества и температура на стенках. Тем самым имеем схему течения, изображенную на рис. 1.

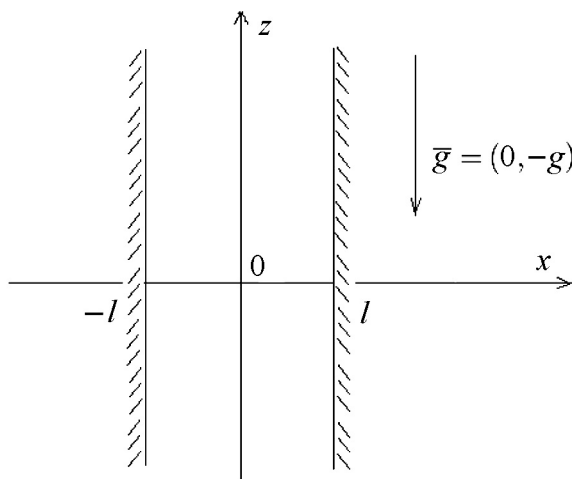


Рис. 1. Схема течения жидкости между двумя твердыми вертикальными стенками

Перепишем граничные условия в инвариантных переменных:

$$w(-l) = w(l) = 0, \quad (6)$$

$$T(-l) = \frac{\alpha d}{\chi - d} \theta_1, \quad T(l) = \frac{\alpha d}{\chi - d} \theta_2, \quad (7)$$

$$K_x(-l) + \frac{\chi}{d} T_x(-l) = 0, \quad K_x(l) + \frac{\chi}{d} T_x(l) = 0. \quad (8)$$

2. Общие свойства решения задачи (5)–(8). Введем безразмерные переменные

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{x+l}{2l}, \quad \bar{w} = \frac{wl}{\nu}, \quad \bar{\varphi}_0 = \frac{4\varphi_0 l^3}{\nu^2}, \quad \bar{g} = \frac{4gl^3}{\nu^2}, \quad \bar{\theta}_1 = \frac{\alpha d}{\chi-d}\theta_1, \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\alpha d}{\chi-d}\theta_2, \\ \delta &= 4Al, \quad \bar{T} = T + \frac{\alpha d(\theta_1 - \theta_2)}{2l(\chi-d)}x - \frac{\alpha d}{2(\chi-d)}(\theta_1 + \theta_2), \quad \bar{K} = K + \frac{\chi}{d}T. \end{aligned} \quad (9)$$

Опуская черту над этими переменными, перепишем систему (5) и граничные условия (6)–(8) в виде

$$w_{xx} = \varphi + gf(\lambda T - K + a_1 x + a_2), \quad T_{xx} = \delta \text{Pr} w, \quad K_{xx} = 2\delta \text{Sc} w, \quad (10)$$

$$w(0) = w(1) = 0, \quad T(0) = T(1) = 0, \quad K_x(0) = K_x(1) = 0, \quad (11)$$

где $\text{Pr} = \nu/\chi$ — число Прандтля, $\text{Sc} = \nu/d$ — число Шмидта, $\lambda = 1 + \text{Sc}/\text{Pr}$, $a_1 = \lambda(\theta_2 - \theta_1)$, $a_2 = \lambda\theta_1$, а f — произвольная положительная функция. Установим некоторые общие свойства решения задачи (10), (11).

Лемма 1. При $\delta = 0$ решение задачи (10), (11) имеет вид

$$T(x) \equiv 0, \quad K(x) = c_0 = \text{const},$$

$$w(x) = \frac{\varphi(x-1)x}{2} - g \int_0^1 G(x,y) f(a_1 y + a_2 - c_0) dy.$$

Здесь $G(x,y) \geq 0$ — функция Грина оператора $-\frac{d^2}{dx^2}$:

$$G(x,y) = \begin{cases} y(1-x), & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ x(1-y), & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases} \quad (12)$$

Лемма 1 является простым следствием уравнений (10) и граничных условий (11). Согласно заменам переменных (9) и (2) реальные физические температура и концентрация являются линейными по x , а постоянная c_0 определяется из задания средней концентрации c_{00} в сечении $z = 0$:

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l c(x) dx = c_{00}.$$

В инвариантных переменных с учетом замены (9) это условие имеет вид

$$\int_0^1 \left(\left(1 - \frac{\chi}{d}\right) T + K - \frac{\alpha}{2}(\theta_1 + \theta_2) \right) dx = c_{00}. \quad (13)$$

Тем самым в случае $\delta = 0$ получим $c_0 = c_{00} + \alpha(\theta_1 + \theta_2)/2$.

Лемма 2. При $\delta \neq 0$ среднее значение функции $w(x)$ на интервале $(0, 1)$ равно нулю, т. е.

$$\int_0^1 w(x) dx = 0. \quad (14)$$

Другими словами, на интервале $(0, 1)$ функция скорости $w(x)$ меняет знак, и в жидкости должны возникать зоны обратного течения. Равенство (14) следует из однократного интегрирования последнего уравнения в (10) и подстановки соответствующих граничных условий из (11). Заметим, что с учетом второго уравнения из (10) следствием леммы 2 является равенство

$$T_x(0) = T_x(1) = 0, \quad (15)$$

которое означает равенство потоков тепла через стенки.

Нетрудно видеть, что одна из функций $K(x)$ или $T(x)$ исключается в задаче (10), (11). Действительно, из двух последних уравнений в (10) получаем $2 \text{Sc} T_{xx} = \text{Pr} K_{xx}$, откуда после двукратного интегрирования имеем

$$2 \text{Sc} T(x) - \text{Pr} K(x) = ax + b$$

с произвольными постоянными a и b . Теперь ясно, что равенства (14), (15) выполнены всегда, причем $T_x(0) = T_x(1) = (a/2) \text{Sc}$. Однако постоянные a и b не определяются из постановки задачи (10), (11) и исключение, например $K(x)$, не приводит к упрощению этой задачи.

Лемма 3. Если постоянная $\varphi > 0$, то при $\delta \neq 0$ задача (10), (11) решения не имеет.

Доказательство. В самом деле, из первого уравнения (10) в этом случае следует, что $w_{xx} > 0$ для всех $x \in (0, 1)$. Это означает, что $w(x)$ выпукла вниз на этом интервале. Так как $w(0) = w(1) = 0$, то $w(x) < 0$ на интервале от нуля до единицы, что противоречит равенству (14).

Сведем краевую задачу (10), (11) к операторному уравнению. Считая правые части в (10) известными, имеем

$$w(x) = \frac{\varphi x(x-1)}{2} - g \int_0^1 G(x, y) f(\lambda T - K + a_1 y + a_2) dy, \quad (16)$$

$$T(x) = -\delta \text{Pr} \int_0^1 G(x, y) w(y) dy, \quad K(x) = 2\delta \text{Sc} \int_0^1 V(x, y) w(y) dy + c_0,$$

где $G(x, y)$ — функция Грина, задаваемая равенством (12), $V(x, y)$ — также функция Грина:

$$V(x, y) = \begin{cases} y - x, & 0 \leq y \leq x \leq 1, \\ 0, & 0 \leq x \leq y \leq 1. \end{cases}$$

Постоянная c_0 находится из условия (13) и является функционалом от w :

$$c_0(w) = c_{00} + \frac{\alpha(\theta_1 + \theta_2)}{2} - \delta \int_0^1 \left(\text{Sc} - \frac{\text{Sc} + \text{Pr}}{2} y \right) (1 - y) w(y) dy. \quad (17)$$

На самом деле градиент давления φ также является функционалом от w . Это следует из условия (14) и первого уравнения (16):

$$\varphi = -6g \int_0^1 y(1-y) f \left(\int_0^1 G_1(y, z) w(z) dz + a_1 y + a_2 - c_0(w) \right) dy. \quad (18)$$

Здесь $G_1(y, z) = -\lambda\delta \text{Pr} G(y, z) - 2\delta \text{Sc} V(y, z)$. Подставляя $T(x)$ и $K(x)$ в уравнение (16) для $w(x)$, а также используя (17) и (18), получим уравнение только на $w(x)$:

$$w(x) = g \int_0^1 G_3(x, y) f \left(\int_0^1 G_2(y, z) w(z) dz + a_1 y + a_3 \right) dy, \quad (19)$$

где

$$G_2(y, z) = G_1(y, z) + \left(\text{Sc} - \frac{\text{Sc} + \text{Pr}}{2} z \right) (1 - z),$$

$$G_3 = 3(x - x^2)(y - y^2) - G(x, y), \quad a_3 = a_2 - \frac{\alpha(\theta_1 + \theta_2)}{2} - c_{00}.$$

Пусть $C[0, 1]$ — пространство непрерывных функций, $\bar{S}(0, r) \subset C[0, 1]$ — замкнутый шар в этом пространстве пока произвольного радиуса r .

Теорема. *Предположим, что $f(u)$ — непрерывная функция при $|u| \leq h = \text{const}$. Тогда найдется такое r_0 , что уравнение (19) имеет решение $w(x) \in \bar{S}(0, r_0)$.*

Доказательство. Ясно, что $f(u) \leq m = \text{const}$ при $|u| \leq h$ ($f(u) > 0$ согласно физическому смыслу). Оператор \mathcal{A} , задаваемый правой частью уравнения (19), вполне непрерывен как суперпозиция непрерывного и линейного вполне непрерывного операторов на $\bar{S}(0, r)$. Справедлива следующая оценка:

$$\|\mathcal{A}w\| = \max_{x \in [0, 1]} |(\mathcal{A}w)(x)| \leq mg \max_{x \in [0, 1]} \int_0^1 |G_3(x, y)| dy \leq mg/4.$$

Поэтому $\mathcal{A}\bar{S}(0, r_0) \subset \bar{S}(0, r_0)$ при $r_0 = mg/4$, и применение теоремы Шаудера [7] доказывает теорему. Можно показать, что $w(x)$, $T(x)$, $K(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемые функции на $(0, 1)$ и являются решением задачи (10), (11).

Заметим также, что при заданном $h > 0$ должно быть ограничение на входные параметры. Действительно, из (19) число

$$\max_{y \in [0, 1]} \left| \int_0^1 G_2(y, z) w(z) dz + a_1 y + a_3 \right|$$

должно не превосходить h при $w \in \bar{S}(0, r_0)$. Если h любое, то ограничений нет. Опуская некоторые выкладки, получаем оценку на входные параметры задачи:

$$\frac{\delta mg}{96(3 \text{Sc} + \text{Pr})} (4 \text{Pr}^2 + 45 \text{Sc}^2 + 26 \text{Sc} \text{Pr}) + |a_1| + |a_3| \leq h. \quad (20)$$

Отметим, что если функция $f(u)$ имеет ограниченную производную по своему аргументу, то при некоторых дополнительных к (20) ограничениях на входные данные к уравнению (19) применим классический принцип неподвижной точки, и решение будет единственным [7]. Тем самым при непосредственных численных расчетах эти ограничения на входные данные следует учитывать.

3. Результаты численных расчетов. Напомним, что при расчетах термодиффузионных конвективных течений в качестве выражения для силы плавучести используют либо приближение Обербека — Буссинеска, либо зависимости, выведенные экспериментально. В общем виде представление для силы плавучести можно записать в виде

$$R = g(1 - F(\theta, c)),$$

где $F(\theta, c)$ — достаточно малая функция, чтобы обеспечить положительность плотности. В случае приближения Обербека — Буссинеска она линейна, для зависимостей, полученных экспериментально, F представляет собой, как правило, полином с малыми коэффициентами [2, 3].

При решении задачи (10), (11) будем рассматривать три различные зависимости силы плавучести от температуры и концентрации:

- линейную $f = 1 - \varphi_1(\lambda T - K + a_1 x + a_2)$;
- кубическую $f = 1 - \varphi_1(\lambda T - K + a_1 x + a_2)^3$;
- экспоненциальную $f = e^{\sigma(\lambda T - K + a_1 x + a_2)}$,

где $\sigma < 0$, φ_1 — некоторые безразмерные постоянные. При $\delta = 0$ согласно утверждению леммы 1 скорость в каждом из этих случаев задается выражением

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{g + \varphi}{2}(x^2 - x) + \frac{\varphi_1 g}{6a_1^2} \left(-(a_1 x + a_2 - c_0)^3 + ((a_1 + a_2 - c_0)^3 - \right. \\ &\quad \left. -(a_2 - c_0)^3)x + (a_2 - c_0)^3 \right), \\ w(x) &= \frac{g + \varphi}{2}(x^2 - x) + \frac{\varphi_1 g}{20a_1^2} \left(-(a_1 x + a_2 - c_0)^5 + ((a_1 + a_2 - c_0)^5 - \right. \\ &\quad \left. -(a_2 - c_0)^5)x + (a_2 - c_0)^5 \right), \\ w(x) &= \frac{\varphi}{2}(x^2 - x) + \frac{ge^{\sigma(a_2 - c_0)}}{(\sigma a_1)^2} (e^{\sigma a_1 x} - e^{\sigma a_1} x + x - 1) \end{aligned} \quad (21)$$

для линейной, кубической и экспоненциальной зависимости функции f от параметров состояния соответственно. На рис. 2 представлены профили скорости, заданные в (21) при $c_0 = 0$ и

$$\begin{aligned} g &= 1, \quad \varphi_1 = 0,001, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_2 = 2,5, \\ \sigma &= -0,01, \quad \varphi = -1, \quad \text{Sc} = 0,2, \quad \text{Pr} = 1,6. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь градиент давления и сила тяжести уравновешивают друг друга и течение происходит только за счет силы плавучести. Кривая 1 соответствует линейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации, кривая 2 — кубической зависимости, кривая 3 — экспоненциальной. Видно, что по сравнению с линейной зависимостью нелинейность функции f приводит к более интенсивному течению. Кроме того, экспоненциальная зависимость дает большее, по сравнению с кубической зависимостью, увеличение скорости. При этом скорость на всем промежутке не меняет знак, температура, как следует из леммы 1, распределена линейно. Отметим, что при $g = 0$ решение (21) сводится к представлению для скорости в хорошо известном течении Пуазейля. Если одновременно $\varphi = g = 0$, то слой находится в состоянии механического равновесия.

Решение задачи (10), (11) для тех же трех зависимостей силы плавучести от параметров состояния в общей постановке ($\delta \neq 0$) найдено численно с помощью метода пристрелки при значениях параметров задачи (22). На рис. 3 изображены профили скорости. По-прежнему кривая 1 соответствует линейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации, кривая 2 — кубической зависимости, кривая 3 — экспоненциальной. Из графика видно,

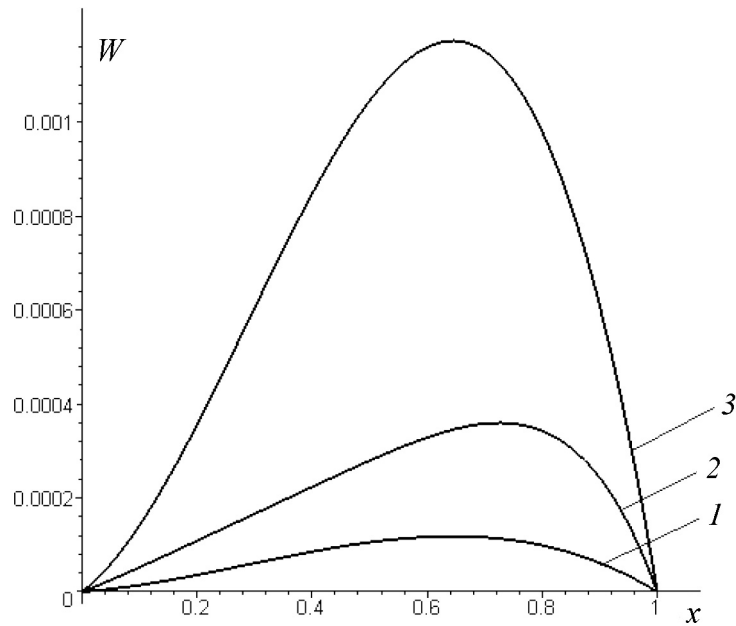


Рис. 2. Профили скорости при отсутствии продольного градиента температуры и концентрации $\delta = 0$

что жидкость опускается вниз вблизи менее нагретой границы, возникает зона возвратного течения, скорость в которой отрицательна. Затем наступает состояние механического равновесия и переход в область с положительной скоростью вблизи более нагретой стенки. Видно, что нелинейность функции f дает увеличение скорости при положительных ее значениях и уменьшение в зонах возвратного течения по сравнению с линейной зависимостью силы плавучести от температуры и концентрации. Экспоненциальная зависимость силы плавучести дает большую неоднородность течения по сравнению с кубической и линейной зависимостями даже при малых $|\sigma| \sim 10^{-3}$. Следует, однако, отметить, что при $|\sigma| \sim 10^{-6}$ профиль скорости при экспоненциальной зависимости силы плавучести от параметров состояния мало отличается от профиля скорости для линейного представления силы плавучести.

На рис. 4 изображены профили температуры в сечении $z = 0$. В отличие от решения (21) при $\delta = 0$ видно, что инвариантная температура значительно отличается от линейной в случае присутствия продольного градиента $\delta \neq 0$. Как и для скорости, нелинейность функции f дает увеличение температуры в областях, где она положительна, и уменьшение в областях отрицательной температуры.

Заключение. Следует отметить, что движения бинарной смеси под действием эффекта термодиффузии исследовались ранее в [8–10] и других работах этих авторов, где были изучены уравнения движения в приближении Обербека — Буссинеска. Но в последние годы большинство исследований связано с нарастающими требованиями получения детальной количественной информации о движениях жидкости, вызванных выталкивающей силой, которая не всегда аппроксимируется приближением Обербека — Буссинеска. Течения, вызванные выталкивающей силой, нелинейно зависящей от параметров состояния, чрезвычайно разнообразны по своим механизмам, физическим размерам, формам возникающих движений, часто встречаются в природе и в технических устройствах. К сожалению, численное решение, основывающееся на фиксации

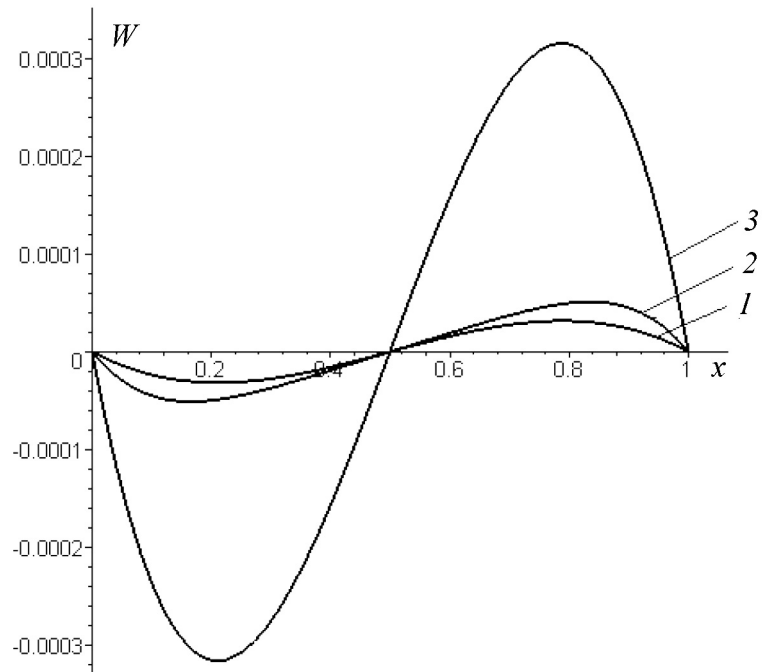


Рис. 3. Профили скорости при наличии продольного градиента температуры и концентрации $\delta \neq 0$

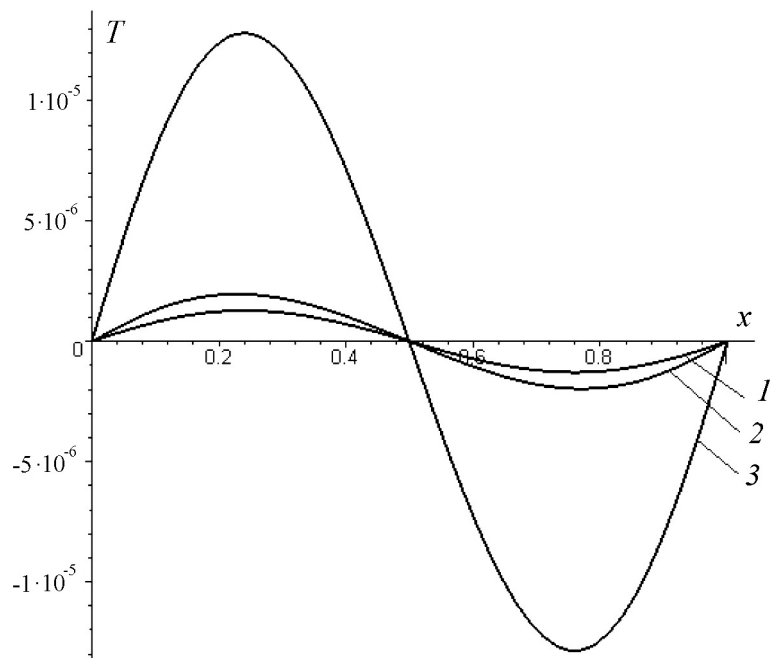


Рис. 4. Профиль инвариантной температуры при наличии продольного градиента температуры и концентрации в сечении $z = 0$

большинства параметров системы, не всегда может выполнять прогнозирующую роль. Тем сильнее возникает необходимость получения точных и приближенных аналитических решений, выявляющих доминантную роль тех или иных параметров системы. Рассмотренная в работе одна из таких задач показывает степень трудности их изучения и существенное отличие картины течения по сравнению с классической моделью Обербека — Буссинеска.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гебхарт Б., Джалурия Й., Махаджан Р., Саммакия Б. Свободноконвективные течения, тепло- и массообмен. Т. 1. М.: Мир, 1991.
2. Bryan K., Cox M. D. An approximate equation of state for numerical models of ocean circulation // J. Phys. Oceanography. 1972. V. 2. P. 510–514.
3. Марчук Г. И., Саркисян А. С. Математическое моделирование циркуляции океана. М.: Наука, 1988.
4. Gebhart B., Mollendorf J. Buoyancy-induced flows in water under conditions in which density extrema may arise // J. Fluid Mech. 1978. V. 89, N 4. P. 673–707.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Андреев В. К., Степанова И. В. Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации // Выч. технологии. 2010. Т. 15, № 4. С. 47–55.
7. Треногин В. А. Функциональный анализ. М.: Наука, 1980.
8. Андреев В. К. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии // Тр. 3 Междунар. конф. «Симметрия и дифференциальные уравнения». Красноярск: изд. Краснояр. гос. ун-та, 2002. С. 13–17.
9. Рыжков И. И. Об инвариантных решениях уравнений термодиффузии бинарной смеси в случае плоского движения // Прикл. механика и техн. физика. 2006. Т. 47, № 1. С. 95–108.
10. Герцуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Сорокин Л. Е. Об устойчивости конвективного течения бинарной смеси с термодиффузией // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 1. С. 66–71.

Андреев Виктор Константинович
Степанова Ирина Владимировна
Институт вычислительного
моделирования СО РАН
Академгородок, 50, стр. 44
660036 г. Красноярск
E-mail: andr@icm.krasn.ru; stepiv@icm.krasn.ru

Статья поступила 7 апреля 2010 г.