Труды по дискретной математике
Том 5, с. 159–166
М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002

ПОСТРОЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАТИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СХЕМ СЛУЧАЙНЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ ИЗ ПОЛЯ GF(q)

Ю.И. МАКСИМОВ

Рассмотрен ряд вероятностных схем образования последовательностей случайных величин со значениями из поля $\mathbf{GF}(q)$. На основе метода линеаризации предложены статистики критериев проверки сформулированных гипотез относительно рассматриваемых последовательностей. Найдены асимптотические распределения предложенных статистик.

1. Как известно, в задачах обнаружения сигналов на фоне шумов характерными, в частности, являются следующие моменты. Во-первых, зачастую приходится иметь дело с последовательностями зависимых в вероятностном смысле наблюдений сигнала на фоне шума, связанных с возможным наличием зависимости между элементами как сигнала, так и шума. Во-вторых, потребности практики приводят к необходимости перехода от аддитивных моделей наблюдения сигнала на фоне шума к мультипликативным или смешанным мультипликативно-аддитивным моделям. Мультипликативная компонента, в частности, характерна для так называемых каналов связи с замираниями (например, [1, с. 241]). Рассматриваемые ниже вероятностные схемы являются в определенном смысле дискретной версией мультипликативно-аддитивных моделей теории обнаружения сигнала на фоне шума.

Начнем с простого примера, некоторые особенности которого будут присутствовать во всем дальнейшем. Пусть здесь и далее q — простое натуральное число, $\mathbf{GF}(q)$ — конечное поле из q элементов, в качестве которого рассматривается совокупность $(0, 1, \dots, q-1)$ вычетов по $\bmod q$ с операциями сложения и умножения по данному модулю. Пусть e_0 — распределение на $\mathbf{GF}(q)$, сосредоточенное в нуле, ω — равномерное на $\mathbf{GF}(q)$ распределение.

Пусть далее $x_1, x_2, \dots, x_t, \dots, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_t, \dots$ — две независимые между собой последовательности независимых одинаково распределенных на $\mathbf{GF}(q)$ случайных величин с распределениями $be_0 + (1-b)\omega$ и $ae_0 + (1-a)\omega$, соответственно. Для того, чтобы последние были действительно распределениями вероятностей, нужно, чтобы действительные параметры b и a удовлетворяли ограничениям: $-1/(q-1) \le b \le 1$, $-1/(q-1) \le a \le 1$. Образуем из введенных последовательностей две вероятностные схемы — аддитивную:

$$y_1 = x_1 + \eta_1, \quad y_2 = x_2 + \eta_2, \quad \dots, \quad y_N = x_N + \eta_N, \tag{1}$$

и мультипликативную:

$$y_1 = x_1\eta_1, \quad y_2 = x_2\eta_2, \quad \dots, \quad y_N = x_N\eta_N. \tag{2}$$

В (1) и (2) операции сложения и умножения производятся по $\mathrm{mod}\, q$ (в дальнейшем то, что эти операции понимаются именно так, а не как операции в действительном поле, будет всегда ясно из контекста), при этом x играет роль “сигнала”, а η — роль “шума”. Сформулируем две простые статистические гипотезы H_0 и H_1. Гипотеза H_0 состоит в том, что случайный вектор $y = (y_1 y_2, \dots, y_N)$ состоит из независимых равновероятных на $\mathbf{GF}(q)$ компонент, гипотеза H_1 — в том, что он получен по схемам (1) и (2), соответственно, с определенными выше условиями на входящие в них случайные элементы.

Обозначим через $w_N(\varepsilon)$ отношение правдоподобия:

$$w_N(\varepsilon) = \frac{\mathbf{P}_{H_1}\{y = \varepsilon\}}{\mathbf{P}_{H_0}\{y = \varepsilon\}}, \quad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N). \tag{3}$$

Так как для схемы (1) справедливо

$$\mathbf{P}\{x_j + \eta_j = \varepsilon_j\} = \frac{1}{q} + \frac{q\delta_0(\varepsilon_j) - 1}{q} ab$$

($\delta_0(\beta)$ равно 1 при $\beta = 0$ и нулю в остальных случаях) и в нее входят независимые элементы y_j, то $\ln w_N(\varepsilon)$ пропорционален величине

$$\nu_0(\varepsilon) \ln \frac{1 + (q-1)ab}{1 - ab},$$

где $\nu_0(\varepsilon)$ — число нулевых элементов в векторе ε.

Теперь, если $ab = 0$, то H_0 и H_1 неразличимы, что, в общем, ясно из самой схемы (1); если $ab = 1$, то H_0 и H_1 в пределе при $N \to \infty$ безошибочно различимы. Во всех остальных случаях критерий основывается на статистике $\nu_0(\varepsilon)$ или ее центрированном и нормированном варианте $\nu_0^{(0)}(\varepsilon) = N^{-1/2}(\nu_0^{(0)}(\varepsilon) - N/q)$, который имеет как при H_0, так и при H_1 асимптотически нормальное распределение с параметрами

$$\mathbf{E}_{H_0}\nu_0^{(0)} = 0, \qquad \mathbf{E}_{H_1}\nu_0^{(0)} = N^{1/2}\frac{q-1}{q}ab,$$

$$\mathbf{D}_{H_0}\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}, \qquad \mathbf{D}_{H_1}\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}\left(1 + (q-2)ab - (q-1)a^2b^2\right)$$

($\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$ — знаки математического ожидания и дисперсии).

Для мультипликативной схемы (2) имеем

$$\mathbf{P}\{x_j\eta_j = \varepsilon_j\} = \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{q}b\right)\delta_0(\varepsilon_j) + \left(1 - \frac{1}{q} - \frac{q-1}{q}b\right)\left(\frac{1}{q} + \frac{q\delta_0(\varepsilon_j) - 1}{q}a\right) =$$

$$= \frac{1}{q} + \frac{q\delta_0(\varepsilon_j) - 1}{q^2}(1 + (q-1)b + (q-1)a - (q-1)ab)$$

и $\ln w_N(\varepsilon)$ в данном случае пропорционален величине

$$\nu_0(\varepsilon) \ln \frac{1 + \frac{q-1}{q}(1 + (q-1)b + (q-1)a - (q-1)ab)}{1 - \frac{1}{q}(1 + (q-1)b + (q-1)a - (q-1)ab)}.$$

Теперь, если выполнено равенство

$$1 + (q-1)b + (q-1)a - (q-1)ab = 0, \tag{4}$$

то H_0 и H_1 неразличимы, т. е. условие неразличимости для мультипликативной схемы, вообще говоря, отличается от аддитивного случая. Гипотезы H_0 и H_1 в пределе безошибочно различимы, если хотя бы один из параметров a и b равен 1. Во всех остальных случаях критерий основывается на статистике $\nu_0^{(0)}$, асимптотически нормальной при обеих гипотезах соответственно с параметрами

$$\mathbf{E}_{H_0}\nu_0^{(0)} = 0, \qquad \mathbf{D}_{H_0}\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2},$$

$$\mathbf{E}_{H_1}\nu_0^{(0)} = N^{1/2}\frac{q-1}{q^2}(1+(q-1)b+(q-1)a-(q-1)ab),$$

$$\mathbf{D}_{H_1}\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}\left(1+\frac{q-2}{q}(1+(q-1)b+(q-1)a-(q-1)ab)-\right.$$
$$\left.-\frac{q-1}{q}(1+(q-1)b+(q-1)a-(q-1)ab)^2\right).$$

Отметим один заслуживающий внимания факт, связанный с равенством (4). Если $0 < b \le 1$, то не существует a, удовлетворяющего (4) и условию $-1/(q-1) \le a \le 1$, обеспечивающему для $ae_0 + (1-a)\omega$ все свойства вероятностного распределения. В самом деле, разрешая (4) относительно a, получаем

$$a = -\frac{1}{q-1}\frac{1+(q-1)b}{1-b}$$

и $a < -1/(q-1)$, если $b > 0$.

При переходе к схемам зависимых наблюдений построение и расчет оптимального статистического критерия, как в теории обнаружения сигналов на фоне шумов, так и в дискретных вероятностных задачах, значительно усложняется, а иногда и неясно, как его построить. В связи с этим в теории обнаружения иногда используют (например, [2, с. 130]) аппроксимацию, основанную на допущении, что обнаруживаемый на фоне шума сигнал достаточно слаб. С этой целью отношение правдоподобия, как функция от наблюдений и коэффициента сигнал/шум, разлагается по степеням последнего, и в качестве подходящей статистики берется первый зависящий от наблюдений коэффициент разложения. Получающуюся таким образом статистику иногда называют субоптимальной.

Аналогичный подход используется ниже при рассмотрении задач статистики дискретных схем, связанных с аддитивным и мультипликативным зашумлением. Именно, в схему включается некоторый малый параметр Δ, и в качестве статистики критерия выбирается первый, зависящий от реализации наблюдений, коэффициент разложения отношения правдоподобия по Δ. Будем называть полученную таким образом статистику статистикой линеаризации (отношения правдоподобия), хотя совсем не обязательно, чтобы она представляла собой коэффициент при первой степени Δ, а не при $\Delta^2, \Delta^3, \ldots$ и т. д.

В заключение вводного пункта приведем одно полезное для дальнейшего равенство. Именно, если $u_1, u_2, \ldots, u_k$ — совокупность случайных величин со значениями из $\mathbf{GF}(q)$ (вообще говоря, как угодно зависимых), то справедливо несложно проверяемое, например, с помощью индукции по k равенство

$$\mathbf{P}\{u_1 = \varepsilon_1, u_2 = \varepsilon_2, \ldots, u_k = \varepsilon_k\} = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{k}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{q}\sum_{\gamma_j \ne 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j} e^{\frac{2\pi i}{q}u_j\gamma_j}\right). \qquad (5)$$

2. Рассмотрим теперь мультипликативно-аддитивную схему в условиях независимости наблюдении. Для нее можно было бы основываться, как и в п.1, на вычислении соответствующего отношения правдоподобия, однако полезно выяснить в этом, более простом по сравнению с последующим рассмотрением, случае, к каким статистикам приводит метод линеаризации. В образовании мультипликативно-аддитивной схемы принимают участие:

— последовательность $x_1, x_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных на $\mathbf{GF}(q)$ случайных величин (“сигнал”), имеющих вероятность нуля $\mathbf{GF}(q)$, равную p_0 (как дальше выяснится, остальные вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_{q-1}$ в рассматриваемых случаях значения не имеют);

— последовательность $\eta_1, \eta_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных на $\mathbf{GF}(q)$ случайных величин (“мультипликативный шум”) с распределением $ae_0 + (1-a)\omega$;

— последовательность $\xi_1, \xi_2, \ldots$, аналогичная предыдущей, но с распределением $\Delta e_0 + (1-\Delta)\omega$ (“аддитивный шум”).

Предполагается, что все три последовательности независимы в совокупности, а Δ будет играть роль малого параметра в методе линеаризации.

Определим участок длины N последовательности $y_1, y_2, \ldots, y_t, \ldots$ соотношением

$$y_1 = x_1\eta_1 + \xi_1, y_2 = x_2\eta_2 + \xi_2, \ldots, y_N = x_N\eta_N + \xi_N. \tag{6}$$

Как и в п.1, гипотеза H_0 состоит в том, что вектор наблюдений $(y_1, y_2, \ldots, y_N)$ состоит из независимых равновероятных компонент, гипотеза H_1 — в том, что он получен по схеме (6) с введенными выше условиями на входящие в (6) случайные элементы. Используя равенство (5), для отношения правдоподобия $w_N(\varepsilon)$ получаем

$$w_N(\varepsilon) = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{N}\left(1 + \sum_{\gamma_j\neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j(x_j\eta_j+\xi_j)}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N}\left(1 + \mathbf{E}\sum_{\gamma_j\neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j x_j\eta_j} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\xi_j}\right) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N}\left(1 + \Delta\sum_{\gamma_j\neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j}\hat{p}_{x_j\eta_j}(\gamma_j)\right) = \prod_{j=1}^{N}\left(1 + q\Delta\left(\mathbf{P}\{x_j\eta_j = \varepsilon_j\} - \frac{1}{q}\right)\right). \tag{7}$$

(Здесь и далее через $\hat{p}_{æ}(\gamma)$, $\gamma \in \mathbf{GF}(q)$, обозначается характеристическая функция случайной величины $æ$ со значениями в $\mathbf{GF}(q)$ и используется формула обращения для характеристических функций.)

Для входящих в последнее равенство в (7) вероятностей имеем

$$\mathbf{P}\{x_j\eta_j = \varepsilon_j\} - \frac{1}{q} = p_0\delta_0(\varepsilon_j) + (1-p_0)\left(\frac{1}{q} + \frac{q\delta_0(\varepsilon_j) - 1}{q}\right) - \frac{1}{q} =$$

$$= p_0\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right) + (1-p_0)a\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right) = (p_0 + (1-p_0)a)\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right). \tag{8}$$

Из (7) и (8) получаем, что в качестве статистики линеаризации $v_N(\varepsilon)$ как коэффициента при первой степени Δ в разложении $w_N(\varepsilon)$ может быть при условии $p_0 + (1-p_0)a \neq 0$ выбрана статистика

$$v_N(\varepsilon) = N^{-1/2}\sum_{j=1}^{N}\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right) = \nu_0^{(0)}(\varepsilon) \tag{9}$$

(напомним, что $\nu_0^{(0)}(\varepsilon)$ — центрированный и нормированный вариант числа нулей в векторе $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_N)$). Что касается случая, когда выполняется равенство

$$p_0 + (1-p_0)a = 0, \tag{10}$$

то гипотезы H_0 и H_1 становятся в принципе неразличимы, так как ввиду (8) случайные величины $x_j\eta_j + \xi_j$ равновероятны на $\mathbf{GF}(q)$ (и независимы по условию).

Вычисляя первые два момента статистики $\nu_0^{(0)}$

$$\mathbf{E}_{H_0}\nu_0^{(0)} = 0, \qquad \mathbf{E}_{H_1}\nu_0^{(0)} = N^{1/2}\Delta\frac{q-1}{q}(p_0 + (1-p_0)a),$$

$$\mathbf{D}_{H_0}\,\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}, \qquad \mathbf{D}_{H_1}\,\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}\,(1 + \Delta(q-2)(p_0 + (1-p_0)a) - \\ -\Delta^2(q-1)(p_0 + (1-p_0)a)^2)$$

и учитывая независимость слагаемых в (9), приходим к следующему результату.

Предложение 1. а) *Если в схеме* (6) $N \to \infty$, $\Delta \to 0$ *так, что* $N^{1/2}\Delta = c$, *и выполнено условие* $p_0 + (1-p_0)a \neq 0$, *то при гипотезе* H_1 *статистика* $\nu_0^{(0)}$ *имеет распределение* $\mathcal{N}\left(c\frac{q-1}{q}(p_0 + (1-p_0)a)\frac{q-1}{q^2}\right)$ (*а при* H_0, *очевидно, распределение* $\mathcal{N}(0, (q-1)/q^2)$).

б) *При выполнении условия* $p_0 + (1-p_0)a = 0$ *гипотезы* H_0 *и* H_1 *в принципе неразличимы, т. е. неразличимы никаким статистическим критерием* (*в формулировке предложения используется стандартное обозначение* $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ *для нормального распределения со средним* m *и дисперсией* σ^2).

3. Усложним схему (6) введением еще одного случайного механизма, который приводит к появлению зависимости в последовательности наблюдений. Именно, пусть $s_1, s_2, \ldots, s_n$ — случайная реализация равновероятной полиномиальной схемы с N исходами $1, 2, \ldots N$ и n испытаниями, не зависящая от совокупности случайных элементов в (6). Положим

$$y_1 = x_{s_1}\eta_1 + \xi_1, \quad y_2 = x_{s_2}\eta_2 + \xi_2, \quad \ldots, \quad y_n = x_{s_n}\eta_n + \xi_n, \tag{11}$$

где случайные элементы x_j, η_j, ξ_j такие же, как и в (6). Зависимость в (11) связана с наличием повторений в последовательности $s_1, s_2, \ldots, s_n$. Как и ранее, с использованием (5) для отношения правдоподобия $\omega_n(\varepsilon)$ получаем

$$w_n(\varepsilon) = \mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \sum_{\gamma_j \neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j} e^{\frac{2\pi i}{q}(x_{s_j}\eta_j + \xi_j)}\right) =$$

$$= \mathbf{E}\prod_{j=1}^{n}\left(1 + \Delta\sum_{\gamma_j \neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j} e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j x_{s_j}\eta_j}\right), \qquad \varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n), \tag{12}$$

и коэффициент при первой степени Δ в разложении $w_n(\varepsilon)$ равен

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{\gamma_j \neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j}\mathbf{E}e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j x_{s_j}\eta_j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{\gamma_j \neq 0} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j}\hat{p}_{x_{s_j}\eta_j}(\gamma_j) =$$

$$= q(p_0 + (1-p_0)a)\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right),$$

так что при условии $p_0 + (1-p_0)a \neq 0$ в качестве статистики линеаризации $v_n(\varepsilon)$ может быть выбрана статистика

$$v_n(\varepsilon) = n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\left(\delta_0(\varepsilon_j) - \frac{1}{q}\right) = \nu_0^{(0)}(\varepsilon).$$

Как и ранее, приведем первые два момента указанной статистики при гипотезе H_1:

$$\mathbf{E}_{H_1}\nu_0^{(0)} = n^{1/2}\Delta\frac{q-1}{q}(p_0+(1-p_0)a),$$

$$\mathbf{D}_{H_1}\,\nu_0^{(0)} = \frac{q-1}{q^2}\Big(1+(q-2)\Delta(p_0+(1-p_0)a)+ \\ +(q-1)\frac{n}{N}\Delta^2\left(p_0+(1-p_0)a^2-(p_0+(1-p_0)a)\right)^2\Big). \tag{13}$$

Если $p_0+(1-p_0)a=0$, то коэффициент при первой степени Δ в разложении $w_n(\varepsilon)$ равен нулю. Исходя из (12), вычислим коэффициент $k_2(\varepsilon)$ при Δ^2:

$$k_2(\varepsilon) = \sum_{j<k}\sum_{\substack{\gamma_j\neq 0\\ \gamma_k\neq 0}} e^{-\frac{2\pi i}{q}\gamma_j\varepsilon_j-\frac{2\pi i}{q}\gamma_k\varepsilon_k}\mathbf{E}e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j x_{s_j}\eta_j+\frac{2\pi i}{q}\gamma_k x_{s_k}\eta_k}.$$

Далее,

$$\mathbf{E}e^{\frac{2\pi i}{q}\gamma_j x_{s_j}\eta_j+\frac{2\pi i}{q}\gamma_k x_{s_k}\eta_k} = \mathbf{P}\{s_j\neq s_k\}\hat p_{x_1\eta_j}(\gamma_j)\hat p_{x_2\eta_k}(\gamma_k)+ \\ +\mathbf{P}\{s_j=s_k\}\sum_l p_l\hat p_{l\eta_j}(\gamma_j)\hat p_{l\eta_k}(\gamma_k),$$

и поэтому

$$k_2(\varepsilon)=q^2\sum_{j<k}\Big(\mathbf{P}\{s_j\neq s_k\}\Big(\mathbf{P}\{x_1\eta_j=\varepsilon_j\}-\frac{1}{q}\Big)\Big(\mathbf{P}\{x_2\eta_k=\varepsilon_k\}-\frac{1}{q}\Big)+ \\ +\sum_l p_l\mathbf{P}\{s_j=s_k\}\Big(\mathbf{P}\{l\eta_j=\varepsilon_j\}-\frac{1}{q}\Big)\Big(\mathbf{P}\{l\eta_k=\varepsilon_k\}-\frac{1}{q}\Big)\Big)= \\ =q^2\sum_{j<k}\Big(\mathbf{P}\{s_j=s_k\}p_0\Big(\delta_0(\varepsilon_j)-\frac{1}{q}\Big)\Big(\delta_0(\varepsilon_k)-\frac{1}{q}\Big)+ \\ +(1-p_0)\Big(\frac{1}{q}+\frac{q\delta_0(\varepsilon_j)-1}{q}a-\frac{1}{q}\Big)\Big(\frac{1}{q}+\frac{q\delta_0(\varepsilon_k)-1}{q}a-\frac{1}{q}\Big)\Big)= \\ =q^2\frac{1}{N}\left(p_0+(1-p_0)a^2\right)\sum_{j<k}\Big(\delta_0(\varepsilon_j)-\frac{1}{q}\Big)\Big(\delta_0(\varepsilon_k)-\frac{1}{q}\Big).$$

Здесь было учтено, что первое слагаемое в первой сумме для $k_2(\varepsilon)$ исчезает ввиду равенства (8) и условия $p_0+(1-p_0)a=0$.

Таким образом, при дополнительном условии $p_0+(1-p_0)a^2\neq 0$ в качестве статистики линеаризации $v_n(\varepsilon)$ может быть выбрана статистика

$$v_n(\varepsilon)=\left(n^{-1/2}\sum_{j=1}^{n}\Big(\delta_0(\varepsilon_j)-\frac{1}{q}\Big)\right)^2={\nu_0^{(0)}}^2(\varepsilon).$$

Оба условия $p_0+(1-p_0)a=0$, $p_0+(1-p_0)a^2\neq 0$ выполняются в единственном случае $p_0=a=0$, в котором мы попадаем в ситуацию принципиальной неразличимости рассматриваемых гипотез.

Предложение 2. а) *Если в схеме* (11) $n\to\infty$, $N\to\infty$, $\Delta\to 0$ *так, что* $n^{1/2}\Delta=c$, n/N *ограничено и выполнено условие* $p_0+(1-p_0)a\neq 0$, *то статистика линеаризации* $\nu_0^{(0)}$ *при гипотезе* H_1 *асимптотически имеет распределение* $\mathcal{N}\left(c\frac{q-1}{q}(p_0+(1-p_0)a),\frac{q-1}{q^2}\right)$ (*а при* H_0 — *распределение* $\mathcal{N}(0,(q-1)/q^2)$).

б) *Если* $n \to \infty$, $N \to \infty$, $\Delta \to 0$ *так, что* $(n/N)^{1/2}\Delta = c_1$, $p_0 + (1-p_0)a = 0$, *а* p_0 *и* a *отличны от нуля, то статистика линеаризации* $\nu_0^{(0)2}$ *асимптотически распределена при гипотезе* H_1 *как* $\frac{q-1}{q^2}(1-(q-1)ac_1^2)\chi_1^2$, *а при гипотезе* H_0 — *как* $\frac{q-1}{q^2}\chi_1^2$, *где случайная величина* χ_1^2 *имеет распределение* χ^2 *с одной степенью свободы.*

в) *Если* $p_0 = a = 0$, *то гипотезы* H_0 *и* H_1 *в принципе неразличимы.*

Доказательство предложения 2 основано на том факте, что условное распределение $\nu_0^{(0)}$ в условиях справедливости гипотезы H_1 при фиксации веса Хэмминга l вектора $(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ совпадает с распределением случайной величины $\nu_0^{(0)}(l)$, где

$$\nu_0^{(0)}(l) = n^{-1/2}\left(\sum_{j=1}^{\nu_1+\ldots+\nu_l}\left(\delta_0\left(\eta'_j + \xi'_j\right) - \frac{1}{q}\right) + \sum_{j=1}^{n-\nu_1-\ldots-\nu_l}\left(\delta_0\left(\xi''_j\right) - \frac{1}{q}\right)\right),$$

где $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_N$ — частоты исходов в равновероятной полиномиальной схеме, последовательность $\eta'_1, \eta'_2, \ldots$ имеет вероятностную структуру, последовательности $\eta_1\eta_2, \ldots, \xi'_1, \xi'_2, \ldots, \xi''_1, \xi''_2, \ldots$ имеют структуру последовательности $\xi_1, \xi_2, \ldots$, причем все случайные величины со штрихами независимы в совокупности.

Отсюда для характеристической функции $\nu_0^{(0)}$ имеем

$$\mathbf{E}e^{it\nu_0^{(0)}} = \sum_{l=0}^{N} C_N^l (1-p_0)^l p_0^{N-l}\mathbf{E}T_1^{\nu_1+\ldots+\nu_l}T_2^{n-\nu_1-\ldots-\nu_l},$$

где

$$T_1 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{q}a\Delta\right)e^{i\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}t} + \left(\frac{q-1}{q} - \frac{q-1}{q}a\Delta\right)e^{-i\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{q}t},$$

$$T_2 = \left(\frac{1}{q} + \frac{q-1}{q}\Delta\right)e^{i\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}t} + \left(\frac{q-1}{q} - \frac{q-1}{q}\Delta\right)e^{-i\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{q}t}.$$

Далее,

$$\mathbf{E}T_1^{\nu_1+\ldots+\nu_l}T_2^{n-\nu_1-\ldots-\nu_l} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(\frac{l}{N}\right)^k\left(1-\frac{l}{N}\right)^{n-k}T_1^kT_2^{n-k} = \left(\frac{l}{N}T_1 + \left(1-\frac{l}{N}\right)T_2\right)^n.$$

Поэтому

$$\mathbf{E}e^{it\nu_0^{(0)}} = \sum_{l=0}^{N} C_N^l(1-p_0)^l p_0^{N-l}\left(\frac{l}{N}T_1 + \left(1-\frac{l}{N}\right)T_2\right)^n =$$

$$= \sum_{l=0}^{N} C_N^l(1-p_0)^l p_0^{N-l}\left(1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}\Delta\left(1+(a-1)\frac{l}{N}\right) - \right.$$

$$\left. - \frac{t^2}{\sqrt{2n}}\left(\frac{q-1}{q^2} + \frac{(q-2)(q-1)}{q^2}\Delta\left(1+(a-1)\frac{l}{N}\right) + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right)^n.$$

Пусть теперь $p_0 + (1 - p_0)a \neq 0$ и $n^{1/2}\Delta = c$. Если

$$l = N(1 - p_0) + u\sqrt{Np_0(1 - p_0)},$$

то

$$1 + (a - 1)\frac{l}{N} = p_0 + (1 - p_0)a + uN^{-1/2}\sqrt{p_0(1 - p_0)}.$$

Далее,

$$1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}\Delta\left(1 + (a-1)\frac{l}{N}\right) - \\ - \frac{t^2}{\sqrt{2n}}\left(\frac{q-1}{q^2} + \frac{(q-2)(q-1)}{q^2}\Delta\left(1 + (a-1)\frac{l}{N}\right)\right) = \\ = 1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}\Delta(p_0 + (1-p_0)a) - \frac{t^2}{\sqrt{2n}}\frac{q-1}{q^2} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Учитывая приведенное в (13) значение для $\mathbf{E}\nu_0^{(0)}$, получаем

$$\mathbf{E}e^{it\left(\nu_0^{(0)} - \mathbf{E}\nu_0^{(0)}\right)} = e^{-\frac{t^2}{2}\frac{q-1}{q^2}}(1 + o(1)),$$

чем заканчивается доказательство пункта а).

Если

$$p_0 + (1 - p_0)a = 0, \qquad \left(\frac{n}{N}\right)^{1/2}\Delta = c_1, \qquad l = N(1 - p_0) + uN^{1/2}\sqrt{p_0(1 - p_0)},$$

то

$$a - 1 = -\frac{1}{1 - p_0} \quad \text{и} \quad 1 + (a - 1)\frac{l}{N} = -uN^{-1/2}\sqrt{\frac{p_0}{1 - p_0}}.$$

Поэтому

$$1 + \frac{it}{\sqrt{n}}\frac{q-1}{q}\Delta\left(1 + (a-1)\frac{l}{N}\right) - \\ - \frac{t^2}{\sqrt{2n}}\left(\frac{q-1}{q^2} + \frac{(q-2)(q-1)}{q^2}\Delta\left(1 + (a-1)\frac{l}{N}\right)\right) = \\ = 1 - \frac{it}{n}\frac{q-1}{q}c_1 u\sqrt{\frac{p_0}{1-p_0}} - \frac{t^2}{2n}\frac{q-1}{q^2} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

и

$$\mathbf{E}e^{it\nu_0^{(0)}} = e^{-t^2/2\frac{q-1}{q^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2} e^{-\frac{q-1}{q}\sqrt{\frac{p_0}{1-p_0}}c_1 itu}\,du(1 + o(1)) = \\ = e^{-t^2/2\frac{q-1}{q^2}}\left(1 - (q-1)ac_1^2\right)(1 + o(1)),$$

чем заканчивается доказательство п. б). Заключение п. в) проверяется непосредственно из структуры получаемой при этом случайной последовательности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Левин Б. Р., Шварц В.* Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. — М.: Радио и связь, 1985.
2. *Хелстром К.* Квантовая теория проверки гипотез и оценивания. — М.: Мир, 1979.