V. S. Makarov, Geometric methods of construction of discrete groups of motions of a Lobachevskii space, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Probl. Geom.*, 1983, Volume 15, 3–59

УДК 514.132
512.817.7

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ ГРУПП ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА ЛОБАЧЕВСКОГО

В. С. Макаров

Хорошо известна тесная связь двух важных проблем дискретной геометрии: проблемы дискретных групп движений пространства постоянной кривизны и проблемы правильных разбиений этого пространства. Как указывает Коксетер в [35], первые примеры разбиений плоскости Лобачевского встречаются в работе Клейна [36] 1879 г. в связи с проблемами теории автоморфных функций. Именно нужды этой теории привели А. Пуанкаре к необходимости построения теории дискретных групп движений плоскости Лобачевского, которая и была в основных чертах им обрисована в [42] при помощи открытой им же интерпретации плоскости Лобачевского на полуплоскости комплексного переменного. Используя классификацию двумерных поверхностей, Пуанкаре дал классификацию по родам дискретных групп движений плоскости Лобачевского. Позже Кебе показал [37], что дискретная группа движений плоскости Лобачевского зависит, вообще говоря, от $6p-6$ непрерывных параметров (p — род поверхности, полученной из фундаментальной области группы путем отождествления эквивалентных точек ее границы). Это обстоятельство раскрыло причину легкости построения примеров разбиений и дискретных групп движений в случае плоскости Лобачевского.

В [35] Коксетер указывает, что первые разбиения пространства Лобачевского встречаются в работе Стрингхема [31]. В 1883 г. А. Пуанкаре в мемуаре [43] о клейновых группах сделал попытку перенести на трехмерный случай результаты, полученные в [42] для плоскости Лобачевского, но сумел получить разбиения пространства Λ^3 лишь на бесконечные выпуклые многогранники бесконечного объема. В том же году вышла в свет работа Шлегеля [44], в которой он решает до конца вопрос о разбиениях n-мерного пространства Лобачевского Λ^n на равные конечные правильные многогранники и тем самым получает несколько примеров разбиений и дискретных групп движений с компактной фундаментальной областью в Λ^3 и Λ^4 (при $n \geqslant 5$ Λ^n не разбивается на конечные правильные многогранники). Отдельные примеры разбиений и соответствующих им дискретных групп движений как с компактной, так и с некомпактной фундаментальной областью конечного объема в Λ^3—Λ^9 можно найти у Гизекинга [47], Лебеля [39], Коксетера [35] и Ланнера [38]. Арифметические и алгебраические методы, развивавшиеся сначала совершенно независимо от геометрических, хотя и позволяли строить примеры дискретных групп движений пространства Лобачевского, доказывать теоремы общего характера, но получать соответствующие разбиения пространства при их помощи пока практически удается лишь в редких отдельных случаях. Таким образом, до работ [14], [15] было известно лишь конечное число различных разбиений пространства Лобачевского и некоторый хотя и бесконечный, но довольно узкий класс дискретных групп движений этого пространства (так называемые арифметические группы). Причины такого качественного отличия двумерного случая от случая размерности три и более, видимо, заключены в свойствах жесткости дискретных групп движений Λ^n при $n \geqslant 3$ (см. например, [41]). Но некоторые особенности геометрии пространства Лобачевского все же позволили создать своеобразные геометрические методы построения разбиений и дискретных групп движений пространства Лобачевского, которые дали возможность построить бесконечные серии самых различных разбиений пространства, и тем значительно расширили наши представления об изучаемых объектах. Подробному изложению этих методов и возникающих здесь проблем посвящена данная работа. Краткое их изложение читатель может найти в [24]; практическое применение — в [18]—[23], [26].

§ 1. ПРАВИЛЬНЫЕ РАЗБИЕНИЯ ПРОСТРАНСТВА И ДИСКРЕТНЫЕ ГРУППЫ ДВИЖЕНИЙ

В этом параграфе мы дадим основные определения и факты. Большинство определений может быть отнесено к любому метрическому пространству постоянной кривизны: евклидову E^n, сферическому S^n или пространству Лобачевского Λ^n. На протяжении же всей работы под термином «пространство» обычно понимается пространство Лобачевского.

Условимся называть *телом* замыкание связной пространственной области. *Заполнением* пространства телами назовем произвольное расположение тел в пространстве. Заполнение пространства телами назовем *упаковкой*, если тела заполнения не имеют общих внутренних точек. *Покрытием* пространства телами назовем такое заполнение, при котором любая точка пространства принадлежит хотя бы одному телу заполнения. *Разбиением* пространства будем называть такое его заполнение, которое является покрытием и упаковкой одновременно. Таким образом, если данная система тел образует разбиение пространства, то каждая точка пространства покрыта, т. е. принадлежит хотя бы одному из тел системы, и тела системы не имеют общих внутренних точек.

Если тела разбиения выпуклы, то легко доказывается, что они являются многогранниками с конечным или бесконечным числом граней. Если многогранники разбиения смежны по целым $(n-1)$-мерным граням, то разбиение называется **нормальным** (в противном случае — ненормальным). В дальнейшем мы будем обычно рассматривать лишь нормальные разбиения на конгруэнтные многогранники. Любое множество точек метрического пространства будем называть **фигурой**. Условимся называть фигуру **конечной**, если существует шар конечного радиуса, которому принадлежат все точки фигуры (часто такие фигуры называются ограниченными). **Движением** метрического пространства (фигуры) мы будем называть изометрическое отображение этого пространства (этой фигуры) на себя. Хорошо известно, что совокупность всех движений пространства (фигуры) образует группу.

Рассмотрим некоторое разбиение $\{\mathscr{P}\}$ пространства телами $\mathscr{P}$. Совокупность всех движений пространства, сохраняющих разбиение, образует группу Γ, которую мы будем называть **группой симметрии**. Движения, являющиеся элементами группы Γ, обычно называют преобразованиями симметрии данного разбиения (фигуры). Если группа такова, что какие бы два тела $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ из разбиения $\{\mathscr{P}\}$ ни взять, в группе Γ есть хотя бы одно движение g, при котором первое из этих тел переходит во второе, $g(\mathscr{P}_1)=\mathscr{P}_2$, то разбиение называется **правильным**. Еще говорят, что группа Γ действует транзитивно на данном разбиении. Если при этом тела разбиения являются многогранниками, то их называют **стереоэдрами** (или **параллелоэдрами**, если речь идет о группе движений евклидова пространства, состоящей из параллельных переносов). Транзитивная группа Γ разбиения $\{\mathscr{P}\}$ называется однотранзитивной, если для каждой пары $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ тел разбиения $\{\mathscr{P}\}$ существует ровно одно движение из группы Γ, переводящее $\mathscr{P}_1$ в $\mathscr{P}_2$. Группа Γ называется k-транзитивной, если хотя бы для одной пары тел $\mathscr{P}_1$ и $\mathscr{P}_2$ в группе Γ существует k различных движений, переводящих $\mathscr{P}_1$ в $\mathscr{P}_2$; легко доказывается при этом, что тогда и для любой пары тел в группе Γ существует k различных движений, переводящих одно тело в другое.

Пусть Γ — некоторая группа движений пространства. Тогда орбитой или траекторией $\Gamma(M_0)$ точки M_0 (по группе Γ) называется множество точек, полученных из точки M_0 всеми движениями группы Γ, т. е. $\Gamma(M_0)=\{M | M=g(M_0),\ g\in\Gamma\}$. Точки одной орбиты называются эквивалентными (или гомологичными) по группе Γ точками пространства. Группа Γ движений пространства называется дискретной, если орбита любой точки M_0 пространства по этой группе дискретна, т. е. существует такое число r, что в шаре радиуса r с центром в любой точке $g(M_0)$ орбиты $\Gamma(M_0)$ лежит конечное число различных точек этой орбиты (тогда, за счет уменьшения r, можно считать, что в указанном шаре нет точек орбиты, отличных от $g(M_0)$).

Фундаментальной областью дискретной группы Γ называется такая совокупность точек рассматриваемого пространства, что никакие две точки из этой совокупности не эквивалентны по группе Γ и что любая точка пространства эквивалентна одной из точек этой совокупности. В большинстве рассматриваемых случаев фундаментальную область удается выбрать в виде выпуклого многогранника с конечным числом граней (часть которых к области не присоединены) и потому в дальнейшем мы и предполагаем ее так выбранной. При движениях из группы Γ фундаментальная область переходит в области, ей эквивалентные, а вся совокупность образов фундаментальной области образует разбиение пространства, причем группа Γ действует однотранзитивно на этом разбиении. Иногда фундаментальной областью группы называют также и замыкание определенной выше области (в этих случаях часто употребляют термины «фундаментальный многогранник», «камера», «ячейка», «клетка» и т. п.) — это бывает технически более удобным и мы сохраним за собой право на такую вольность речи; в этом случае граничные точки фундаментальной области (многогранника) могут быть эквивалентными по группе. Примерами фундаментальных областей могут служить области Дирихле (см. ниже) точек общего (относительно группы) положения. Ясно, что фундаментальная область определяется по группе неоднозначно.

В геометрической кристаллографии евклидова пространства обычно рассматривают дискретные группы некоторого особого вида. Эти группы называются федоровскими в честь выдающегося русского геометра и кристаллографа Е. С. Федорова (1853—1919), который первым дал их полный вывод. Федоровской группой принято называть (см., например, [12]) группу Φ движений пространства Евклида, обладающую следующими свойствами:

r) существует хотя бы одна точка A пространства, изолированная в классе $\{A_\Phi\}=\{f(A)\,|\,f\in\Phi\}$ эквивалентных ей точек, т. е. существует достаточно малый радиус r, называемый радиусом дискретности точки A, такой, что шар $\omega=\omega(r, f(A))$ этого радиуса, имеющий центр в точке $f(A)$ орбиты точки A, содержит единственную точку этой орбиты — центр шара (локальная дискретность);

R) существует хотя бы одна такая точка B пространства, что класс эквивалентных ей точек расположен в пространстве однородно, т. е. существует такой достаточно большой радиус

R, называемый радиусом однородности точки B, что внутри любого шара ω этого радиуса найдется точка, эквивалентная B (локальная однородность).

Требования r) и R), накладываемые на федоровскую группу, весьма естественны: они моделируют представление о структуре кристалла. В теории далее доказывается (см., например, [12]), что из локальной однородности следует глобальная однородность — существование достаточно большого радиуса R' такого, что внутри любого шара этого радиуса найдется точка, эквивалентная по группе Φ любой наперед заданной точке пространства (при этом $R' \leqslant 2R$). Затем из глобальной однородности и локальной дискретности следует глобальная дискретность — дискретность орбиты любой точки.

Из определения федоровской группы следует довольно трудная основная теорема математической кристаллографии евклидова пространства: всякая федоровская группа Φ имеет подгруппу T параллельных переносов той же размерности (теорема Шенфлиса—Бибербаха), из которой сразу следует, что подгруппа T — нормальный делитель конечного индекса в группе Φ. Отсюда получается конечность числа федоровских групп евклидова пространства, ограниченность их фундаментальных областей, возможность выбора фундаментальной области в виде многогранника с конечным числом граней и полный вывод всех федоровских групп, например при помощи алгоритма Цассенхауза [48]. Далее следует теория параллелоэдров и стереоэдров.

В геометрии Лобачевского естественно сохранить термин «федоровская группа» для дискретных групп движений, обладающих свойствами r) и R). Из этих свойств, как и в евклидовом случае, следует глобальная дискретность и глобальная однородность (доказательства почти дословно те же). Для таких групп сравнительно просто доказывается теорема о конечности объема фундаментальной области и существование фундаментальной области в виде конечного многогранника с конечным числом граней. Это означает, что факторпространство G/Φ группы G всех движений пространства Лобачевского по федоровской группе Φ компактно. В теории дискретных подгрупп групп Ли дискретная подгруппа H группы Ли G называется решеткой, если факторпространство G/H имеет конечный объем. При этом решетка называется р а в н о м е р н о й, если факторпространство G/H компактно, и неравномерной — в противном случае. В этом смысле всякая федоровская группа является равномерной решеткой и, наоборот, всякая равномерная решетка в группе движений пространства Лобачевского является федоровской группой. Но в геометрической кристаллографии и в геометрической теории чисел решеткой принято называть орбиту точки евклидова пространства относительно абелевой дискретной группы параллельных переносов. Во избежание путаницы мы обычно не будем употреблять термин «равномерная решетка», а будем пользоваться более привычным для геометра эквивалентным ему термином «федоровская группа».

Однако в пространстве Лобачевского, в отличие от пространства Евклида, существуют неравномерные решетки — дискретные группы, фундаментальная область которых некомпактна, но имеет конечный объем (для таких групп мы иногда будем употреблять термин «квазифедоровская»). Так как в основном нас будут интересовать лишь дискретные группы с конечным объемом фундаментальной области, то, если не оговорено особо, термин «дискретная группа» обычно будет синонимом термина «решетка». Если же нам потребуется подчеркнуть, что данная дискретная группа является равномерной решеткой, то мы употребим термин «федоровская группа».

При изучении дискретных групп часто используются фундаментальные области некоторого специального вида, называемые *областями Дирихле* (или областями Дирихле—Вороного, или областями действия). В общем случае для произвольной дискретной системы $\mathscr{E}$ точек пространства L областью Дирихле D_A, точки $A \in \mathscr{E}$ называется совокупность всех точек пространства, каждая из которых находится от точки A не дальше, чем от остальных точек системы $\mathscr{E}$:

$$D_{A\mathscr{E}} = \{M \mid M \in L, \ \rho(A, M) \leqslant \rho(A', M), \ A' \in \mathscr{E}\}.$$

Легко видеть, что область Дирихле данной точки является выпуклым многогранником (может быть и некомпактным) и что области Дирихле всех точек системы $\mathscr{E}$ образуют нормальное разбиение плоскости — разбиение Дирихле системы $\mathscr{E}$.

Пусть теперь в нашем распоряжении имеется дискретная группа Γ. Возьмем в качестве дискретной системы $\mathscr{E}$ орбиту $\Gamma(A)$ какой-либо точки A пространства и разбиение Дирихле, определяемое этой точкой. Это разбиение является не только нормальным, но и правильным: группа Γ действует транзитивно на этом разбиении. Если точка A является точкой общего положения относительно группы (т. е. не является неподвижной ни при одном движении $\gamma \in \Gamma$, отличном от тождественного), то группа Γ действует однотранзитивно на разбиении $D_{A, \Gamma(A)}$, а области Дирихле точек орбиты являются фундаментальными областями группы Γ. Говоря об областях Дирихле группы Γ, мы обычно будем подразумевать именно такие области:

$$D_\Gamma = \{M \mid M \in L, \ \rho(A, M) \leqslant \rho(\gamma(A), M); \ \gamma \in \Gamma\}.$$

Топология области Дирихле, вообще говоря, зависит от выбора точки A пространства (и от метрических параметров группы, если таковые имеются).

Следуя [10], два нормальных разбиения пространства на выпуклые многогранники будем называть принадлежащими к одному комбинаторно-топологическому типу (или топологически одинаковыми), если существует такое взаимно однозначное отображение одного из этих разбиений на другое, при котором совокупность стереоэдров первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность стереоэдров второго разбиения, совокупность $(n-1)$-мерных граней первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность $(n-1)$-мерных граней второго и т. д. и, наконец, совокупность вершин первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность вершин второго, так что при этом инцидентности сохраняются в обе стороны (иными словами, разбиения изоморфны как геометрические комплексы). Наконец, два разбиения назовем дуальными друг другу, если они дуальны как геометрические комплексы, т. е. если совокупность вершин первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность стереоэдров второго разбиения, совокупность ребер первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность $(n-1)$-мерных граней второго разбиения и т. д. и, наконец, совокупность многогранников первого разбиения взаимно однозначно отображается на совокупность вершин второго разбиения так, что сохраняются инцидентности в обе стороны.

Ограничиваясь в этом параграфе лишь кратким перечнем некоторых общих утверждений о дискретных группах движений и о разбиениях пространства Лобачевского, мы все же приведем одну из теорем с доказательством (принадлежащим школе Б. Н. Делоне), ибо техника доказательства может пригодиться и в других аналогичных ситуациях. Дадим чисто геометрическое простое доказательство существования компактной фундаментальной области у федоровской группы пространства Лобачевского. Докажем, что таковой является, например, область Дирихле точки общего (относительно группы) положения.

Теорема 0. Если произвольную точку O общего положения n-мерного пространства Лобачевского Λ^n повторить федоровской группой, то область Дирихле полученной системы гомологических точек будет конечным многогранником с конечным числом граней.

Докажем сперва конечность этого многогранника. Возьмем шар достаточно большого радиуса l, $l>4R$, с центром в точке O. Тогда все точки сферы S^{n-1}, ограничивающей этот шар, не могут принадлежать области Дирихле точки O. Действительно, сферу S^{n-1} можно покрыть конечным числом шаров радиуса R. Каждый из этих шаров содержит по точке O', гомологичной O. Поэтому все точки сферы S^{n-1}, попавшие в один такой шар, находятся, ввиду выбора числа l, ближе к точке O', нежели к точке O, и, следовательно, не могут принадлежать области Дирихле точки O ввиду самого определения этой области.

Из доказанного факта следует, ввиду выпуклости области Дирихле, что и точки, лежащие вне сферы $S^{n-1}(O, l)$, не могут принадлежать области Дирихле точки O. Действительно, если бы нашлась такая точка A, то отрезок OA, пересекая сферу S^{n-1}, содержал бы точки, не принадлежащие области Дирихле, что противоречило бы ее выпуклости. Следовательно, область Дирихле точки O лежит внутри сферы $S^{n-1}(O, l)$.

Покажем теперь конечность числа граней области Дирихле. Так как область Дирихле конечна, то всегда можно описать сферу достаточно большого радиуса с центром в точке O такую, что область Дирихле точки O целиком в ней содержится. Тогда, если описать сферу в два раза большего радиуса с тем же центром в точке O, то, согласно определению области Дирихле, на образование ее граней будут влиять лишь точки, лежащие в этой сфере, а так как их конечное число (ввиду дискретности группы) и каждой из них соответствует не более одной грани, то и число граней области Дирихле конечно. Этим заканчивается доказательство всей теоремы.

Другие (общеизвестные и нужные нам для дальнейшего) утверждения мы сформулируем без доказательств (см., например, [34], [30], [1]).

Хорошо известно, например, что всякая федоровская группа Φ, свободно действующая в Λ^n (т. е. не имеющая элементов конечного порядка), есть фундаментальная группа пространства ее орбит, $\Phi\diagdown\Lambda^n$, которое является в этом случае компактным трехмерным локально Лобачевского многообразием. Избавиться от кручения в федоровской группе теоретически можно, используя, например, метод Райдемейстера—Шраера (практическое его применение несколько затруднительно [34]).

При конструктивном наличии фундаментальной области в виде компактного многогранника с конечным числом граней легко выписываются все образующие группы Φ и ее определяющие соотношения. Чтобы получить образующие, достаточно выписать движения, переводящие фундаментальный многогранник в многогранники, смежные с ним по гиперграням. Выделив классы эквивалентных по этим движениям $(n-2)$-мерных ребер (циклы ребер), мы убеждаемся, что сумма двугранных углов при ребрах одного цикла равна $2\pi/k$, где k — натуральное (при этом цикл называется несущественным, если $k=1$, и существенным — в противном случае). Обход вокруг ребра фундаментального многогранника дает нам определяющее соотношение, причем различных таких соотношений столько, сколько различных циклов ребер у фундаментального многогранника. Если при этом все циклы несущественны, то федоровская группа не имеет кручения (и наоборот). Теорема Пуанкаре дает критерий существования дискретных групп: достаточно найти такой многогранник в пространстве Лобачевского и такие движения, попарно отождествляющие его грани, чтобы сумма углов при ребрах каждого из циклов, индуцированных этим отождествлением, была равна $2\pi/k$, k — натуральное [40], [42]. Несколько менее известны широкому кругу читателей теоремы А. Д. Александрова о разбиениях [1] и потому мы их приведем в полной формулировке.

Пусть дан комплекс K^n, образованный n-мерными многогранниками. Предполагается, что каждому многограннику принадлежат все его грани. Комплекс рассматривается абстрактно, т. е. хотя каждый его многогранник есть многогранник из данного пространства (евклидова E^n, сферического S^n или пространства Лобачевского Λ^n), тем не менее комплекс K^n не считается погруженным в R^N, а образует сам по себе соответствующий полиэдр $\bar{K}^n$.

Предполагается далее, что комплекс K^n обладает следующими свойствами:

1) Среди многогранников комплекса есть только конечное число существенно различных, т. е. геометрически не равных друг другу.

2) Каждая $(n-1)$-мерная грань любого многогранника P из комплекса K^n является вместе с тем гранью одного и только одного другого многогранника P' из K^n.

3) (Условие сильной связности»). Если P и P' — любые два многогранника из K^n, то существует соединяющая их цепь. При этом под цепью понимается конечная последовательность многогранников, в которой каждые два соседних смежны по $(n-1)$-мерной грани. То, что цепь соединяет многогранники P и P', означает, что первый и последний ее многогранники суть как раз P и P'.

4) Если Q^k есть k-мерная $(0 \leqslant k \leqslant n-2)$ грань многогранника P из K^n, то она считается принадлежащей вместе с тем многограннику P' тогда и только тогда, когда существует соединяющая P и P' цепь, в которой каждые два соседние многогранника смежны по $(n-1)$-мерной грани, содержащей грань Q^k.

Кроме комплекса K^n, мы предполагаем заданным непрерывное отображение соответствующего полиэдра $\bar{K}^n$ в данное R^n, удовлетворяющее двум условиям:

1) Для каждого многогранника это отображение является конгруэнтным (изометричным).

2) Если многогранники P и P' смежны по грани Q^{n-1}, то их образы $\bar{P}$ и $\bar{P}'$ лежат в окрестности образа $\bar{Q}^{n-1}$ грани Q^{n-1} по разные стороны от него. (Если многогранники выпуклы, то они вообще лежат по разные стороны от плоскости грани $\bar{Q}^{n-1}$, но если они не выпуклы, то это требуется лишь в окрестности этой грани).

Таким образом, многогранники погружаются в R^n.

В этих предположениях доказываются две основные теоремы.

Теорема 1. Образ полиэдра $\tilde{K}^n$ в R^n есть все R^n, или, иными словами, описанный выше процесс прикладывания многогранников по целым граням приводит к заполнению всего пространства, причем для любой ограниченной части пространства найдется конечное число многогранников комплекса K^n, образы которых уже покрывают эту часть пространства.

Более глубокий вопрос состоит в отыскании условий, при которых это заполнение будет осуществляться без взаимных пересечений многогранников, т. е. отображение полиэдра $\tilde{K}^n$ в R^n будет взаимно однозначным. На этот вопрос отвечает следующая теорема.

Теорема 2. Для того чтобы указанное отображение полиэдра $\tilde{K}^n$ в R^n было взаимно однозначным, необходимо и достаточно, чтобы оно было взаимно однозначным вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани комплекса K^n, т. е. чтобы сходящиеся в такой грани многогранники при отображении не перекрывались в сколь угодно малой ее окрестности. Иными словами, для того чтобы заполнение пространства многогранниками осуществлялось в целом без перекрытий, достаточно, чтобы оно осуществлялось без перекрытий «локально» вокруг каждой $(n-2)$-мерной грани.

Как отмечалось, одной из основных теорем математической кристаллографии является теорема Шенфлиса — Бибербаха, состоящая в том, что каждая федоровская группа Ф n-мерного евклидова пространства содержит федоровскую подгруппу конечного индекса, состоящую целиком из параллельных переносов. Именно эта теорема является одной из тех теорем, которые лежат в основе вывода всех федоровских групп евклидова пространства, и потому было бы весьма интересно выяснить вопрос о том, имеется ли в пространстве Лобачевского удовлетворительный аналог этой теоремы и какова его роль в теории дискретных групп.

Естественным аналогом теоремы Шенфлиса—Бибербаха для n-мерного пространства Лобачевского могло бы служить утверждение: всякая федоровская группа Г движений n-мерного пространства Лобачевского Λ^n содержит федоровскую подгруппу H, состоящую целиком из сдвигов и имеющую в Г конечный индекс.

Алгебраическим аналогом теоремы Шенфлиса—Бибербаха может (в некоторой степени) служить теорема о чистой подгруппе (см., например, [30]): всякая конечно порожденная подгруппа Г группы $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ содержит чистую нормальную подгруппу конечного индекса (подгруппа $\Gamma \subset \mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ называется чистой, если каждый ее элемент, отличный от единицы, чист; элемент $g \in \mathrm{GL}(n, k)$ называется чистым, если мультипликативная группа $A(g)$, порожденная собственными значениями g, не содержит нетривиальных корней из единицы; k — поле алгебраических чисел) или же следующее утверждение, известное как лемма Сельберга (лемма 8 работы [45]).

Лемма (Сельберга). Пусть Γ — группа матриц порядка n с конечным числом образующих (матрицы не обязаны быть вещественными и от Γ не требуется дискретности); тогда Γ содержит нормальный делитель H конечного индекса, который не содержит элементов конечного порядка, отличных от единичного элемента.

Выяснению геометрического строения таких подгрупп групп движений пространства Лобачевского посвящена работа [8]. В ней, в частности, доказывается, что в приведенной выше формулировке аналог теоремы Шенфлиса—Бибербаха верен для федоровских групп двумерного пространства Лобачевского, но не верен для n-мерного при $n \geqslant 3$. Доказательство последнего утверждения основано на нескольких простых леммах из алгебры движений пространства Лобачевского. Мы упомянем две из них: (1) произведение двух поворотов второго порядка вокруг скрещивающихся осей есть винтовое движение; (2) произведение двух сдвигов со скрещивающимися осями есть винтовое движение. В качестве одного из следствий получаем

Утверждение. Во всякой федоровской группе пространства Лобачевского Λ^n ($n \geqslant 3$) существует подгруппа конечного индекса, являющаяся нормальным делителем и состоящая только из сдвигов и винтовых движений с иррациональными (относительно π) углами поворотов. Геометрически различных винтовых движений с рациональными углами поворотов в федоровской группе пространства Лобачевского Λ^n ($n \geqslant 3$) конечное число.

Естественно возникает ряд вопросов: существуют ли федоровские группы, состоящие из одних только иррациональных винтовых движений, можно ли образующие федоровской группы без кручения задать только сдвигами и рациональными винтовыми движениями, что можно сказать аналогичного о структуре квазифедоровских групп, и ряд других интересных (и, видимо, трудных) вопросов, решение которых, к сожалению, не слишком приблизило бы нас к решению главной задачи геометрической кристаллографии пространства Лобачевского — конструктивному описанию всех федоровских (и квазифедоровских) групп. Это показывает, что методами, аналогичными используемым в евклидовом варианте теории, получить все федоровские группы, видимо, довольно безнадежно и потому естественно попытаться исследовать такие группы путем построения разбиений пространства и исследования их групп симметрии (т. е. идти по пути А. Пуанкаре: от разбиений к группам). Поэтому особое значение приобретают методы построения дискретных групп пространства Лобачевского, позволяющие получить некоторую полезную информацию о дискретных группах и разбиениях пространства Лобачевского и хотя бы приблизительно представить себе разнообразие и богатство этих групп. Именно таким методам и будут посвящены следующие параграфы.

§ 2. МЕТОД ВАРИАЦИИ ОДНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ПАРАМЕТРА

2.1. Суть метода. Теорема жесткости Мостова [41] говорит об отсутствии непрерывных параметров в дискретных группах движений (с конечным объемом фундаментальной области) в пространствах Лобачевского Λ^n при $n \geqslant 3$. Это обстоятельство сильно затрудняет поиски стереоэдров пространства Лобачевского, но в принципе не мешает использовать метрическую деформацию многогранника с целью выяснения, может ли существовать стереоэдр данного комбинаторного типа и сколько возможно построить различных разбиений пространства Лобачевского стереоэдрами рассматриваемого типа. Зависимостью угловых параметров многогранников от их линейных размеров пользовались еще Пуанкаре [42], [43] и Шлегель [44] в 80-х годах прошлого века, но сам метод вариации параметра был явно сформулирован, видимо, лишь в 1980 году в работах [24], [46] (Сулливан в [46] этот метод называет принципом непрерывности). В общем виде метод вариации одного параметра можно сформулировать следующим образом. Пусть все метрические параметры некоторого многогранника M являются непрерывными функциями одного и того же действительного переменного t, изменяющегося в некотором интервале (a, b). Иными словами, многогранник M метрически полностью определяется заданием значения параметра t из (a, b). Тогда путем использования конкретных особенностей многогранника M, можно найти конкретную функциональную зависимость от t угловых и линейных параметров многогранника M, исследовать характер изменения этих параметров и определить, существуют ли такие значения $t \in (a, b)$, при которых многогранник M является стереоэдром (а при необходимости и найти конкретно все такие значения t). Иными словами, варьируя указанный параметр в некоторых допустимых пределах, мы стараемся получить многогранник, разбивающий пространство Лобачевского.

Имеется несколько естественных классов многогранников, к элементам которых легко применим этот метод: класс правильных многогранников, класс архимедовых (равноугольно-полуправильных) многогранников, класс равногранно-полуправильных многогранников (метрически дуальных архимедовым). Особенно просто и естественно применение этого метода в случае классов правильных и равноугольно-полуправильных многогранников: все двугранные углы у любого многогранника, принадлежащего одному из этих классов, равны и одинаковым образом изменяются с изменением какого-либо линейного параметра, например радиуса ρ вписанной сферы. Используя непрерывную зависимость двугранного угла от параметра ρ, определяемую видом рассматриваемого многогранника, мы легко можем установить, существуют ли такие значения параметра ρ, при которых двугранный угол составляет целую часть от 2π. Если при этом все биссекториальные плоскости двугранных углов многогранника являются плоскостями его симметрии, то из теоремы 2 А. Д. Александрова сразу же следует, что рассматриваемый многогранник является стереоэдром; в противном случае необходимы дополнительные исследования. Прежде чем перейти к конкретным примерам, поясняющим применение метода вариации одного параметра, отметим, что этот метод (так же, как и метод вариации нескольких параметров, являющийся обобщением рассматриваемого метода) применим и в случае сферического пространства S^n. В следующих пунктах этого параграфа мы поясним действие этого метода на конкретных примерах некоторых классов многогранников.

2.2. Разбиения пространства Лобачевского на правильные многогранники. Метод вариации одного линейного параметра особенно прост и нагляден в применении к вопросу о разбиении пространств на правильные многогранники. Поэтому мы и рассмотрим здесь этот вопрос, несмотря на то, что его полное решение было получено для случая конечных правильных многогранников впервые, видимо, В. Шлегелем в 1883 году (см. [44]). Разбиения на предельные правильные многогранники (т. е. правильные многограники с бесконечно удаленными вершинами) и на орисферические правильные многограники (т. е. на многогранники, описанные около орисферы) были получены впервые, видимо, Коксетером (см., например, [35]). Это полезно сделать и потому, что решение вопроса о разбиениях пространства Лобачевского правильными многогранниками повторялось неоднократно (см., например, [28], [19]). Чтобы не утомить читателя и в то же время достаточно подробно проиллюстрировать действие метода вариации одного параметра, мы приводим здесь полное решение вопроса лишь для $n=2$ и $n=3$, так как полученные результаты будут использованы впоследствии для построения более сложных примеров разбиений. Мы дадим в конце пункта (следуя [35]) сводку всех результатов, используя для обозначения разбиений символ Шлефли $\{p, q, r, \ldots, s, t\}$, означающий, что пространство разбивается правильными многогранниками $\{p, q, r, \ldots, s\}$, конечными или орисферическими, так, что вершинная фигура (выпуклая оболочка концов ребер, выходящих из одной вершины) есть правильный многогранник $\{q, r, \ldots, s, t\}$ (например, символ $\{3, 7\}$ означает разбиение двумерной плоскости Лобачевского на правильные треугольники, сходящиеся по 7 в каждой вершине (вершинная фигура — семиугольник); $\{4, 3, 3\}$ — разбиение трехмерного сферического пространства S^3 на кубы, сходящиеся в вершинах по четыре симплициально (вершинная фигура — правильный симплекс); {4, 3, 3, 4} — разбиение четырехмерного евклидова пространства E^4 на кубы, сходящиеся в вершинах октаэдрически).

Плоскость Лобачевского Λ^2 разбивается любым правильным n-угольником счетным числом способов. Действительно, в плоскости Лобачевского угол φ любого правильного n-угольника является непрерывной функцией радиуса r описанной окружности и изменяется в пределах от $\pi(n-2)/n$ (величина угла евклидова правильного n-угольника) до нуля при изменении радиуса r от нуля до ∞:

$$\lim_{r\to 0}\varphi(r)=\frac{\pi(n-2)}{n}, \quad \lim_{r\to\infty}\varphi(r)=0.$$

Поэтому при $n>6$, за счет выбора величины радиуса r, угол φ может быть сделан равным любой m-ой части ($m\geqslant 3$) полного угла, т. е. существуют такие значения $r=r_m$ радиуса описанной окружности, что $\varphi(r_m)=\varphi_m=\frac{2\pi}{m}$, $m=3, 4\ldots.$ Кроме того, биссектриса угла правильного n-угольника всегда является осью его симметрии. Этих двух фактов достаточно (см. [1], а также § 1) для того, чтобы правильные многоугольники с указанными величинами углов разбивали плоскость Лобачевского, а само разбиение порождалось отражениями в сторонах n-угольников. При этом в вершине многоугольника (узле разбиения) будет сходиться ровно m таких n-угольников. Легко видеть, что в случае $n=3$ число m может принимать значения $m=7, 8,\ldots$; при $n=4$ число $m=5, 6,\ldots$, при $n=5, 6$ число $m=4, 5, 6\ldots$, при $n\geqslant 7$ число $m=3, 4,\ldots$.

В случае трехмерного пространства Лобачевского Λ^3 у нас имеется только пять (конечных) правильных многогранников: тетраэдр (симплекс), гексаэдр (куб), додекаэдр, октаэдр и икосаэдр. Если пространство разбивается тетраэдрами, кубами или додекаэдрами, то в узле разбиения сходятся правильные трехгранные углы, и сфера достаточно малого радиуса ε с центром в узле разбиения разбивается гранями многогранников на правильные (сферические) треугольники. Таких разбиений сферы, как известно, три: тетраэдрическое, октаэдрическое и икосаэдрическое. Следовательно, для того чтобы пространство Лобачевского разбивалось на симплексы, кубы или додекаэдры, необходимо, чтобы (плоский) угол грани этих многогранников был равным (плоскому) центральному углу симплекса $\omega_T=109°28'16''$, октаэдра $\omega_O=90°$ или икосаэдра $\omega_И=63°26'06''$. (Центральным плоским углом правильного многогранника называется угол, под которым видно ребро из центра многогранника. Значения углов взяты из [6]). Но при возрастании радиуса описанной сферы от 0 до ∞ угол плоской грани симплекса монотонно убывает от 60° до 0° и потому не может при своем изменении стать равным одному из указанных выше углов $\omega_И$, ω_O или ω_T. Поэтому симплексы не могут разбивать пространства Лобачевского Λ^3 (сравни [28]).

Плоский угол грани куба при указанной вариации параметра r изменяется в пределах от $90°$ до $0°$ и потому найдется (и притом единственное) такое значение параметра $r=r_0$, при котором плоский угол φ куба станет равным центральному углу $\omega_И$ икосаэдра. Так как правильный многогранный угол однозначно определяется величиной своего плоского угла, то при значении $r=r_0$ трехгранный угол куба будет конгруэнтен центральному трехгранному углу икосаэдра (т. е. углу, под которым видна грань икосаэдра из его центра). Опираясь на теорему 2 из [1] (см. § 1), нетрудно показать, что куб таких размеров разбивает пространство и что в узле разбиения многогранные углы сходятся так, как сходятся центральные многогранные углы икосаэдра (вершинная фигура — икосаэдр; в этом случае будем говорить, что мы имеем икосаэдрическое схождение в узле разбиения). Таким образом, на кубы пространство Лобачевского Λ^3 разбивается и притом единственным (икосаэдрическим) способом.

Рассматривая аналогичным образом додекаэдр, мы видим, что плоский угол его грани монотонно убывает от $108°$ до $0°$. При этом изменении он пройдет два значения: $\varphi_1=\varphi_0=90°$ и $\varphi_2=\omega_И=63°21'06''$, откуда следует, что додекаэдр разбивает пространство Лобачевского Λ^3 двумя способами: октаэдрическим и икосаэдрическим. Переходя к октаэдру, замечаем, что он может (теоретически) разбивать пространство разве лишь кубическим способом, ибо гоноэдры (т. е. многогранные углы) октаэдра четырехгранны. Но плоский угол грани октаэдра убывает от $60°$ до $0°$, а угол ω_K, под которым видно ребро из центра куба (плоский центральный угол куба), равен $70°31'44''$, и потому октаэдр не может разбивать пространства Лобачевского Λ^3.

Наконец, икосаэдр может (теоретически) разбивать пространство лишь додекаэдрическим способом, ибо у него гоноэдры пятигранны. Плоский угол икосаэдра варьируется в пределах от $60°$ до $0°$, а центральный плоский угол додекаэдра $\omega_Д = 41°48'37''$. Следовательно, при некотором значении радиуса описанной сферы гоноэдры икосаэдра будут конгруэнтны центральным гоноэдрам додекаэдра и потому икосаэдр действительно разбивает пространство Лобачевского Λ^3 и притом единственным (додекаэдрическим) способом.

Таким образом, трехмерное пространство Лобачевского Λ^3 разбивается только кубами (икосаэдрическим способом), додекаэдрами (двумя способами — октаэдрическим и икосаэдрическим) и икосаэдрами (додекаэдрическим способом). На симплексы и октаэдры Λ^3 не разбивается.

Аналогичным образом решается вопрос и о разбиении n-мерного пространства Лобачевского при $n\geqslant 4$ (см., например, [35]). Имея в виду дальнейшие приложения, мы перечислим здесь, следуя [35], разбиения сферы S^n, евклидова пространства E^n и пространства Лобачевского Λ^n на правильные многогранники.

$n=2$. Сфера S^2. 1) $\{3,3\}$ — симплициальное (разбиение на симплексы, сходящиеся в вершинах по три); 2) $\{4, 3\}$ — кубическое; 3) $\{5, 3\}$ — додекаэдрическое; 4) $\{3, 4\}$ — октаэдрическое; 5) $\{3, 5\}$ — икосаэдрическое.

Евклидова плоскость E^2. 1) $\{4,4\}$ — квадратное; 2) $\{3,6\}$ — треугольное; 3) $\{6, 3\}$ — гексагональное.

Плоскость Лобачевского Λ^2. 1) $\{n, m\}$, ($n=3$, $m\geqslant 7$; $n=4$, $m\geqslant 5$; $n=5{,}6$, $m\geqslant 4$; $n\geqslant 7$, $m\geqslant 3$); 2) $\{\infty, p\}$ — разбиения на правильные орициклические многоугольники, сходящиеся в вершинах по p ($p\geqslant 3$); 3) $\{p, \infty\}$ — разбиения на предельные (вершины на абсолюте) правильные p-угольники.

$n=3$. Сфера S^3. 1) $\{3, 3, 3\}$ — симплициальное; 2) $\{4, 3, 3\}$ — кубическое; 3) $\{5, 3, 3\}$ — 120-гранное; 4) $\{3, 3, 4\}$ — 2^4-гранное (октаэдрическое); 5) $\{3, 4, 3\}$ — 24-гранное; 6) $\{3, 3, 5\}$ — 600-гранное.

Евклидово пространство E^3. 1) $\{4, 3, 4\}$ — кубическое.

Пространство Лобачевского Λ^3. 1) $\{3, 5, 3\}$ — разбиение на икосаэдры $\{3, 5\}$, сходящиеся додекаэдрически $\{5, 3\}$; 2) $\{4, 3, 5\}$ — разбиение на кубы $\{4, 3\}$, сходящиеся икосаэдрически $\{3, 5\}$; 3) $\{5, 3, 4\}$ — разбиение на додекаэдры, сходящиеся октаэдрически; 4) $\{5, 3, 5\}$ — разбиение на додекаэдры, сходящиеся икосаэдрически; 5) $\{3, 4, 4\}$ — разбиение на предельные октаэдры; 6) $\{3, 3, 6\}$ — разбиение на предельные симплексы; 7) $\{4, 3, 6\}$ — разбиение на предельные кубы; 8) $\{5, 3, 6\}$ — разбиение на предельные додекаэдры; 9) $\{4, 4, 3\}$ — разбиение на орисферические многогранники с квадратными гранями, схождение в узле кубическое; 10) $\{6, 3, 3\}$ — разбиение на орисферические многогранники с шестиугольными гранями, схождение в узле симплициальное; 11) $\{6, 3, 4\}$ — разбиение на орисферические многогранники с шестиугольными гранями, схождение в узле октаэдрическое; 12) $\{6, 3, 5\}$ — разбиение на орисферические многогранники с шестиугольными гранями, схождение в узле икосаэдрическое, 13) $\{6, 3, 6\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники с шестиугольными гранями; 14) $\{4, 4, 4\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники с квадратными гранями; 15) $\{3, 6, 3\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники с треугольными гранями.

$n=4$. Сфера S^4. 1) $\{3, 3, 3, 3\}$ — симплициальное; 2) $\{3, 3, 3, 4\}$ — октаэдрическое; 3) $\{4, 3, 3, 3\}$ — кубическое.

Евклидово пространство E^4. 1) $\{3, 3, 4, 3\}$ — разбиение на 2^4-гранники (октаэдры) $\{3, 3, 4\}$, сходящиеся в узле 24-гранно; 2) $\{3, 4, 3, 3\}$ — разбиение на 24-гранники, сходящиеся в узле кубически; 3) $\{4, 3, 3, 4\}$ — разбиение на кубы, сходящиеся октаэдрически.

Пространство Лобачевского Λ^4. 1) $\{3, 3, 3, 5\}$ — разбиение на симплексы, схождение в узле 600-гранное; 2) $\{4, 3, 3, 5\}$ — разбиение на кубы, схождение 600-гранное; 3) $\{5, 3, 3, 5\}$ — разбиение на 120-гранники, схождение 600-гранное; 4) $\{5, 3, 3, 4\}$ — разбиение на 120-гранники, схождение октаэдрическое; 5) $\{5, 3, 3, 3\}$ — разбиение на 120-гранники, схождение — симплициальное; 6) $\{3, 4, 3, 4\}$ — разбиение на предельные 24-гранники; 7) $\{4, 3, 4, 3\}$ — разбиение на орисферические многогранники с кубическими гранями, схождение — 24-гранное.

$n=5$. Сфера S^5. 1) $\{3, 3, 3, 3, 3\}$ — симплициальное; 2) $\{3, 3, 3, 3, 4\}$ — октаэдрическое; 3) $\{4, 3, 3, 3, 3\}$ — кубическое.

Евклидово пространство E^5. 1) $\{4, 3, 3, 3, 4\}$ — разбиение на кубы.

Пространство Лобачевского Λ^5. 1) $\{3, 3, 3, 4, 3\}$ — разбиение на предельные октаэдры $\{3, 3, 3, 4\}$; 2) $\{4, 3, 3, 4, 3\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники, каждый из которых построен над разбиением четырехмерной орисферы на кубы; 3) $\{3, 3, 4, 3, 3\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники, каждый из которых построен над разбиением четырехмерной орисферы на октаэдры; 4) $\{3, 4, 3, 3, 4\}$ — разбиение на предельные орисферические многогранники, каждый из которых построен над разбиением четырехмерной орисферы на 24-гранники; 5) $\{3, 4, 3, 3, 3\}$ — разбиение на орисферические многогранники, каждый из которых построен над разбиением четырехмерной орисферы на 24-гранники; схождение в узлах кубического типа.

Разбиения S^n и E^n при $n \geqslant 6$ тех же типов, что и при $n=5$; пространство Лобачевского Λ^n при $n \geqslant 6$ на правильные многогранники не разбивается.

2.3. Разбиения пространства Лобачевского на полуправильные многогранники. Условимся называть многогранник *равногранно-полуправильным*, если его многогранные углы правильны и группа его симметрии действует транзитивно на множестве граней. Аналогично, многогранник будем называть *равноугольно-полуправильным*, если его грани правильные и группа его симметрии действует транзитивно на множестве вершин. (Эти определения устраняют из рассмотрения полуправильные многогранники с «плохой» симметрией, оставляя нам все «классические» полуправильные многогранники.) Вопрос о разбиении пространства Лобачевского на такие многогранники, естественно, распадается на две части: разбиение пространства на равногранно-полуправильные многогранники и разбиение пространства на равноугольно-полуправильные многогранники. Проследим сперва, как метод вариации одного параметра позволяет ответить на первую половину вопроса.

По определению, у равногранно-полуправильного многогранника все многогранные углы правильные, а поэтому все его двугранные углы равны, ибо любые две его вершины можно соединить связной ломаной, состоящей из ребер многогранника. Это замечание в сочетании с требованием нормальности разбиения позволяет легко доказать следующее утверждение.

Теорема (необходимые условия разбиения). Если равногранно-полуправильный многогранник разбивает пространство Лобачевского Λ^3, то (1°) он не имеет многогранных углов с числом граней более пяти и (2°) все двугранные углы этого многогранника равны $2\pi/3$.

Очевидно, что если двугранный угол равногранно-полуправильного многогранника в пространстве Лобачевского равен $2\pi/3$, то двугранный угол аналогичного многогранника в пространстве Евклида будет строго больше $2\pi/3$. Следовательно, если соответствующий евклидов многогранник имеет двугранный угол не больший $2\pi/3$, то он не может разбивать пространство Лобачевского. Это соображение позволяет нам не рассматривать равногранно-полуправильные многогранники, которые в пространстве Евклида обладают двугранными углами, не превосходящими $2\pi/3$, а требование (2°) предыдущей теоремы заменить требованием: (2′) аналогичный многогранник в пространстве Евклида имеет двугранный угол, строго больший $2\pi/3$. В [21] доказывается, что условия (1°) и (2′) являются в случае трехмерного пространства Лобачевского не только необходимыми, но и достаточными (аналогичные условия в случае трехмерной сферы оказываются недостаточными): если многогранник удовлетворяет условию (2′), то величина его двугранного угла при малых значениях параметра (например, радиуса ρ вписанной сферы) также больше $2\pi/3$ и потому увеличением параметра можно добиться выполнения условия (2°) (после чего остается лишь проверить, что при этом все вершины многогранника — собственные и что он удовлетворяет требованиям теоремы 2 из [1] (см. § 1, теорема 2). В [21] доказывается, что условие (2′) может быть заменено эквивалентным ему (и более легко проверяемым) условием, накладываемым на плоские углы грани многогранника. Из условий (1°) и (2′) легко следует теорема единственности: если равногранно-полуправильный многогранник разбивает пространство Лобачевского, то лишь единственным способом. В результате всего, оказалось, что Λ^3 разбивается (и притом единственным способом) каждым из следующих пяти равногранно-полуправильных многогранников: ромбическим триаконтаэдром, триакис-октаэдром, триакис-икосаэдром, гироэдром и пентагон-изоэдром, двойственным плосконосому додекаэдру (терминология Е. С. Федорова, [32]). Отметим вскользь, что разбиения, дуальные к разбиениям Λ^3 на равногранно-полуправильные многогранники, являются разбиениями (в определенном смысле правильными [21]) пространства Лобачевского на неравные правильные многогранники.

Вторая часть вопроса о разбиениях Λ^3 полуправильными многогранниками, то есть нахождение всех нормальных правильных разбиений Λ^3 архимедовыми телами, тоже поддается решению методом вариации одного параметра [21], но тут мы вынуждены прибегать к значительно более кропотливым исследованиям и потому приводим здесь лишь окончательный результат: из всех равноугольно-полуправильных многогранников пространство Лобачевского разбивается только на пять многогранников: усеченный додекаэдр, усеченный кубооктаэдр, усеченный додекаэдро-икосаэдр, усеченный икосаэдр и усеченный куб.

Не желая слишком увеличивать объем статьи, отметим все же, что метод вариации одного параметра позволяет аналогичным образом решить вопрос о разбиениях пространства Лобачевского орисферическими полуправильными многогранниками. Дадим к этому лишь краткую иллюстрацию.

При $n=2$ имеется (см., например, [33]) всего восемь правильных разбиений евклидовой плоскости на правильные неравные многоугольники. Если орисферу разбить на геодезические неравные правильные многоугольники одним из этих способов и провести касательные плоскости в узлах разбиения, то мы получим (при достаточно малой длине стороны геодезического многоугольника) равногранно-полуправильный многогранник, описанный около орисферы. Легко видеть, что орисферические многогранники, имеющие только трехгранные и четырехгранные углы (многогранники, получаемые из разбиений (3, 3, 3, 4, 4) и (3, 3, 4, 3, 4); обозначения из [33]), при определенных размерах стороны геодезического многоугольника разбивают пространство Лобачевского. Равногранно-полуправильные многогранники, получаемые указанным образом из разбиений (3, 4, 6, 4), (3, 6, 3, 6) и (3, 3, 3, 3, 6), дают разбиения пространства Лобачевского лишь в предельном варианте: когда шестигранная вершина становится бесконечно удаленной точкой. Остальные три равногранно-полуправильных орисферических многогранника не разбивают Λ^3. Если взять выпуклую оболочку узлов разбиения орисферы на неравные правильные геодезические многоугольники, то мы получим равноугольно-полуправильные орисферические многогранники. Вопрос о разбиениях Λ^3 на такие многогранники — более громоздкий и мы его здесь касаться не будем (не будем касаться и более высоких размерностей: ведь наша цель — лишь иллюстрировать метод).

2.4. Итоги. Подводя итоги, отметим лишь, что метод вариации одного параметра позволяет решать до конца вопрос о разбиениях пространства Лобачевского правильными и полуправильными многогранниками и получать новые интересные разбиения пространства. Правда, при $n \geqslant 3$ удается получить лишь конечное число разбиений Λ^n и это побуждает искать другие, более эффективные методы. Первый из них, метод вариации нескольких непрерывных параметров, является естественным обобщением метода вариации одного параметра.

§ 3. МЕТОД ВАРИАЦИИ НЕСКОЛЬКИХ НЕПРЕРЫВНЫХ ПАРАМЕТРОВ

3.1. Суть метода. Идею нового метода, несколько утрируя, можно объяснить по аналогии с предыдущим: рассматривается многогранник, размеры которого определяются набором значений каких-либо k непрерывных параметров (например, линейных) и который обладает не более чем k различными двугранными углами. Вариацией параметров выбираются такие их значения, при которых многогранник является стереоэдром пространства Лобачевского. Дабы иметь возможность подробно пояснить этот метод, мы ограничимся здесь, в основном, случаем $k=2$.

Размеры как правильного, так и полуправильного многогранника вполне определяются, как отмечалось, заданием одного линейного параметра. Роль такого параметра могут на себя взять, например, длина ребра, радиус вписанной или описанной сферы. На следующей ступени за полуправильными многогранниками (если идти по пути ослабления требований правильности к многограннику) располагаются изоэдры и изогоны. При этом изоэдром (изогоном) мы будем называть многогранник, каждую грань (вершину) которого можно перевести в любую другую грань (вершину) движением из группы симметрии многогранника. Размеры таких многогранников, вообще говоря, зависят уже от двух и более непрерывных параметров (в зависимости от вида многогранника и размерности пространства). Возможности выбора геометрических параметров, определяющих размеры многогранников, довольно разнообразны. У каждого изогона имеются, например, сферы, концентричные с описанной сферой и касающиеся подмножества его граней, эквивалентных по группе симметрии многогранника (будем называть эти сферы полувписанными). Аналогично, у всякого изоэдра имеются сферы, концентричные с вписанной в него сферой и проходящие через вершины, эквивалентные по группе симметрии изоэдра; будем называть такие сферы полувписанными. Часто бывает удобно в качестве непрерывных параметров использовать радиусы указанных сфер.

Уже решение вопроса о разбиениях трехмерного пространства Лобачевского Λ^3 на полуправильные многогранники оказалось довольно громоздким и достаточно сложным. Вопрос о разбиениях Λ^3 на изоэдры и изогоны не менее сложен и потому мы не будем здесь рассматривать его в полном объеме. Нашей целью является лишь демонстрация метода вариации нескольких параметров в применении к указанному вопросу.

Как отмечалось, действие метода нескольких параметров легче всего проследить на примере его частного случая — метода линз, в котором число варьируемых параметров равно двум (этот метод чаще всего и использовался). Автор пришел к этому методу, рассматривая вопрос о нормальных и правильных разбиениях трехмерного пространства Лобачевского на призмы. При этом под призмою понимается многогранник пространства Лобачевского Λ^3, аналогичный обычной прямой правильной призме евклидова пространства. Все боковые ребра, главная (n-кратная) ось симметрии и боковые грани n-угольной призмы ортогональны плоскости симметрии призмы, пересекающей призму по правильному n-угольнику (иногда это сечение призмы мы будем называть ее средним сечением). Углы этого правильного n-угольника являются плоскими углами двугранных углов при боковых ребрах призмы. Центр многогранника является центром сферы (радиуса R), описанной около призмы. Он также является центром еще двух полувписанных сфер: одна (радиуса r_1) касается боковых граней призмы в точках, являющихся серединами сторон среднего сечения призмы, вторая (радиуса r_2) касается верхнего и нижнего оснований призмы (являющихся правильными n-угольниками) в их центрах. Таким образом, размеры призмы вполне определяются заданием двух параметров: радиусов r_1 и r_2 полувписанных сфер. Радиус r_1 является одновременно радиусом окружности, вписанной в правильный многоугольник — среднее сечение призмы. Диаметр $2r_2$ второй полувписанной сферы, соединяющий центры оснований, будем называть высотой призмы (он реализует минимум расстояния между основаниями призмы).

В общих чертах идея метода линз применительно к этим многогранникам заключается в следующем. Варьированием параметра r_1 необходимо добиться того, чтобы двугранный угол φ при боковом ребре призмы был равен целой части полного угла, т. е. $\varphi=2\pi/k$, где $k=3, 4, \ldots$. Так как рассматриваются лишь нормальные разбиения, то в искомом разбиении пространства плоскость среднего сечения призмы оказывается при этом разбитой (гранями призм) на правильные многоугольники. Тогда вся задача сводится к тому, чтобы вариацией второго параметра r_2 добиться нужной величины двугранного угла ψ при ребре основания призмы. Таким образом, вариация первого параметра используется, по существу, для получения разбиения плоскости Λ^2, а вариация второго параметра — для того, чтобы полученное разбиение плоскости продолжить (в определенном смысле) до разбиения пространства Λ^3. Поэтому сам метод можно было бы назвать методом подъема по размерности, ибо этим методом, отталкиваясь от разбиения $(n-1)$-мерного пространства Λ^{n-1}, мы получаем разбиение n-мерного пространства Лобачевского. Первоначально этот метод был назван методом линз, ибо, как мы увидим дальше, над разбиением Λ^{n-1} строится бесконечный изоэдр, изображение которого в интерпретации Бельтрами—Клейна при $n=3$ напоминает двояковыпуклую линзу. К сожалению, этот метод применим лишь тогда, когда разбиение Λ^{n-1} удовлетворяет некоторым довольно жестким требованиям. В следующих пунктах мы подробно рассмотрим вопрос о разбиениях пространства Лобачевского на правильные призмы и проследим, как работает метод линз. При этом правильной призмой (или гиперпризмой) пространства Лобачевского Λ^n мы будем называть аналог правильной призмы евклидова пространства (т. е. аналог прямого произведения правильного $(n-1)$-мерного многогранника на отрезок). Так как разбиения Λ^n на правильные многогранники уже рассмотрены в предыдущем параграфе, то технически более удобно предполагать, что вариация первого параметра r_1 уже произведена (если она возможна) и что уже имеется соответствующее разбиение пространства Лобачевского на правильные многогранники, от которого мы и будем отталкиваться в своих рассуждениях и построениях.

3.2. Вариация двух параметров. Возьмем в пространстве Лобачевского Λ^3 некоторую плоскость и рассмотрим ее правильное разбиение на равные правильные n-угольники. Как мы видели в п. 2.2, таковое разбиение существует; более того, каждый правильный n-угольник разбивает плоскость Лобачевского счетным числом способов. Если $n>6$, то число m многоугольников, сходящихся в вершине (узле разбиения), может принимать значения 3, 4, 5, 6, 7, ... Для построений, рассматриваемых в данном пункте, важны только случаи, когда m равно 3, 4 или 5.

Итак, пусть рассматриваемая плоскость разбита на n-угольники $(n\geqslant7)$ одним из трех указанных способов $(m=3, 4, 5)$. Эта плоскость разбивает все пространство Λ^3 на два полупространства: Λ^+ и Λ^-. Восставим в каждом узле разбиения по перпендикуляру к плоскости и отметим на каждом перпендикуляре по точке, отстоящей от плоскости на данном расстоянии s и принадлежащей полупространству Λ^+. Выберем теперь из них такие пары точек, которые проектируются в смежные по стороне вершины n-угольников исходного разбиения (т. е. те, которые лежат на перпендикулярах, восставленных в двух соседних узлах), и соединим такие пары точек отрезками (эти отрезки проектируются в стороны n-угольников). Тогда над каждым n-угольником исходного разбиения появится правильная n-угольная грань выпуклого многогранника, вписанного в эквидистантную поверхность высоты s, базой которой является плоскость исходного разбиения (ее мы будем называть базовой плоскостью многогранника). Группа движений этого бесконечного эквидистантного многогранника изоморфна группе движений разбиения плоскости на n-угольники (соответствие между движениями плоскости и движениями многогранника легко устанавливается). Отразим теперь поверхность полученного многогранника от его базовой плоскости. Вновь полученная многогранная поверхность (лежащая в Λ^-) вместе с предыдущей (лежащей в Λ^+) ограничивает выпуклый многогранник, вписанный в две эквидистантные поверхности равной высоты s с общей базовой плоскостью. Используя правильность разбиения базовой плоскости на n-угольники и алгоритм построения многогранника, нетрудно показать, что полученный выпуклый бесконечный многогранник — правильный. Его гранями являются правильные n-угольники, а все многогранные углы — конгруэнтные правильные m-гоноэдры (часть этого многогранника схематически изображена на рис. 1).

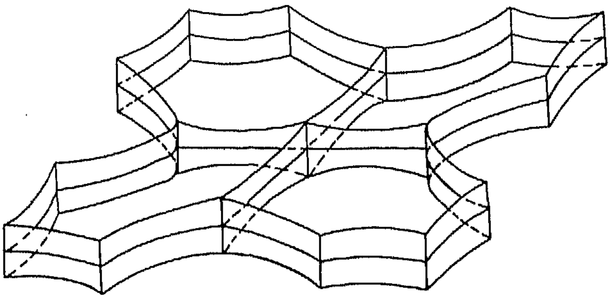

Рис. 1

Полученный многогранник назовем л и н з о й, точнее (n, m)-линзой. Эта линза естественным образом распадается на бесконечное число конгруэнтных прямых конечных n-угольных призм, смежных своими боковыми гранями и соответствующих n-угольникам исходного разбиения плоскости. Группа движений (n, m)-линзы естественно индуцируется группой движений (двусторонней) плоскости, разбитой на правильные n-угольники, сходящиеся по m в вершине. Конструктивно эту же линзу можно было бы получить несколько иным способом. Можно восставить перпендикуляры не в узлах разбиения, а в центрах многоугольников, отложить на этих перпендикулярах по обе стороны от плоскости отрезки равной длины h (параметр h имеет тот же геометрический смысл, что и параметр r_2 в предыдущем пункте) и через концы этих отрезков провести плоскости, ортогональные перпендикулярам. Затем выделить полупространства, каждое из которых определяется одной из построенных плоскостей и, например, центром многоугольника, над которым эта плоскость строится (и который ближе всех остальных к этой плоскости), и рассмотреть пересечение всех полученных полупространств. В результате мы получим линзу, описанную около пары эквидистантных поверхностей равной высоты h с общей базовой плоскостью (плоскость исходного разбиения). Вообще говоря, при достаточно больших значениях параметра h эта линза окажется вырожденной, т. е. не имеющей собственных вершин и, возможно, ребер. Если же выбрать h достаточно малым, то плоскости, лежащие в одном и том же полупространстве (относительно исходной плоскости) и соответствующие многоугольникам, смежным по ребру или вершине, будут пересекаться, и мы получим многогранник, не только описанный около пары эквидистантных поверхностей высоты h с общей базовой плоскостью, но и вписанный в пару эквидистантных поверхностей некоторой высоты s с той же самой базовой плоскостью, т. е. невырожденную линзу. При таком методе построения особенно очевидны выпуклость и правильность относительно граней получаемого многогранника; недостатком же его является необходимость наложения ограничения на параметр h для получения невырожденной линзы. (Более подробно о вырождении многогранников будет сказано в следующем параграфе.) Кроме того, следует отметить, что мы здесь опустили доказательства ряда интуитивно очевидных фактов (правильность, выпуклость и т. п.) с целью экономии места.

Приступая к вариации второго параметра, отметим первым делом, что при непрерывном возрастании параметра h от 0 до $+\infty$ двугранный угол (n, m)-линзы монотонно убывает от π до некоторого вполне определенного значения φ_i ($i=1, 2, 3$; $\varphi_1=\pi/3$ при $m=3$, $\varphi_2=\pi/2$ при $m=4$, $\varphi_3=3\pi/5$ при $m=5$) — величины угла евклидова правильного m-угольника. (Дело в том, что при $s=\infty$ ребра линзы, принадлежавшие ранее одной вершине, становятся параллельными друг другу, т. е. образуют пучок параллельных прямых. Ортогональной траекторией этого пучка является орисфера. Грани линзы вырезают на этой орисфере орисферический правильный m-угольник, углы которого измеряют двугранные углы линзы. Учитывая то, что на орисфере реализуется евклидова метрика, мы и приходим к указанным значениям φ_i). Ввиду этого, в некоторый момент двугранный угол линзы станет равным двугранному углу ψ_i центрального гоноэдра соответствующего правильного многогранника (при $m=3$ для симплекса $\psi_1=2\pi/3$; для октаэдра $\psi_1=\pi/2$, для икосаэдра $\psi_1=2\pi/5$; при $m=4$ для куба $\psi_2=2\pi/3$ при $m=5$ для додекаэдра $\psi_3=2\pi/3$; во всех случаях $\psi_i>\varphi_i$). Иными словами, параметр s можно подобрать так, чтобы многогранные углы линзы были конгруэнтны многогранным углам, дающим один из пяти возможных способов разбиения полного пространственного угла на равные правильные (трехгранные, четырехгранные или пятигранные) углы. В [14] далее аккуратно проверяется, что такие линзы разбивают Λ^3. Таким образом, удается подобрать значения линейных параметров r_1 и h правильной n-угольной призмы так, чтобы она разбивала Λ^3. Аналогичные построения возможны и в пространствах размерности большей трех [19].

3.3. Итоги. Подводя итоги, отметим, что метод вариации нескольких параметров позволил нам значительно расширить число примеров дискретных групп и разбиений пространства Лобачевского. Этим методом получено конструктивное геометрическое доказательство следующих, например, утверждений общего характера:

1. Множество (неизоморфных) федоровских групп трехмерного пространства Лобачевского по крайней мере счетно.

2. Существуют федоровские группы трехмерного пространства Лобачевского, обладающие элементами любых наперед заданных конечных порядков.

3. Множество нормальных и правильных конечных стереоэдров трехмерного пространства Лобачевского по крайней мере счетно.

В процессе использования метода вариации нескольких параметров мы, не меняя топологии многогранников, имели возможность варьировать их размеры и использовать эти вариации для нужд построения разбиений и дискретных групп. Существенное ограничение на вариацию параметров накладывается условием выхода на абсолют вершин многогранника. В некоторых случаях такие предельные многогранники с бесконечно удаленными вершинами дают нам отдельные примеры разбиений и дискретных групп с конечной по мере, но некомпактной фундаментальной областью. Дальнейшее увеличение параметра за границы, поставленные вышеуказанным условием, приводит нас уже к многогранникам с идеальными элементами (вершинами, ребрами и т. д.) и к дискретным группам с бесконечной по мере фундаментальной областью (для таких групп иногда употребляют термин клейновских). Обойти эту трудность, вернуться к федоровским группам и продолжить вариацию параметра нам помогает метод усечения идеальных граней, рассматриваемый в следующем параграфе.

§ 4. МЕТОД УСЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНЫХ ГРАНЕЙ

4.1. Суть метода. Впервые метод усечения идеальных граней был использован в работе [15] в его наиболее простейшем варианте — методе усечения идеальных вершин правильного орисферического многогранника. Идея этого метода возникла в процессе попыток использования метода вариации параметров вне тех естественных границ, которые дозволяются этим методом. Как отмечалось в конце предыдущего параграфа, при увеличении размеров многогранника (при увеличении, например, радиуса сферы, вписанной в правильный многогранник) наступает такой момент в изменении этого многогранника, когда некоторые вершины многогранника (одна или более) становятся бесконечно удаленными точками. Ребра, принадлежащие такой вершине, являются уже не отрезками, а лучами или прямыми и принадлежат пучку параллельных прямых, определяемому рассматриваемой бесконечно удаленной вершиной. Как ребра, так и грани, инцидентные бесконечно удаленной вершине, пересекают ортогонально орисферы с центром в этой вершине. (Их пересечением является геодезический многоугольник орисферы, который использовался нами для определения границы изменения двугранных углов многогранника).

Дальнейшее увеличение линейных размеров многогранника приводит к тому, что рассматриваемая вершина многогранника становится идеальной точкой (если рассматривать изображение многогранника в интерпретации Бельтрами—Клейна, то эта вершина изображается точкой, лежащей вне абсолюта). Ребра и грани, принадлежащие такой вершине, будут ортогональны некоторой вполне определенной плоскости; эта плоскость в интерпретации Бельтрами—Клейна изображается полярой вершины относительно абсолюта. (В случае бесконечно удаленной вершины рассматриваемые ребра и плоскости были ортогональны пучку орисфер; в случае идеальной вершины они ортогональны пучку эквидистантных поверхностей; плоскость, о которой идет здесь речь, является базой этого пучка эквидистантных поверхностей). Для того, чтобы избавиться от такой идеальной вершины, естественно напрашивается мысль — отсечь указанной плоскостью идеальную вершину от многогранника (т. е. отсечь от многогранника бесконечный «кусок», «прилежащий» к идеальной вершине). Конечно, подобное отсечение можно было бы провести многими другими плоскостями (и даже не только одной, а целыми наборами плоскостей). Но указанная плоскость особенно удобна для наших целей: она образует с гранями многогранника прямые углы. Поэтому в дальнейшем, говоря об усечении идеальной вершины, мы обычно будем подразумевать усечение именно такой плоскостью, так сказать, ортогональное усечение. Таким образом, если мы в процессе вариации получаем идеальную вершину, то мы можем от нее избавиться указанной операцией. Эту операцию мы и будем называть *операцией усечения* идеальной вершины многогранника. Уступая привычке, мы сохраняем здесь термин «операция усечения», хотя естественнее было бы эту операцию назвать операцией отсечения идеальной вершины, а сам метод — методом отсечения идеальных граней. В простейших случаях при $n=3$ мы получаем широкую возможность вариации параметров. Но уже при $n \geqslant 4$ этот метод встречает затруднения: за абсолют могут уйти не только вершина, но и грань ненулевой размерности (прежде, чем двугранный угол примет нужное нам значение). Для таких граней также удается иногда подобрать усекающую плоскость с нужными свойствами. В общем, можно сказать, что метод усечения идеальных граней состоит в том, что от многогранника бесконечного объема, имеющего идеальную грань (к такому многограннику мы обычно приходим методом вариации параметров, если нарушаем «дозволенные» границы изменения параметров), надлежащим образом подобранной гиперплоскостью отсекается его часть («прилежащая» к этой идеальной грани) так, что после усечения получается некоторый многогранник конечного объема (который в дальнейшем и используется для построения разбиения пространства). В терминах интерпретации Бельтрами—Клейна операция усечения идеальной грани состоит в том, что увеличением размеров многогранника мы «выгоняем» грань за абсолют, а затем отсекаем от многогранника его часть (прилежащую к этой грани) некоторой подходящей гиперплоскостью (например, если мы «выгнали» за абсолют вершину, то в качестве такой гиперплоскости удобно взять поляру вершины; если идеальная грань обладает центром симметрии, то бывает удобно проводить усечение полярой этого центра). Подробнее мы рассмотрим все это на конкретных примерах применения метода усечения идеальных граней. Метод усечения вершин проще всего можно проследить на примере правильных многогранников.

4.2. Усечение правильных многогранников. Пусть M_m — правильный m-угольник плоскости Лобачевского (см. рис. 2*a*, $m=3$). При увеличении радиуса r вписанной в него окружности от нуля до значения r_0, определяемого соотношением $\Pi(r_0)=\pi/m$, угол φ многоугольника будет убывать от его евклидовой величины $\varphi=\pi(m-2)/m$ до нуля (здесь, как и далее, $\Pi(x)$ — угол параллельности, соответствующий отрезку длины x). При $r=r_0$ (см. рис. 2*b*), все вершины m-угольника являются бесконечно удаленными точками, стороны являются прямыми, причем соседние стороны a_i и a_{i+1} ($i=1, \ldots, m$; $a_{m+1}\equiv a_1$) параллельны. (Вернее было бы уже говорить не о m-угольнике, а о m-сторонинке). При $r>r_0$ мы получаем правильный m-угольник, соседние стороны a_i и a_{i+1} которого являются расходящимися прямыми, а вершины — идеальными точками (см. рис. 2*c*). Отсечем от этого вырожденного m-угольника общими перпендикулярами пар соседних сторон части, не содержащие центр правильного многоугольника. Этим мы получим некоторый новый многоугольник M_m' (см. рис. 2*d*). (Говоря точнее, M_m' есть пересечение M_m со всеми полуплоскостями β_i, определяемыми общими перпендикулярами b_i пар a_i, a_{i+1} соседних сторон и центром многоугольника: $M_m'=M_m\cap(\bigcap_{i=1}^{m}\beta_i)$. Из правильности многоугольника M_m следует, что M_m' — равноугольно-полуправильный многоугольник. Так как b_i — общий перпендикуляр a и

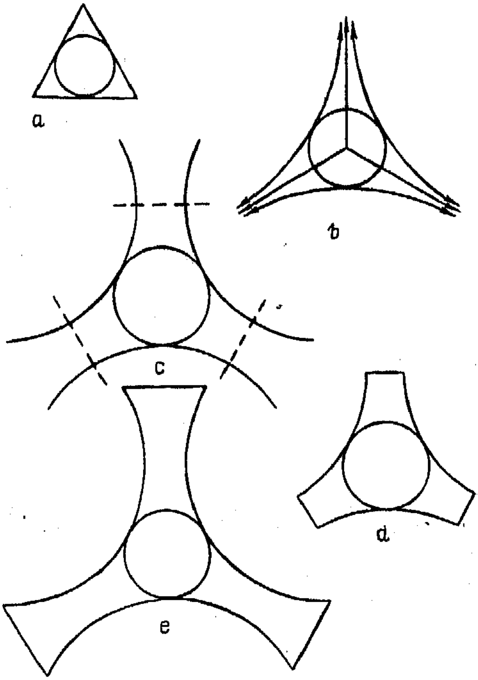

Рис. 2 a, b, c, d, e

a_{i+1}, то все углы многоугольника M_m' прямые и потому (см. [1], а также § 1) он разбивает плоскость Лобачевского; нетрудно показать, что при $m_1 \neq m_2$ мы получаем неизоморфные дискретные группы плоскости Лобачевского (причем эти группы обладают одним непрерывным параметром — радиусом вписанной окружности).

Отметим, что если мы будем «отодвигать» прямые b_i от центра многоугольника, т. е. действовать на них сдвигами (переносными движениями), направленными из центра многоугольника по прямым, ортогональным b_i (иными словами: если мы будем варьировать радиус R окружности, описанной около M_m', не меняя радиуса r вписанной в M_m окружности), то мы будем менять угол φ' равноугольно-полуправильного многоугольника M_m' и сможем сделать его равным π/l, где $l \in \mathbf{N}$, $l \geqslant 3$ (см. рис. 2e); этим мы получим решение вопроса о разбиении плоскости Лобачевского на равноугольно-полуправильные многоугольники.

4.3. Усечение трехмерных правильных многогранников. Рассматривая один из пяти конечных правильных трехмерных многогранников, мы можем, увеличивая радиус r вписанной в многогранник сферы, добиться (как и в двумерном случае) того,

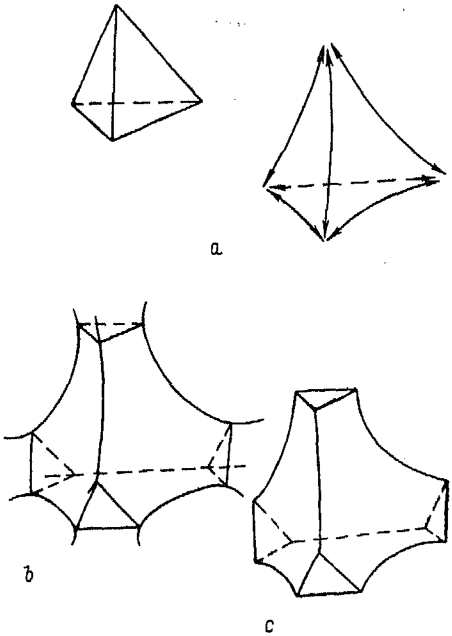

Рис. 3 a, b, c

чтобы вершины многогранника стали идеальными, а ребра — прямыми (см. рис. 3*a*; на рисунках метод усечения схематически показан на примере тетраэдра). Для этого достаточно, чтобы величина радиуса r вписанной сферы стала больше некоторой величины r_0, зависящей только от типа рассматриваемого многогранника (r_0 определяется из соотношения $\Pi(r_0) = \alpha_0$, где α_0 — угол соответствующего правильного евклидова многогранника, под которым виден радиус окружности, описанной около грани, из центра этого правильного евклидова многогранника). Ребра и грани многогранника, ранее принадлежавшие одной вершине, теперь будут ортогональны одной плоскости (см. рис. 3*b*). Усекая такой вырожденный многогранник M указанными плоскостями, мы получим соответствующий изогональный многогранник M' (см. рис. 3*c*). Грани такого многогранника, лежащие в усекающих плоскостях (назовем их для краткости черными), будут ортогональны смежным с ними граням, которые образовались из граней исходного многогранника (будем называть такие грани белыми). Черные грани — правильные многоугольники, белые — равноугольно-полуправильные многоугольники с прямыми углами. Угол между смежными черной и белой гранями — прямой, между двумя белыми гранями — двугранный угол исходного вырожденного правильного многогранника (черные грани попарно не пересекаются). Плоский угол черной грани является плоским углом двугранного угла между соответствующими белыми гранями. Этот угол является непрерывной функцией радиуса сферы, вписанной в вырожденный правильный многогранник, и убывает от некоторой величины $\varphi_0 \geqslant \pi/3$ до нуля. Поэтому мы всегда можем его сделать равным $2\pi/k$, $k \in \mathbf{N}$, $k > 6$, и тем самым получить серию разбиений Λ^3 на такие многогранники и соответствующую серию дискретных групп в Λ^3 (при этом плоскости, в которых лежат черные грани, оказываются разбитыми на правильные треугольники, четырехугольники или пятиугольники, сходящиеся в вершинах по k штук). Далее можно было бы рассмотреть операцию сдвига (переноса) секущей плоскости и решить вопрос о разбиениях Λ^3 на соответствующие изогоны. Наконец, применяя аналогичным образом метод усечения идеальных вершин к равногранно-полуправильным многогранникам, мы получим еще ряд серий разбиений Λ^3 и федоровских (и квазифедоровских) групп трехмерного пространства Лобачевского.

4.4. **Усечение линз.** В предыдущем пункте мы рассмотрели действие метода усечения идеальных вершин применительно к конечным правильным многогранникам, описанным около сфер. Таким же образом применяется этот метод и к бесконечным правильным (и не только правильным) многогранникам, каждый из которых описан около орисферы или около пары эквидистатных поверхностей. Однако для дальнейшего нам будет весьма полезным иметь в своем распоряжении разбиения и дискретные группы, получаемые методом усечения идеальных вершин из указанных бесконечных многогранников. Заодно мы будем иметь еще несколько примеров, иллюстрирующих применение метода усечения идеальных вершин в конкретной ситуации. В данном пункте мы рассмотрим многогранники, каждый из которых описан около пары эквидистатных поверхностей. Такие многогранники мы условились (в п. 2.1) называть линзами. Бесконечные многогранники, описанные около орисферических поверхностей, мы рассмотрим в следующем пункте этого параграфа. В пункте 3.2 было подробно описано построение правильной (n, m)-линзы — бесконечного правильного многогранника, описанного около пары эквидистатных поверхностей, получаемого из разбиения плоскости Лобачевского на правильные n-угольники, сходящиеся по m в вершинах (узлах разбиения). Метод построения дискретных групп, применявшийся в пункте 2.2, вынуждал нас ограничиваться случаем, когда $m=3$, 4 или 5. В данном пункте это ограничение снимается: мы будем считать m любым натуральным числом, большим двух. Роль варьируемого параметра для нас будет играть высота h эквидистантной поверхности, вписанной в линзу. При увеличении высоты h от нуля до некоторого вполне определенного значения h_0, зависящего только от m и n, вершины линзы будут оставаться собственными точками пространства Лобачевского (используя тригонометрию пространства Лобачевского, h_0 легко вычислить: $h_0 = \operatorname{arcth}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{m}\right)$, здесь постоянная пространства Лобачевского принята равной единице). При $h=h_0$ вершины линзы станут бесконечно удаленными точками, ребра, ранее принадлежавшие одной вершине, станут параллельными прямыми, ортогональными одной орисфере. Грани, инцидентные этим ребрам, высекают на указанной орисфере правильный геодезический m-угольник (наличие евклидовой геометрии на поверхности орисферы позволяет при этом определить двугранный угол φ предельной (n, m)-линзы с высотою h_0 — он равен углу упомянутого правильного евклидова m-угольника, т. е. $\varphi = \frac{\pi(m-2)}{m}$),

При дальнейшем увеличении высоты h ребра, ранее принадлежавшие собственной вершине, становятся расходящимися прямыми, ортогональными одной плоскости; грани, инцидентные этим ребрам-прямым, также будут ортогональные плоскости. Усекая такой вырожденный многогранник указанными плоскостями, мы получим усеченную правильную (изогональную) линзу, гранями которой будут правильные m-угольники (черные грани) и равноугольно-полуправильные $2n$-угольники с прямыми углами (белые грани). Двугранный угол между белой и черной гранями, согласно построению (как и в предыдущих случаях) — прямой, двугранный угол φ между белыми гранями будет убывать (с возрастанием h) от $\varphi_0 = \pi(m-2)/m$ до нуля и потому, за счет вариации параметра h, мы можем сделать его равным целой части от π (или от 2π — можно показать, что в данном случае этого достаточно). Здесь, как и раньше, конечно предполагается, что при изменении высоты h секущие плоскости так меняют свое положение, что остаются все время ортогональными к усекаемым граням вырожденной линзы (т. е., говоря терминами интерпретации Бельтрами—Клейна, усечение всегда производится полярами вершин). Иными словами, можно сказать, что мы сперва добиваемся того, чтобы угол φ оказался нужных размеров, а затем усекаем вырожденную линзу: этим мы добиваемся того, что у полученной усеченной линзы все двугранные углы или прямые (между черной и белой гранями), или вида $2\pi/k$, где $k \geqslant 3$, $k \in \mathbf{N}$ выбрано и зафиксировано по нашему произволу (между парой белых граней).

При так выбранных размерах усечения линза будет разбивать пространство Лобачевского Λ^3, что нетрудно аккуратно проверить, пользуясь теоремами А. Д. Александрова из [1] (см. § 1). Так же, как исходная правильная линза распадалась естественным образом на правильные призмы, усеченная правильная линза распадается на усеченные правильные призмы. Таким образом, мы приходим к счетной серии разбиений пространства Лобачевского Λ^3 на компактные многогранники — серии, зависящей от трех натуральных параметров m, n и k.

Покажем теперь, как существенно метод усечения идеальных вершин расширяет возможности получения дискретных групп трехмерного пространства Лобачевского. Мы увидим, что этим методом можно получить серию дискретных групп, зависящую от любого конечного числа натуральных параметров. Для этого мы сперва построим некоторую специальную изоэдральную линзу (даже полуправильную), к которой и будем применять метод усечения идеальных вершин. Изоэдральная линза строится из некоторого специального разбиения плоскости Лобачевского таким же образом, каким правильная (n, m)-линза строится из разбиения плоскости Лобачевского на равные правильные n-угольники, сходящиеся по m в вершинах. Покажем, сперва, как строится нужное нам разбиение плоскости.

Итак, пусть нам заданы k натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, удовлетворяющих одному лишь ограничению $n_i > 2$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Для простоты можно считать, что $k > 3$, ибо серию, зависящую от трех параметров, можно получить, используя одни лишь правильные (n, m)-линзы. Для построения искомого разбиения рассмотрим на плоскости Лобачевского k углов χ_i величины π/n_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, и в каждый из них впишем окружность некоторого достаточно малого радиуса ρ. Обозначим через $\psi_i(\rho)$ центральный угол между двумя радиусами, идущими из центра окружности в точки ее касания со сторонами угла, и рассмотрим сумму $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(\rho)$. Свойства плоскости Лобачевского позволяют легко установить, что

$$\lim_{\rho \to \infty} \sum_{i=1}^{k} \psi_i(\rho) = 0 \text{ и } \lim_{\rho \to 0} \sum_{i=1}^{k} \psi_i(\rho) = \sum_{i=1}^{k} (\pi - \pi/n_i) > 2\pi$$

(так как $n_i > 2$ и $k > 3$; случай $n_i = 2$ при всех значениях i требует лишь незначительной модернизации). Ввиду непрерывности функций $\psi_i(\rho)$, существует такое значение $\rho = \rho_0$, при котором $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(\rho_0) = 2\pi$ (с таким же успехом рассуждение легко проходит и для случая $\sum_{i=1}^{k} \psi_i(\rho_m) = 2\pi/m$, где $m \in \mathrm{N}$). Поэтому углы $\psi_i(\rho_0)$, будучи последовательно отложенными при центре окружности радиуса ρ, разобьют ее на k (неравных) частей. Касательные к этой окружности, приведенные в точках дробления, образуют описанный около окружности многоугольник, углы которого суть $\pi/n_1, \pi/n_2, \ldots, \pi/n_k$. Согласно следствию из теоремы 2 работы А. Д. Александрова [1] (см. § 1), этот многоугольник разбивает плоскость Лобачевского. Само разбиение порождается отражениями в сторонах многоугольника. Именно это разбиение мы и возьмем в качестве исходного разбиения базовой плоскости для построения изоэдральной линзы. Полезно отметить, что в каждом узле разбиения сходится ровно $2n_i$ равных углов и что узлы разбиения являются центрами вращений порядков $n_1, n_2, \ldots, n_k$ соответственно. Сам многоугольник является фундаментальной областью (и даже областью Дирихле центра окружности: многоугольник описан около окружности) группы, порожденной отражениями в сторонах многоугольника. Полезно еще отметить, что разбиение, дуальное данному, есть разбиение на неравные правильные $2n_i$-угольники.

Изоэдральная линза строится далее из этого разбиения плоскости обычным образом: в центрах окружностей, вписанных в многоугольники разбиения, восставляем перпендикуляры к плоскости, откладываем на этих перпендикулярах по обе стороны от плоскости разбиения равные отрезки достаточно малой длины h и через их концы проводим плоскости, ортогональные перпендикулярам, продолжая их до взаимного пересечения.

В результате получаем выпуклый многогранник F, описанный около пары эквидистантных поверхностей высоты h, ограниченный двумя бесконечными односвязными многогранными поверхностями, симметрично расположенными относительно плоскости исходного разбиения. Все грани многогранника F будут равными k-угольниками. Этот многогранник F и является той изоэдральной линзой, которую мы хотели построить.

Применение к этой линзе метода усечения идеальных вершин и приводит нас к многограннику, дающему требуемое разбиение пространства Лобачевского и дискретную группу, обладающую требуемыми свойствами.

4.5. Усечение орисферических многогранников. С точки зрения получения примеров квазифедоровских групп, полезно рассмотреть действие метода усечения вершин на примерах орисферических многогранников (многогранников, описанных около сферических поверхностей). Эти примеры интересны и потому, что они явились исторически первыми примерами неарифметических групп [15]. Кроме того, эти примеры дадут нам возможность еще раз увидеть в действии метод усечения идеальных вершин.

При построении трехмерного сферического изоэдра мы должны отталкиваться от нормального правильного разбиения орисферы на орисферические планигоны (т. е. двумерные стереоэдры). Так как внутренняя геометрия орисферы евклидова, то нам остается лишь воспользоваться результатами подробно разработанной теории планигонов евклидовой плоскости (см. [9]). Но так как нашей целью не является построение теории орисферических многогранников, то мы ограничимся лишь тремя правильными орисферическими многогранниками $\{3,6\}$, $\{4,4\}$ и $\{4,3\}$, указанными в пункте 2.2, и из них разберем подробно лишь многогранник $\{4,4\}$.

Правильный орисферический многогранник $\{4,4\}$ имеет квадратные грани и правильные четырехгранные углы. Если увеличивать размеры орисферических квадратов исходного разбиения (в качестве варьируемого параметра можно взять длину l стороны орисферического квадрата), то в некоторый момент $l=l_0$ все вершины многогранника $\{4,4\}$ станут бесконечно удаленными. Пусть φ_0 — значение величины двухгранного угла между соседними гранями в этот момент (для многогранника $\{4,4\}$ $\varphi_0=\pi/2$).

При дальнейшем увеличении параметра l вершины многогранника $\{4,4\}$ станут идеальными, а двухгранные углы, продолжая уменьшаться, могут быть сделаны по величине сколь угодно малыми. Поэтому можно подобрать величину варьируемого параметра l так, чтобы двухгранный угол был равен $2\pi/k$, где k — любое целое число, большее $2\pi/\varphi_0$ (в рассматриваемом случае $k \geqslant 5$). В ходе дальнейшего рассуждения будем считать k фиксированным. Производя усечение идеальных вершин полученного вырожденного правильного орисферического многогранника, мы получаем полуописанный около орисферы выпуклый изогональный многогранник — орисферический изогон. Гранями этого изогона являются квадраты (черные грани) и равноугольно-полуправильные восьмиугольники с прямыми углами (белые грани). С орисферическим изогоном можно связать три коаксиальные (т. е. имеющие одинаковые оси) орисферы: одна (исходная) касается всех восьмиугольных граней в их центрах, другая касается квадратных граней в их центрах, а на третьей лежат все вершины многогранника (в нее многогранник вписан). Если провести теперь через вершины орисферического изогона оси этих орисфер и плоскости, определяемые этими осями и сторонами изогона (продолжая их лишь до взаимного пересечения), то на каждой из орисфер индуцируется разбиение на орисферические квадраты и полуправильные восьмиугольники, а каждая грань окажется внутри своей асимптотической проектирующей пирамиды. Но так как эти пирамиды не входят друг в друга, то не могут пересекаться и две несмежные грани.

Полученный орисферический изогон естественным образом распадается на более простые бесконечные многогранники, соответствующие квадратам исходного разбиения орисферы. Каждый из таких многогранников имеет девять граней, двенадцать собственных и одну бесконечно удаленную вершину. Он вырезается из орисферического многогранника плоскостями, каждая из которых определяется одной стороной соответствующего орисферического квадрата и осью орисферы, проходящей через конец стороны.

Далее обычным путем заканчивается построение [15], а предыдущее замечание позволяет утверждать конечность объема фундаментальной области квазифедоровской группы.

4.6. Итоги. Отметим, что метод усечения идеальных граней позволил нам получить, как мы имели возможность убедиться в этом параграфе, следующие, например, утверждения общего характера:

1. В трехмерном пространстве Лобачевского существует счетное число топологически различных стереоэдров, каждый из которых разбивает пространство счетным числом топологически различных способов.

2. Существуют федоровские группы трехмерного пространства Лобачевского, обладающие любым наперед заданным конечным числом различных осей данных (сколь угодно больших) порядков.

§ 5. МЕТОД СКЛЕЙКИ

5.1. Суть метода. Лемма о склейке. Идея метода склейки возникает при внимательном анализе алгоритма построения разбиения пространства Лобачевского многогранниками, полученными в процессе использования метода ортогонального усечения идеальных вершин, и, в определенном смысле, обобщает идею этого построения. При ортогональном усечении идеальных вершин мы из исходного многогранника получаем усеченный многогранник с некоторыми особыми свойствами:

(1) белые грани усеченного многогранника (остатки граней вырожденного многогранника с идеальными вершинами) ортогональны его черным граням (лежащим в усекающих гиперплоскостях);

(2) черные грани усеченного многогранника попарно не пересекаются.

При отражении в какой-нибудь черной грани F многогранника M мы получаем из данного многогранника M зеркально равный ему многогранник M'. Объединение $\tilde{M}=M \cup M'$ многогранников M и M' является выпуклым многогранником, и каждая белая грань L многогранника M, смежная с черной гранью F, сливается с зеркально равной ей гранью L' многогранника M', образуя единую грань $\tilde{L}$ многогранника $\tilde{M}$. Действительно, ввиду условий (1) и (2), многогранник $\tilde{M}$ расположен внутри некоторой бесконечной прямой призмы $\tilde{P}$, боковые грани которой компланарны соответствующим парам зеркально равных белых граней L и L' многогранников M и M' (каждая боковая грань призмы инцидентна двум белым граням: грани L исходного многогранника и ее зеркальному образу L', принадлежащему M'), а направляющей служит граница черной грани F, в которой производилось отражение (см. рис. 4). Иными словами, многогранник $\tilde{M}$ лежит по одну сторону от плоскости каждой грани призмы $\tilde{P}$. Многогранник $\tilde{M}$ получается усечением (бесконечной) выпуклой призмы $\tilde{P}$ плоскостями тех граней многогранников M и M', которые не имеют с гранью F общих точек, и поэтому $\tilde{M}$ является выпуклым многогранником. Отметим, кроме того, что черная грань F рассекает эту призму $\tilde{P}$ на две бесконечные прямые зеркально равные полупризмы P и P' так, что многогранник M лежит целиком в полупризме P, а многогранник M' — в полупризме P' (отсюда особенно наглядно видно, что если многогранники M и M' — выпуклые, то и многогранник $\tilde{M}=M\cup M'$ — выпуклый). Ввиду свойства (2), пересечение ε-окрестности грани F и призмы $\tilde{P}$ при достаточно малом ε покрыто многогранником $\tilde{M}$ (говоря наглядно, многогранник $\tilde{M}$ образует «пробку» ненулевой толщины в самом «узком», «горловом» месте призмы $\tilde{P}$). Иногда мы будем говорить, что в процессе образования многогранника $\tilde{M}$ из многогранников M и M' мы склеиваем многогранники M и M' призматически. Ввиду призматичности склейки, очевидно, что если многогранник M имел двугранные углы, измеряемые целой частью π, то и многогранник $\tilde{M}$ будет обладать этим свойством, и потому может быть использован для построения разбиения пространства Лобачевского.

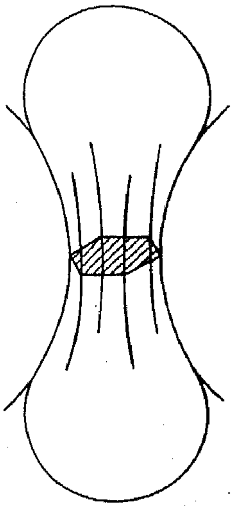

Рис. 4

В большинстве случаев, рассмотренных нами в предыдущем параграфе, многогранники M и M' были не только зеркально, но и собственно (совместимо) равными. Это объясняется тем, что подгруппа H группы движений Γ многогранника M, совмещающих с собой грань F, была достаточно богатой (содержала по крайней мере одно отражение от гиперплоскости). В таких случаях отражение в грани F оказывается возможным заменить (в процессе построения разбиения) прикладыванием к многограннику M по грани F конгруэнтного ему многогранника M'. Последующее отождествление точек граней F и F' ($F\subset M$, $F'\subset \subset M'$, $F\cong F'$), совместившихся при прикладывании многогранников, приводит нас к рассмотренному выше многограннику $\tilde{M}$. Здесь мы подошли вплотную к первой основной идее метода склейки: если склеивание по черной грани двух одинаковых выпуклых многогранников M и M' с двугранными углами вида π/k, $k=2, 3, \ldots$, приводит нас к выпуклому многограннику $\tilde{M}$ с двугранными углами того же вида (вследствие чего его можно использовать для получения новых разбиений пространства Лобачевского), то и в случае, когда многогранники M и M' не конгруэнтны, но имеют конгруэнтные «черные» грани (по которым эти многогранники можно призматически склеивать) и двугранные углы указанного вида, мы придем, путем склейки этих многогранников, к некоторому многограннику $\tilde{M}$, который можно будет использовать для построения разбиения пространства Лобачевского, отличного как от разбиения на многогранники M, так и от разбиения на многогранники M'. Таким образом, метод склейки основан на следующем утверждении, которое мы здесь сформулируем в виде отдельной леммы и которое доказывается рассуждениями, дословно аналогичными вышеприведенным рассуждениям, показывающим выпуклость многогранника $\tilde{M}$.

Лемма (о склейке). Пусть два выпуклых многогранника M и M' имеют две конгруэнтные гиперграни F и F'. Пусть, кроме того, все грани многогранника M, пересекающиеся с гипергранью F, ортогональны гиперплоскости грани F, а все грани многогранника M', пересекающиеся с гранью F', ортогональны гиперплоскости грани F'. (Будем, по-прежнему, называть черными такие грани, к которым все грани, смежные с ними, ортогональны). Обозначим через $\overline{M}'$ многогранник, зеркально равный многограннику M'. Тогда либо многогранник M', либо многогранник $\overline{M}'$ можно приложить по грани F к многограннику M так, что после отождествления соответствующих точек граней мы получим выпуклый многогранник $\tilde{M}$, каждый двугранный угол которого равен одному из двугранных углов многогранников M и M'.

Получив многогранник $\tilde{M}$, мы еще не можем утверждать, что получили уже некоторое новое разбиение и новую дискретную группу пространства Лобачевского. Правда, если все двугранные углы многогранников M и M' имели вид π/k_i, $k_i \geqslant 2$, то и многогранник $\tilde{M}$ имеет двугранные углы лишь такого вида и потому разбивает, согласно [1] (см. § 1), пространство Лобачевского, но, как мы увидим ниже, группы симметрии многогранников M и M' при этом в некотором смысле обедняются, а это не всегда желательно. Если же мы проследим далее алгоритм построения разбиения, например, на усеченные правильные многогранники (конечные или эквидистантные), то мы заметим, что он состоит фактически из двух шагов: на первом шаге мы производим отражения лишь в черных гранях (исходного многогранника и его образов) и получаем из усеченного правильного многогранника некоторый обобщенный бесконечный правильный (в смысле [11]) многогранник O с бесконечными правильными (в том же смысле) плоскими гранями и ребрами-прямыми, описанный около системы конгруэнтных сфер (или, соответственно, системы пар эквидистантных поверхностей), центры которых расположены в пространстве вполне дискретно и правильно. С другой стороны, многогранник O можно получить и путем приклеивания. Возьмем многогранник M и приклеим к нему по какой-нибудь черной грани конгруэнтный ему многогранник M', а затем приклеим такие же многогранники и ко всем черным граням многогранника M, эквивалентным F (будем говорить также, что мы повторили или размножили, или симметризировали многогранник $\tilde{M}$ группой симметрии многогранника M). После этого возьмем какой-нибудь из приклеенных многогранников и повторим группой его движений всю эту совокупность многогранников, что приклеена к одной из его черных граней (иными словами, повторим всю совокупность ранее построенных многогранников, группой симметрии одного из многогранников, вошедших в построение; иногда эту операцию мы будем называть симметризированием составного многогранника по группе симметрии основного многогранника). Будем затем то же самое проделывать и со всеми многогранниками, которые получаются в процессе построения. В конечном итоге мы придем к тому же многограннику O.

Двугранный угол многогранника O равен двугранному углу между белыми гранями усеченного правильного многогранника, а последний, согласно построению, измеряется величиной $2\pi/k$, $k \geqslant 3$, k — целое. Это обстоятельство позволяет сделать второй, завершающий шаг в построении разбиения: достаточно размножить многогранник O и его образы, получаемые в процессе построения, поворотами (порядка k) вокруг ребер этих многогранников.

Естественно попытаться сделать то же самое и для случая, когда многогранник $\tilde{M}$ получается склеиванием из двух различных многогранников M и M': сперва к грани F и к каждой черной грани многограника M, эквивалентной грани F по группе симметрии многогранника M, приклеить многогранник, конгруэнтный M' (симметризировать $\tilde{M}$ по группе симметрии M). Полученный (выпуклый в силу леммы о склейке) многогранник просимметризировать по группам многогранников M', вошедших в построение, и т. д. В конечном итоге мы получим некоторый бесконечный обобщенный многогранник O, размножая который поворотами или отражениями в гранях, мы и получим искомое разбиение, но для того чтобы можно было с уверенностью провести хотя бы первую симметризацию, необходимо, чтобы движения из группы симметрии многогранника M, переводящие в себя грань F, переводили бы в себя и многогранник M' (и наоборот). Следующее наше замечание и относится к тому необходимому условию, которое должно быть при этом выполнено.

Отметим еще одну особенность примеров разбиений предыдущего параграфа: в построениях нами обычно используются многогранники с богатой группой симметрии (как самого многогранника, так и его черных граней). Разрезать такие многогранники на фундаментальные области не всегда технически удобно: с симметричным многогранниками работать легче. Два таких многогранника, смежные по черной грани, расположены в разбиении друг относительно друга так, что их общими элементами симметрии являются те и только те элементы симметрии, движения которых переводят в себя их общую грань. Иными словами, пусть грань F многогранника M переходит в себя при всех движениях из (точечной) подгруппы H группы симметрии G, а грань F' многогранника M' переходит в себя при всех движениях из (точечной) подгруппы H' группы симметрии G' многогранника M', и пусть подгруппы H и H' — максимальные из подгрупп, обладающих таким свойством. (Группы H и H' с такими свойствами мы будем называть в дальнейшем стабильными группами граней F и F' соответственно). Тогда, рассматривая примеры предыдущего параграфа, мы видим, что стабильные группы H и H' граней F и F' не только изоморфны как абстрактные группы, эти две точечные группы не только геометрически одинаковы (т. е. геометрические конфигурации, образованные элементами симметрии, соответствующими всем движениям этих групп, конгруэнтны), но и конфигурации элементов симметрии этих групп H и H' расположены одинаковым образом относительно граней F и F' соответственно (т. е. после совмещения граней совмещаются и указанные конфигурации). В таких случаях мы будем говорить (следуя, например, [9]), что грани F и F' многогранников M и M' принадлежат к одному сорту, или что конгруэнтные грани F и F' одинаково огрупплены одной и той же группой. Сорт грани мы обычно будем записывать парой (F, H). Эта запись, правда, не отражает полностью понятие сорта (здесь не указана связь между группой и гранью), но если это не будет приводить к недоразумению, мы будем пользоваться этой записью; если нам встретятся конгруэнтные грани, огруппленные одной и той же группой, но по-разному, то мы это будем отмечать особо, ставя индекс у скобки. Таким образом, теперь мы можем сказать, что в примерах предыдущего параграфа сорт общей черной грани двух смежных многогранников разбиения одинаков, и именно это давало возможность проводить процесс симметризации. Если же мы имеем два (вообще говоря, не конгруэнтных) многогранника M и M', обладающих конгруэнтными черными гранями F и F' разного сорта, то при склеивании многогранников группа симметрии по крайней мере одного из них «пострадает», т. е. при построении разбиения на основе многогранника $\tilde{M}=M\cup M'$ в группу симметрии разбиения пространства на такие многогранники, вообще говоря, не войдут в качестве ее подгрупп группы симметрии многогранников M и M'. Таким образом, если мы хотим, чтобы группы движений многогранников M и M' были подгруппами группы симметрии разбиения на многогранники $\tilde{M}$ (если мы хотим «сохранить» группы многогранников M и M' для конструируемой группы симметрии разбиения и хотим пользоваться процессом симметризации при построении разбиения, то мы, вообще говоря, должны склеивать многогранники по граням одинакового сорта). Мы обычно будем стараться выполнять это требование, дабы не заниматься (без особой необходимости) исследованием (транзитивных на множестве черных граней) подгрупп групп симметрии склеиваемых многогранников.

Для дальнейшего полезно из всех возможных сортов выделить сорта двух особых видов: высшего и низшего. Будем называть сорт грани высшим, если ограничение действия стабильной группы грани на ней самой совпадает с нетривиальной группой симметрии этой грани; если же стабильная группа грани тривиальна, то сорт такой грани назовем низшим. (Например, правильная треугольная черная грань усеченного гироэдра (терминология Федорова [32]), одна из вершин которой соединяется одним (белым) ребром с вершиной черной четырехугольной грани, является гранью низшего сорта, а любая черная грань любого усеченного правильного многогранника является гранью высшего сорта).

Резюмируя сказанное, отметим, что метод склейки применяется для получения из двух разбиений пространства Лобачевского некоторого третьего разбиения. Необходимым условием этого метода является наличие двух различных разбиений пространства Лобачевского, стереоэдры которых обладают конгруэнтными черными гранями. Для того чтобы группа симметрии строящегося разбиения имела группы движений многогранников M и M' в виде своих подгрупп, необходимо, вообще говоря, чтобы склеивание производилось по граням одинакового сорта. В простейшем случае метод склейки состоит в том, чтобы подобрать два таких разбиения пространства Лобачевского, стереоэдры M и M' которых обладают конгруэнтными черными гранями F и F' одного и того же сорта, склеить эти два стереоэдра по черной грани в один многогранник $\tilde{M}$ и затем, используя элементы групп симметрии исходных разбиений (например, повороты или отражения в гранях), попытаться построить разбиение пространства на такие многогранники (в случае, когда плоскости черных граней являются плоскостями симметрии исходных разбиений, новое разбиение строится довольно легко, как мы в этом убедимся ниже на конкретных примерах). В более общем случае метод склейки состоит в том, чтобы подобрать некоторое конечное число (различных) разбиений пространства Лобачевского на стереоэдры, имеющие конгруэнтные черные грани одинаковых сортов, и, путем склейки стереоэдров этих разбиений, получить некоторый многогранник, который разбивал бы пространство Лобачевского. Дальнейшие обобщения этого метода (которых мы здесь касаться подробно не будем) состоят в том, что склейку производят по конгруэнтным граням различных сортов, снимают требование призматичности склейки и т. п.

Метод склейки был применен впервые в работе автора [18], посвященной вопросу о том, сколько и каких двумерных федоровских групп может содержать одна группа трехмерного пространства Лобачевского. В работе [19] этот метод уже занимает центральное место. Ниже мы проследим на конкретных примерах применение этого метода.

5.2. Склейка в Λ^2. Хотя в Λ^2 техника применения метода довольно тривиальна, мы все же бегло остановимся на ней, ибо метод склейки иногда приводит к довольно интересным примерам, полезным при решении некоторых вопросов из смежных областей математики.

Возьмем, для примера, любой n-угольник, описанный около окружности. Увеличением радиуса вписанной окружности всегда можно добиться того, чтобы все его n вершин стали идеальными. Ортогонально усекая такой вырожденный n-угольник, мы получаем $2n$-угольник, все углы которого — прямые. Этот многоугольник является фундаментальной областью федоровской группы плоскости Лобачевского, порожденной отражениями в сторонах многоугольника. Если мы возьмем теперь два различных многоугольника M и M' ($M \not\cong M'$) такого вида, выделим у каждого из них по одной черной стороне F и F', то за счет изменения радиусов окружностей, полувписанных в эти многоугольники, всегда можно добиться того, чтобы длины сторон F и F' оказались бы равными. Тогда склейка многоугольников M и M' приводит нас к новому многоугольнику $\tilde{M}$ со всеми прямыми углами. Многоугольник $\tilde{M}$ определяет некоторую третью федоровскую группу, порожденную отражениями в его сторонах.

К аналогичному результату мы придем и в случае, если многоугольник описан около пары симметричных эквидистант или около орицикла и имеет конечное число неэквивалентных сторон. Интерес представляют обычно случаи склейки наиболее симметричных правильных или полуправильных многоугольников. Пример одного обобщенного многоугольника, являющегося промежуточным продуктом при построении разбиения, схематически изображен на рис. 5. (этот многоугольник получается путем склейки правильного треугольника с правильным четырехугольником и последующего размножения многоугольника $\tilde{M}$ отражениями в черных сторонах). Представляют интерес также разбиения и группы, получающиеся при склейке нескольких правильных многоугольников, хотя симметрия многоугольников при этом обычно «портится». На рис. 6 схематически изображен обобщенный многоугольник, получающийся при склейке (правильных) шестиугольника, квадрата и треугольника.

5.3. Склейка в Λ^3. Не пытаясь получить все, что может дать этот метод в Λ^3, ограничимся здесь лишь некоторыми наиболее простыми примерами иллюстративного характера. Для них мы будем обычно использовать усеченные правильные и равногранно-полуправильные многогранники.

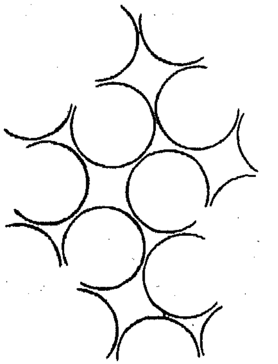

Рис. 5

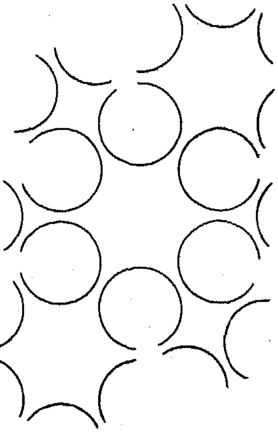

Рис. 6

Для первого примера возьмем пару конечных правильных многогранников с трехгранными углами: симплекс и додекаэдр. Производя их ортогональное усечение, мы получаем усеченный симплекс и усеченный додекаэдр с правильными треугольными черными гранями. За счет вариации параметра всегда можно добиться того, чтобы двугранный угол между белыми гранями оказался равным $2\pi/k$ ($k \geqslant 7$ — натуральное) у обоих усеченных многогранников одновременно (см. п. 4.3). Их черные грани при этом окажутся конгруэнтными правильными треугольниками с углами $2\pi/k$, и потому многогранники можно склеить по этим граням. Так как сорта треугольных граней одинаковы, то при склейке не нарушается симметрия многогранников. Размножая полученный в результате склейки многогранник $\tilde{M}$ группами движений многогранников, вошедших в его построение, мы получим некоторый бесконечный многогранник O, переходящий в себя при любых движениях из групп симметрии усеченных правильных многоугольников, вошедших в построение бесконечного многогранника O. (Многогранник O обладает бесконечным числом центров, инвариантных относительно точечных групп симметрии додекаэдра или симплекса — в разбиении эти точки будут играть роль аналогов центров симморфизма, рассмотренных в работе [5] для федоровских групп евклидова пространства). Мы закончим построение разбиения, если размножим наш обобщенный многогранник поворотами k-го порядка вокруг его ребер (прямых) и вокруг ребер образов этого многогранника при всевозможных таких поворотах. Таким образом, мы получим разбиение пространства Лобачевского, федоровская группа которого имеет в качестве своих подгрупп точечные группы правильного симплекса и правильного додекаэдра.

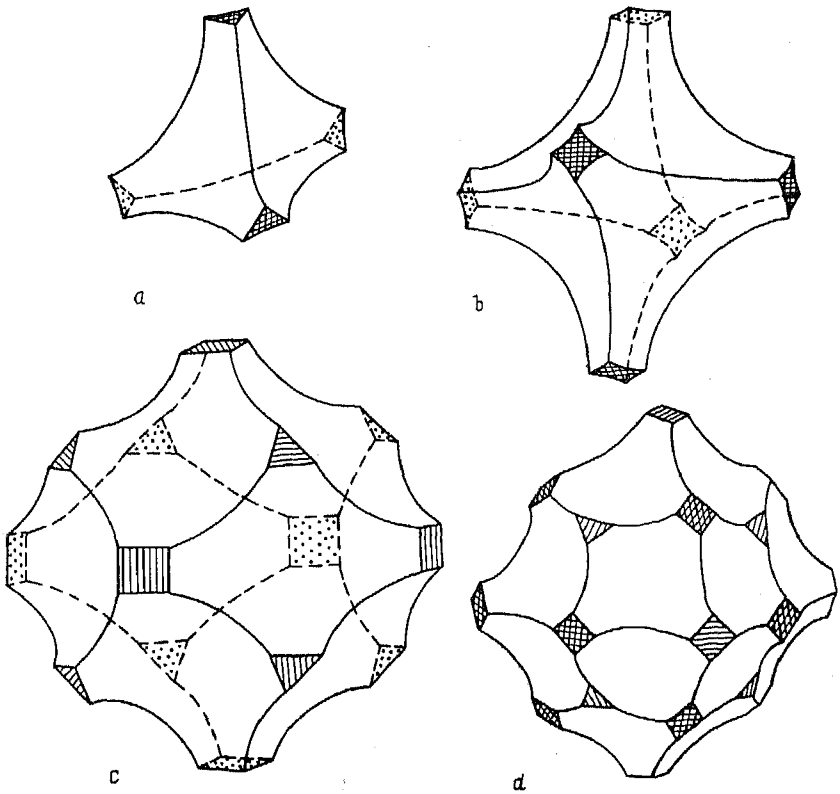

Рис. 7 a, b, c, d

Аналогичные построения можно провести и для любой другой пары правильных или равногранно-полуправильных многогранников (как конечных, так и бесконечных, если они обладают правильными углами одинакового сорта). Мы видим, таким образом, что метод склейки позволяет получать дискретные группы пространства Лобачевского, имеющие в качестве своих подгрупп некоторые двумерные дискретные группы Λ^2, S^2 и E^2.

Наконец, мы хотим отметить здесь еще один пример, показывающий направление дальнейшего обобщения метода парной склейки. Если мы возьмем, например, ромбический додекаэдр (см. [32]) и применим к нему метод ортогонального усечения, то получим многогранник, обладающий как треугольными, так и четырехугольными черными правильными гранями высшего сорта (рис. 7*c*). Группа симметрии этого многогранника действует транзитивно как на множестве треугольных, так и на множестве четырехугольных черных граней. Если мы возьмем теперь, например, правильный симплекс и правильный октаэдр и произведем их ортогональное усечение, то полученные правильные многогранники (см. рис. $7a, b$) мы сможем приклеить к усеченному ромбическому додекаэдру: по квадратной черной грани приклеить усеченный октаэдр, а по треугольной — усеченный симплекс. Далее привычным размножением полученного многогранника $\tilde{M}$ группами склеиваемых многогранников и вращениями вокруг ребер мы легко получаем новое интересное разбиение Λ^3. В этом построении усеченный ромбический додекаэдр играет роль буферного многогранника, позволяющего соединить в одно целое усеченный симплекс и усеченный октаэдр. Можно легко привести примеры и других многогранников, играющих роль буферных, но мы не будем здесь этим заниматься, ибо сразу встают вопросы существования и конструирования таких многогранников для произвольного заранее заданного набора многогранников с черными гранями. Все эти вопросы мы обсудим в следующем параграфе.

5.4. Итоги. Подводя итоги, мы можем сказать, что метод склейки позволил нам получить некоторые новые разбиения и дискретные группы в Λ^n при $n \leqslant 5$. Характерной особенностью этих групп является то, что они обладают различными точечными подгруппами. Но методом склейки можно из двух разбиений получить третье лишь тогда, когда стереоэдры этих разбиений имеют конгруэнтные черные грани (при этом мы обычно стараемся не разрушать симметрии склеиваемых многогранников). Естественно встает вопрос (на который уже обращалось внимание читателя): нельзя ли по двум данным стереоэдрам, имеющим, вообще говоря, различные черные грани F и F', найти такой третий стереоэдр, который обладал бы черными гранями обоих типов и к которому можно было бы приклеить по граням, конгруэнтным F первый стереоэдр, а по граням, конгруэнтным F', второй стереоэдр. Этим вопросом мы и займемся в следующем параграфе.

§ 6. МЕТОД БУФЕРНЫХ МНОГОГРАННИКОВ

6.1. Суть метода. Как мы отмечали в конце предыдущего параграфа, идея метода буферного многогранника состоит в том, чтобы по двум стереоэдрам M_1 и M_2 подобрать некоторый третий стереоэдр I, который можно было бы склеивать и с M_1, и с M_2 одновременно. Точнее, пусть стереоэдр M_1 обладает системой черных граней $\{F_1\}$, на которой группа симметрии G_1 многогранника M_1 действует транзитивно, а стереоэдр M_2 обладает системой черный граней $\{F_2\}$, на которой действует транзитивно группа симметрии G_2 многогранника M_2. Предположим, для начала, что грани F_1 и F_2 не конгруэнтны или конгруэнтны, но разных сортов. Тогда буферный стереоэдр I должен обладать двумя системами $\{F_1'\}$ и $\{F_2'\}$ граней, на каждой из которых группа G' симметрии многогранника I должна действовать транзитивно и, кроме того, грани системы $\{F_i'\}$ должны быть конгруэнтными граням системы $\{F_i\}$ $(i=1,2)$ и быть с ними одного сорта. Так как грани F_1' и F_2' или метрически различны, или различны в смысле сорта, то они не могут быть конгруэнтными по группе G', и это позволяет закончить конструкцию: по грани F_1' к многограннику I приклеиваем многогранник M_1, а по грани F_2' — многогранник M_2, всю конструкцию повторяем группами симметрии многогранников, вошедших в построение, после чего, используя элементы симметрии разбиений Λ^n на многогранники M_1, M_2 и I, получаем требуемое разбиение пространства. Если же грани F_1 и F_2 принадлежат одному сорту и конгруэнтны, то грани F_1' и F_2' могут оказаться эквивалентными по группе симметрии G' многогранника I, и тогда трудность будет заключаться в том, чтобы в группе G' выделить подгруппу (или нормальный делитель) H' конечного индекса, которая действует транизитивно на множествах $\{F_1'\}$ и $\{F_2'\}$ и относительно которой грани F_1' и F_2' уже не эквивалентны. Правда, в этом случае многогранники M_1 и M_2 можно склеить непосредственно по указанным черным граням, но в некоторых случаях эта склейка нецелесообразна и приходится искать буферный многогранник. Иными словами, в этом случае нам придется совокупность граней многогранника I, односортных с гранями F_1 и F_2, разбить на несколько классов и выделить из группы симметрии G' многогранника I такую ее подгруппу H' конечного индекса, которая бы действовала транзитивно на каждом из выделенных классов граней, но не переводила бы грани разных классов друг в друга. Тогда мы сможем к граням первого класса приклеивать многогранники, конгруэнтные M_1, а к граням второго класса — многогранники, конгруэнтные M_2 (грани остальных классов можно заклеить, например, многогранниками, конгруэнтными I). Тогда мы можем всю конструкцию симметризировать не всей группой симметрии многогранника I, а лишь ее выделенной подгруппой.

Так обстоит дело, если мы хотим склеивать лишь два стереоэдра. Если же у нас имеется целый набор $M_1, M_2, \ldots, M_k$ таких стереоэдров и мы хотим все их склеить вместе и получить дискретную группу Λ^n, в которую группы симметрии многогранников входили бы в виде ее подгрупп, то нам придется строить целый набор буферных многогранников. При этом, на первый взгляд, естественнее всего предположить, что многогранник M_i должен склеиваться при помощи буферного многогранника I_{i-1} с многогранником M_{i-1}, а при помощи буферного многогранника I_i с многогранником M_{i+1}. Но построение такого набора может оказаться довольно сложным делом: многогранник M_i может, например, обладать лишь одним сортом черных граней и тогда, оказавшись в роли буферного многогранника, связывающего многогранники I_{i-1} и I_i, он сам вынужден терять часть своей симметрии — мы должны выделить в его группе симметрии G_i подгруппу конечного индекса H_i, способную разбить черные грани на несколько классов, что весьма усложняет все построение (да и не всегда, в принципе, это возможно).

Выход из данной ситуации может состоять, например, в изменении схемы склейки: вместо того, чтобы вставлять между двумя стереоэдрами исходной системы буферный многогранник, мы можем сперва склеить между собой все буферные многогранники, образовав таким образом некий коллективный буферный многогранник, к которому и приклеиваются все стереоэдры исходной системы (каждый — к своему элементарному буферному многограннику). Для создания такой конструкции достаточно построить набор элементарных буферных многогранников, обладающих, например, следующими свойствами: 1) каждый элементарный буферный многогранник I_i обладает гранью F_i, по которой к нему можно приклеить многогранник M_i данной системы; 2) каждый элементарный буферный многогранник I_i обладает гранями некоторого фиксированного сорта, единого для всех буферных многогранников и отличного от всех сортов граней, по которым приклеиваются стереоэдры основного набора; 3) в группе симметрии элементарного буферного многогранника существует подгруппа индекса 2, по которой все грани указанного фиксированного сорта делятся на два класса так, что выделенная подгруппа действует транзитивно на каждом классе, но не переводит грани одного класса в грани другого класса. Тогда каждый многогранник I_i можно склеить с многогранником I_{i-1} по грани первого класса, а с многогранником I_{i+1} по грани второго класса (и тем самым образовать некий коллективный буферный многогранник) и к каждому буферному многограннику I_i можно приклеить по соответствующей черной грани многогранник M_i основной системы. Если теперь симметризировать всю конструкцию по группам G_i симметрии стереоэдров M_i и по указанным подгруппам групп симметрии вспомогательных многогранников I_i, то мы, вообще говоря, еще не получим обобщенный многогранник без вершин с ребрами-прямыми, аналогичный тому, что получался при склейке двух усеченных правильных многогранников: полученный многогранник может обладать еще несколькими системами черных граней и «непризматических» вершин. От черных граней обычно избавиться легко: достаточно произвести в них отражения (и склеить образ с прообразом), а от «непризматических» вершин избавиться в большинстве случаев труднее. Построение разбиения в целом обычно заканчивается путем использования элементов групп симметрии исходных и буферных разбиений.

В другом варианте построения условия 2) и 3) могут быть очевидным образом заменены следующим одним условием: 2°) каждый элементарный буферный многогранник обладает черными гранями двух различных стандартных сортов, отличных от всех сортов граней, по которым приклеиваются стереоэдры основного набора. Мы не будем здесь останавливаться на различных вариациях, а перейдем к конкретным примерам: они легко приведут читателя к различным вариантам построения.

6.2. Буферные многогранники в Λ^3. В Λ^2 мы не будем рассматривать действие метода буферных многогранников, ибо читатель сам сможет это сделать без особого труда, если хотя бы бегло ознакомится с примерами этого пункта. Первый простейший пример в Λ^3 нами уже был рассмотрен достаточно подробно в конце пункта 5.3. Мы там показали, каким образом можно склеить усеченный правильный симплекс с усеченным октаэдром, используя усеченный ромбический додекаэдр в качестве буферного многогранника. Ситуация здесь упрощалась следующими обстоятельствами: (1) нам нужно было соединить лишь два разбиения; (2) черные грани усеченного симплекса и усеченного октаэдра различны по топологии, метрике и сорту (причем обе грани — правильные многоугольники высшего сорта); (3) у буферного многограника лишь два типа черных граней и нет непризматических вершин; (4) все двугранные углы между белыми гранями равны.

Мы могли бы взять в качестве буферного многогранника у с е ч е н н ы й т р и а к и с - о к т а э д р (см. Е. С. Федоров [32]), но при этом нам уже пришлось бы быть очень осторожными. Все треугольные грани усеченного триакис-октаэдра (см. рис. 7d) эквивалентны по группе его симметрии и принадлежат к высшему сорту. Поэтому мы без всяких затруднений можем приклеить усеченный симплекс к усеченному триакис-октаэдру. Если же мы обратимся к квадратным граням усеченного триакис-октаэдра, то увидим, что не все они эквивалентны относительно группы симметрии многогранника. Те грани, что получились усечением вершин, смежных по ребрам только с четырехгранными вершинами, эквивалентны по группе симметрии усеченного триакис-октаэдра и принадлежат к высшему сорту. Те грани, что получились усечением вершин, смежных по ребрам как с четырехгранными, так и с трехгранными вершинами, обладают меньшей группой симметрии (принадлежат более низкому сорту: их группа симметрии четвертого порядка порождена отражениями в биссектрисах квадрата); между собой такие грани тоже эквивалентны по группе симметрии многогранника, но не эквивалентны квадратным граням высшего сорта (хотя и конгруэнтны им). Так как черные квадратные грани усеченного октаэдра принадлежат к высшему сорту, то, если мы не хотим портить группу симметрии октаэдра, мы должны приклеить усеченные октаэдры лишь к квадратным граням высшего сорта усеченного триакис-октаэдра. Для того, чтобы получить обобщенный многогранник без вершин с ребрами — прямыми (аналогичный полученным в предыдущем параграфе), достаточно во всех черных квадратных гранях второго сорта произвести отражения. Далее построение разбиения заканчивается, как и в предыдущем примере, поворотами k-го порядка вокруг ребер — прямых (предполагается, что размеры все подобраны так, что двугранный угол между смежными белыми гранями равен $2\pi/k$). Если же нас интересуют разбиения пространства на усеченные триакис-октаэдры, усеченные (правильные) симплексы и усеченные октаэдры, но нас не волнует тот факт, что стабильная подгруппа усеченного октаэдра может оказаться меньше его группы симметрии, — то в этом случае можно и к квадратным граням второго сорта приклеить усеченные октаэдры (при этом в разбиении будут попадаться усеченные октаэдры двух сортов).

Еще хуже будет обстоять дело, если мы попытаемся воспользоваться в качестве буферного многогранника усеченным гироэдром: его черные квадратные грани обладают лишь поворотной симметрией, а среди треугольных черных граней имеется четыре класса эквивалентности граней, из которых лишь грани одного класса обладают поворотной группой симметрии, а грани всех остальных классов относятся к низшему сорту. Таким образом, при использовании в качестве буферного многогранника усеченного гидроэдра мы вынуждены резко обеднить группы симметрии склеиваемых многогранников.

На этих примерах мы видим, что из трех перечисленных буферных многогранников первый наиболее прост (и потому предпочтителен). Пример второго буферного многогранника, вполне удовлетворяющего требованию сохранения симметрии склеиваемых (основных) многогранников, показывает, что буферных многогранников такого типа, достаточно много. Третий пример показывает, как могут обедняться группы симметрии многогранников в процессе построения.

Так обстоит дело при склеивании с помощью буферного многогранника двух многогранников с различными правильными черными гранями. При склеивании целого набора таких многогранников задача усложняется. В предыдущем параграфе было приведено много примеров ортогонально усеченных многогранников с правильными гоноэдрами. В качестве следующего примера мы и рассмотрим один из вариантов того, как для конечного набора $M_1, M_2, \ldots, M_n$ таких многогранников построить систему буферных многогранников (или один коллективный буферный многогранник). Забегая вперед, отметим, что буферные многогранники будут строиться в виде некоторых эквидистантных многогранников методами, аналогичными рассмотренным в п. 4.4.

Итак, пусть нам дан конечный набор многогранников $M_1, M_2, \ldots, M_n$, разбивающих Λ^3 и обладающих правильными черными гранями. Пусть M — один из многогранников этого набора и пусть $(m, \mathscr{L})$ — сорт его правильной черной грани (здесь, в отличие от п. 5.1, мы немного специализируем символ сорта: ставим на первом месте взамен названия грани число m — число сторон грани). Согласно сказанному выше, наша задача состоит в том, чтобы по сорту $(m, \mathscr{L})$ грани многогранника M построить буферный многогранник I, обладающий как гранями сорта $(m, \mathscr{L})$, так и гранями некоторых двух фиксированных сортов $(O_1, \mathscr{N}_1)$ и $(O_2, \mathscr{N}_2)$, не зависящих от выбора многогранника и одинаковых для всех многогранников набора M_i, $i=1, 2, \ldots, n$. При построении буферного многогранника I (по данному сорту $(m, \mathscr{L})$ грани) число m определит топологию и метрику буферного многогранника, а группа $\mathscr{L}$ укажет, какую подгруппу H группы симметрии G этого многогранника следует использовать при построении разбиения.

Приступая к построению многогранника I, предположим сначала, что сорт $(m, \mathscr{L})$ рассматриваемой грани — самый низший, $\mathscr{L}=E$ (грань не переходит в себя ни при каких движениях из группы симметрии многогранника M, отличных от тождественного). Рассмотрим разбиение $\{\mathscr{Z}'\}$ плоскости Лобачевского на равносторонне-полуправильные $4p$-угольники $\mathscr{Z}'$, сходящиеся в вершинах по m и по $2m'$. От группы симметрии G, соответствующей такому разбиению, оставим лишь ее подгруппу H, порожденную отражениями в биссектрисах тех углов многогранников $\mathscr{Z}'$, которые сходятся по $2m'$ в вершинах (существование такой подгруппы, состоящей из указанных отражений и порожденных ими движений, следует, в принципе, из выбора чисел $4p$ и $2m'$, в чем мы убедимся ниже). Одновременно рассмотрим разбиение Дирихле $\{\mathscr{Z}\}$ для тех вершин $4p$-угольников, где сходится по m многоугольников $\mathscr{Z}'$. Это разбиение является разбиением плоскости на равносторонне-полуправильные $2m$-угольники $\mathscr{Z}$, имеющие центры в указанных узлах разбиения $\{\mathscr{Z}'\}$. Вершины этих $2m$-угольников расположены в центрах $4p$-угольников (здесь сходится $2p$ таких $2m$-угольников) и в тех его вершинах, где сходится $2m'$ исходных $4p$-угольников (в них сходится столько же и $2m$-угольников разбиения Дирихле). Тогда указанную подгруппу H можно рассматривать как группу, порожденную отражениями в сторонах $2m$-угольника разбиения $\{\mathscr{Z}\}$, а сам $2m$-угольник будет ее фундаментальной областью. Отсюда уже следует существование указанной подгруппы H: само построение можно было начать с разбиения $\{\mathscr{Z}\}$ плоскости на $2m$-угольники, сходящиеся в вершинах по $2p$ и $2m'$, а затем построить разбиение $\{\mathscr{Z}'\}$ плоскости на $4p$-угольники. Отметим, что в тех узлах разбиения $\{\mathscr{Z}'\}$, где сходится m $4p$-угольников (в центрах $2m$-угольников разбиения Дирихле), нет никаких элементов симметрии из выбранной подгруппы H.

Построим теперь буферный многогранник I тем же способом, каким мы строили усеченные равногранно-полуправильные эквидистантные многогранники в п. 4.4, но используя теперь по-разному обе стороны базовой плоскости разбиения. С одной стороны от плоскости разбиения построим многогранную поверхность, соответствующую разбиению $\{\mathscr{Z}'\}$ плоскости на полуправильные $4p$-угольники. Она будет иметь правильные m-угольные грани нужных нам размеров, не переходящие в себя ни при каких движениях (кроме тождественного) из рассматриваемой подгруппы H группы симметрии G разбиений $\{\mathscr{L}'\}$ и $\{\mathscr{L}\}$, т. е. грани нужного нам сорта (m, E) и правильные $2m'$-угольные грани, сорт которых $(2m', \mathscr{N})_1$ определяет группа N, порожденная отражениями в двух соседних медианах $2m'$-угольника. С другой стороны от плоскости разбиений построим многогранную поверхность, соответствующую разбиению $\{\mathscr{Z}\}$ плоскости на $2m$-угольники. У нее будут правильные $2p$- и $2m'$-угольные грани, при этом сорт $(2m', \mathscr{N})_2$, $2m'$-угольных граней определяет группа $\mathscr{N}$, порожденная отражениями в двух соседних диагоналях $2m'$-угольника. Отметим, что $2m'$-угольные грани у обоих построенных поверхностей конгруэнтны (при подходящем выборе параметров), группы этих граней — геометрически одинаковые, но связаны группы с гранями по-разному, что и отмечает индекс, поставленный у символа сорта, который указывает, что эти сорта — различны.

Если сорт $(m, \mathscr{L})$ рассматриваемой грани таков, что $\mathscr{L} \neq E$, то в этом случае можно использовать тот же самый многогранник I, но огруппленный, вообще говоря, более полной подгруппой $\bar{H}$ группы симметрии G разбиения $\{\mathscr{Z}'\}$. Группа $\bar{H}$ уже не будет действовать однотранзитивно на разбиении $\{\mathscr{Z}\}$. В некоторых случаях может оказаться, что у многогранника I указанные $2p$- и $2m'$-угольные грани принадлежат высшему сорту, а не указанным нами сортам. Это будет происходить в тех случаях, когда в группу входят отражения в биссектрисах углов m-угольных граней, что соответствует отражениям в сторонах $4p$-угольников. Если не во всех биссектрисах происходят отражения, то у нас имеются $2m'$-угольные грани указанных сортов, а если отражения происходят в биссектрисах всех углов m-угольных граней, то для того, чтобы и в этих случаях иметь $2m'$-угольные грани указанных сортов, достаточно из группы G удалить отражения в биссектрисах тех углов многоугольников $\mathscr{Z}'$, которые сходятся по $2m'$ в вершинах (что можно сделать ввиду выбора чисел $4p$ и $2m'$). Таким образом, для любого многогранника M из системы M_i, $i=1, 2, \ldots, n$, по сорту $(m, \mathscr{L})$ черной грани этого многогранника мы смогли построить буферный многогранник I, обладающий как гранями сорта $(m, \mathscr{L})$, так и гранями двух фиксированных сортов: $(2m', \mathscr{N})_1$ и $(2m', \mathscr{N})_2$.

Все дальнейшее построение разбиения можно осуществить, например, по следующей схеме. Возьмем многогранник I_1, отметим какую-нибудь его грань сорта $(2m', \mathscr{N})_1$, проведем прямую, ортогональную плоскости этой грани и проходящую через ее центр. Эта прямая пройдет и через общий узел разбиений $\{\mathscr{Z}_1\}$ и $\{\mathscr{Z}_1'\}$, соответствующий выбранной грани, и через центр грани сорта $(2m', \mathscr{N})_2$ симметричной выбранной грани сорта $(2m',$

$\mathcal{N})_1$. Возьмем теперь многогранник I_2 и приложим (приклеим) его к многограннику I_1 по выделенной грани сорта $(2m', \mathcal{N})_2$. Тогда прямая, построенная выше, пересечет ортогонально базовую плоскость многогранника I_2 в общем узле разбиений $\{\mathcal{Z}_2\}$ и $\{\mathcal{Z}_2'\}$ и грань сорта $(2m', \mathcal{N})_1$, симметричную грани склейки многогранников I_1 и I_2 относительно базовой плоскости многогранника I_2 в ее центре. К многограннику I_2 по выделенной грани сорта $(2m', \mathcal{N})_1$ приложим многогранник I_3 и т. д. Это нанизывание буферных многогранников на прямую с последовательным чередованием сортов склеиваемых граней через $(n-1)$ шаг приведет нас к коллективному буферному многограннику W, имеющему грани всех нужных нам сортов $(m_1, \mathcal{L}_1)$, $(m_2, \mathcal{L}_2), \ldots, (m_n, \mathcal{L}_n)$. Приклеим теперь к каждому буферному (элементарному) многограннику I_i, вошедшему в построение многогранника W, по грани $(m_i, \mathcal{L}_i)$ многогранник M_i. Этим мы получим, согласно лемме о склейке, многогранник, разбивающий Λ^3. Чтобы фактически завершить построение разбиения, нужно повторять всю конструкцию группами многогранников, вошедших в построение (этим мы получим некий обобщенный многогранник, группа симметрии которого содержит в качестве своих подгрупп группы многогранников M_i и I_i), и элементами симметрии разбиений Λ^3 на многогранники M_i и I_i, характеризующими смежность (склейку) многогранников в разбиениях $\{M_i\}$ и $\{I_i\}$ по граням, оставшимся свободными. Так, например, если все многогранники набора M_i получены усечением равногранно-полуправильных многогранников (конечных и бесконечных), то можно добиться того, чтобы все двугранные углы между смежными белыми гранями у всех многогранников M_i и I_i были равны π/k ($k \geqslant 4$, k — целое число, единое для всех многогранников), и чтобы многогранники системы обладали только трехгранными углами призматического типа. Тогда для построения разбиения достаточно произвести симметризацию полученной после склейки многогранников M_i и I_i конструкции по группам многогранников, сделать отражения во всех оставшихся свободными черных гранях (этим мы получим некий обобщенный многогранник без вершин с ребрами — прямыми) и повторить полученный обобщенный многогранник поворотами k-го порядка около прямых, являющихся его ребрами и ребрами обобщенных многогранников, полученных из исходного путем таких поворотов.

Мы не будем здесь больше останавливаться на примерах применения метода буферных многогранников в Λ^3, отсылая читателя к работе [18].

6.3. Итоги. Заканчивая параграф, мы отметим лишь, что метод буферных многогранников позволяет получить счетное число федоровских групп и компактных разбиений в Λ^4 и Λ^5 и расширяет наши представления о богатстве двумерных подгрупп, которые могут содержаться в одной трехмерной группе.

§ 7. НЕКОТОРЫЕ ИТОГИ И ПРОБЛЕМЫ

В этом параграфе коротко перечислим те результаты, которые удалось получить, благодаря разработанным методам построения дискретных групп пространства Лобачевского.

Уже метод вариации одного линейного параметра позволил получить интересные результаты. Решен вопрос о разбиениях трехмерного пространства Лобачевского на полуправильные многогранники (тела Архимеда и им дуальные), что, в свою очередь, дает решение вопроса о правильных разбиениях Λ^3 на неравные правильные многогранники. Фактически именно этим методом получены примеры разбиений на некомпактные многогранники конечного объема в Λ^n при $n \leqslant 10$. Тем самым метод вариации одного параметра дал нам примеры квазифедоровских групп пространства Лобачевского в указанных размерностях и примеры федоровских групп в размерностях 3 и 4.

Естественным развитием метода вариации одного параметра является метод вариации нескольких параметров. Этот метод позволяет легко получить счетное число разбиений трехмерного пространства Лобачевского на конечные многогранники (призмы) и дать изящное и простое геометрическое доказательство бесконечности числа федоровских групп в Λ^3.

Примеры, построенные этим методом, показывают, что число нормальных (правильных) конечных стереоэдров в Λ^3 по крайней мере счетно. Разрезая каждую из призм разбиения ее плоскостями симметрии на треугольные призмы (являющиеся фундаментальными областями дискретных групп симметрии разбиений), мы убеждаемся, что существуют различные стереоэдры одного и того же комбинаторного типа. Более того, мы получаем таким образом счетное число (топологически) различных нормальных и правильных разбиений Λ^3 на многогранники одного и того же топологического строения.

Попутно мы получаем еще один интересный, с точки зрения дискретных групп, факт: существуют дискретные группы (с компактными фундаментальными областями), имеющие элеметны сколь угольно высоких конечных порядков (таковыми являются повороты вокруг осей призм, которые являются одновременно и осями симметрии всего разбиения пространства). Отметим еще, что этим же методом (используя призмы) мы легко получаем аналогичные результаты относительно некомпактных разбиений конечной меры и квазифедоровских групп в Λ^3 (в целях экономии в тексте эти случаи не рассматривались; читатель сам может их легко восстановить). Наконец, метод вариации нескольких параметров дает нам еще несколько разбиений и федоровских групп в Λ^4 и Λ^5.

Метод усечения идеальных граней позволяет нам продолжить вариацию параметров, останавливаемую выходом на абсолют вершин многогранника. Это резко увеличивает возможности конструирования разбиений и групп. В Λ^3 мы получаем этим методом счетное множество топологически различных стереоэдров (усеченных правильных призм), каждый из которых разбивает пространство счетным числом способов. Используя неправильные прямые усеченные призмы, мы убеждаемся, что методом усечения идеальных граней можно построить федоровскую группу, имеющую любое наперед заданное конечное число различных осей данных (сколь угодно больших) порядков. На том же примере мы убеждаемся в том, что в одной трехмерной дискретной группе может быть любое конечное число неизоморфных двумерных подгрупп (действующих в различных инвариантных плоскостях) любых наперед заданных жанров $p_1, p_2, \ldots, p_k; p_i \geqslant 2$. Этим методом мы получаем примеры разбиений на усеченные правильные и полуправильные многогранники (конечные, эквидистантные и орисферические). Полученные этим методом примеры (особенно в Λ^4 и Λ^5) весьма полезны для дальнейшего: они приспособлены к применению к ним метода склейки. Отметим, наконец, что именно методом усечения идеальных вершин получены примеры квазифедоровских групп с элементами сколь угодно высоких конечных порядков, которые явились исторически первыми примерами неарифметических групп (кроме хорошо известных, см., например, [15]).

Метод склейки обязан своим появлением методу усечения идеальных вершин. Наличие черных граней естественно поднимает вопрос: нельзя ли прикладывать по конгруэнтным черным граням неравные многогранники, разбивающие пространство. Этот метод дал нам возможность соединить в одной трехмерной группе несколько точечных (орисферических, двухмерных федоровских) групп. Он позволил получить новые примеры дискретных групп в Λ^4 и Λ^5. Пожалуй самое ценное, что дает нам метод склейки, это новое направление в исследовании структуры пространственных групп, связи структуры групп и структуры ее подгрупп (действующих в пространствах меньшей размерности).

Желание склеить многогранники, не имеющие черных граней одинакового сорта, естественно приводит к идее буферного многогранника, развитием которой и явился метод буферных многогранников. Этот метод позволяет нам соединить в одной дискретной группе пространства Лобачевского самые разнообразные двумерные дискретные группы. Тем самым этот метод дает нам некоторые представления об общей структуре «симморфных» дискретных групп трехмерного пространства Лобачевского. Этот метод позволяет получить еще один полезный результат — он позволяет построить счетную серию попарно различных разбиений четырехмерного и пятимерного пространства Лобачевского на компактные многогранники. Построенные примеры в то же время показывают, что число нормальных и правильных конечных стереоэдров в Λ^4 и Λ^5, по крайней мере, счетно. В то же время эти примеры дают и простое геометрическое доказательство счетности числа федоровских групп в Λ^4 и Λ^5. В четырехмерном пространстве Лобачевского этим же методом мы легко можем получить аналогичные результаты для квазифедоровских групп и разбиений на некомпактные многогранники конечной меры.

Заканчивая обзор результатов, хочется особо отметить тот факт, что все конструкции позволяют при необходимости произвести аналитическую запись образующих и фундаментальных областей в любой их интерпретации (как это было проделано, например, в [16] для квазифедоровских групп, подробно описанных в п. 4.5), указать все определяющие соотношения, вычислить объем фундаментальных областей и т. п.

Мы здесь кратко перечислили некоторые следствия, непосредственно получающиеся из тех примеров, которыми мы иллюстрировали методы построения дискретных групп пространства Лобачевского.

Эти методы позволили получить интересные результаты в геометрии геодезических на компактных поверхностях постоянной отрицательной кривизны [26], построить счетные серии трехмерных многообразий (как компактных [7], так и некомпактных, но имеющие конечный объем [25]) постоянной отрицательной привизны.

Данный обзор ограничен рамками чисто геометрических методов построения дискретных групп. Топологические методы, связанные с проблемами трехмерных многообразий, читатель может найти в [47]. Алгебраическим и арифметическим методам посвящены работы [30], [27]. Аналитические стороны теории рассматриваются в [13], [3]. Специально проблемам коксетеровских групп посвящены работы [2] [4], [29]. Заканчивая обзор, выделим лишь две основные проблемы этой теории: проблему классификации всех трехмерных дискретных групп движений пространства Лобачевского и проблему выделения подгрупп без кручения в таких группах. Кроме того хочется поставить еще один вопрос: все ли дискретные группы трехмерного пространства Лобачевского можно получить рассмотренными в этом обзоре методами? Поясним это. Применение изложенных методов обычно шло следующим путем. Рассматривались одна или некоторое конечное число двумерных дискретных групп движений (сферы, орисферы или плоскости Лобачевского). Строились многогранники, группы симметрии которых совпадали с данными группами (обычно рассматривались изогоны, изоэдры или их усечения). Затем строилось разбиение пространства Лобачевского на такие многогранники или на многогранники, получаемые из них методом склейки или методом буферных многогранников. Наконец, рассматривалась группа симметрии полученного разбиения. Вопрос: всякая ли дискретная группа движений пространства Лобачевского будет подгруппой группы симметрии некоторого так полученного разбиения? Иными словами, изложенные методы дают возможность в некотором смысле «склеивать» трехмерные группы из двумерных и получать аналоги (в определенном смысле) симморфных [12] федоровских групп. Вопрос: всякая ли дискретная группа движений Λ^3 получается как подгруппа такой «склееной» группы?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров А. Д.*, О заполнении пространства многогранниками. — Вестн. ЛГУ. Сер. мат., физ. и химии, 1954, № 2, 33—43 (РЖМат, 1955, 424)
2. *Андреев Е. М.*, О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. — Мат. сб., 1970, *81*, № 3, 445—478 (РЖМат, 1970, 9А304)
3. *Апанасов Б. Н.*, Дискретные группы преобразований и структуры многообразий. — Наука, 1983, 242 с.
4. *Винберг Э. Б.*, Отсутствие кристаллографических групп отражений компактного типа в пространстве Лобачевского размерности ≥30. МГУ. М., 1982. 51 с. Библиогр. 13 назв. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 1 июля 1982 г., № 3418-Деп.) (РЖМат, 1982, 11А135 ДЕП)
5. *Галиулин Р. В.*, Матрично-векторный способ вывода федоровских групп. — Ин-т кристаллогр. АН СССР. М., 1969. 99 с., илл., библиогр. 9, № 1094—69 Деп. (РЖМат, 1970, 3А251)
6. *Гордевский Д. З., Лейбин А. С.*, Популярное введение в многомерную геометрию. Харьковск. ун-т. Харьков, 1964, 191 с. (РЖМат, 1965, 5А349К)
7. *Гуцул И. С.*, Об одной серии компактных трехмерных многообразий постоянной отрицательной кривизны. — Докл. АН СССР, 1979, *248*, № 2, 283—286 (РЖМат, 1980, 2А662)
8. —, *Макаров В. С.*, Об одном свойстве федоровских групп пространства Лобачевского. — Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1978, *148*, 106—108 (РЖМат, 1979, 1А259)
9. *Делоне Б. Н.*, Теория планигонов. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1959, *23*, № 3, 365—386 (РЖМат, 1960, 10903)
10. —, *Сандакова Н. Н.*, Теория стереоэдров. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1961, *64*, 28—51 (РЖМат, 1962, 6А434)
11. *Заморзаев А. М.*, О правильных многосторонниках и многогранниках в пространстве Лобачевского — Уч. зап. Кишиневск. ун-та, 1959, *39*, 195—207 (РЖМат, 1960, 8202)
12. —, *Палистрант А. Ф.*, Теория дискретных групп симметрии.— Кишиневск. ун-т. Кишинев, 1977, 101 с.
13. *Крушкаль С. Л., Апанасов Б. Н., Гусевский Н. А.*, Клейновы группы и униформизация в примерах и задачах. — Новосибирск: Наука, 1981, 231 с.
14. *Макаров В. С.*, Об одном классе разбиений пространства Лобачевского. — Докл. АН СССР, 1965, *161*, № 2, 277—278 (РЖМат, 1965, 8А430)
15. —, Об одном классе дискретных групп пространства Лобачевского, имеющих бесконечную фундаментальную область конечной меры. — Докл. АН СССР, 1966, *167*, № 1, 30—33 (РЖМат, 1966, 8А561)
16. —, К теории разбиений пространства Лобачевского. — Дис. канд. физ.-мат. наук. — Кишинев, 1966, 95 с.
17. —, Геометрический пример неарифметических групп в пространстве Лобачевского. — В кн. Тез. кр. научн. сообщ. Междунар. конг. мат., секция 10. М., 1966, 14.

18. —, Об одном классе двумерных федоровских групп. — Изв. АН СССР, 1967, *31*, № 3, 531—542 (РЖМат, 1968, 1А781)
19. —, О федоровских группах четырехмерного и пятимерного пространств Лобачевского. — В сб. «Исслед. по общей алгебре». Вып. 1. Кишинев, 1968, 120—129 (РЖМат, 1970, 8А491)
20. —, Примеры некомпактных разбиений пространства Лобачевского Λ^n при $n \leqslant 9$. — В сб. «Исслед. по дискретн. геометрии». Кишинев, «Штиинца», 1974, 120—123 (РЖМат, 1974, 8А505)
21. —, О разбиениях пространства Лобачевского на полуправильные многогранники. — В сб. «Исслед. по дискретн. геометрии». Кишинев, «Штиинца», 1974, 107—120 (РЖМат, 1974, 8А504)
22. —, Об одном некомпактном разбиении десятимерного пространства Лобачевского. — В кн. «Всес. научн. конф. по неевклид. геом. «150 лет геометрии Лобачевского». М., Казань, 1976, 129
23. —, Об одном некомпактном разбиении десятимерного пространства Лобачевского. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1980, *152*, 162—164 (РЖМат, 1980, 11А698)
24. —, Методы построения дискретных групп пространства Лобачевского. — В кн. «Всес. симп. по теории симметрии и ее обобщениям: Тез. докл., 1980, Кишинев, 78—81
25. —, *Гуцул И. С.*, О некомпактных трехмерных многообразиях постоянной отрицательной кривизны, имеющих конечную меру. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1980, *152*, 165—169 (РЖМат, 1980, 11А779)
26. *Макарова К. П.*, О точках самопересечения геодезической на гладкой замкнутой поверхности с локально Лобачевского метрикой. — Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1980, *152*, 170—174 (РЖМат, 1980, 11А774)
27. *Маргулис Г. А.*, Арифметические свойства дискретных подгрупп. — Успехи мат. наук, 1974, *29*, № 1, 49—98 (РЖМат, 1974, 6А562)
28. *Мордухай-Болтовской М. М.*, О заполнении неевклидовых пространств правильными многоугольниками и многогранниками. — Уч. зап. НИИ мат. и физ. Рост. н/Д Гос. ун-та, 1938, № 2, 35—37
29. *Никулин В. В.*, Об арифметических группах, порожденных отражениями в пространствах Лобачевского. — Изв. АН СССР. Сер. мат., 1980, *44*, 637—669 (РЖМат, 1980, 11А489)
30. *Рагунатан М.*, Дискретные подгруппы групп Ли. — Пер. с англ. М., Мир, 1977, 320 с. (РЖМат, 1977, 9А533)
31. *Стрингхем В. И.*, Правильные фигуры в n-мерном пространстве. — Успехи матем. наук, 1944, *10*, 22—33
32. *Федоров Е. С.*, Начала учения о фигурах. — Л., Изд-во АН СССР, 1953, 409 с. (РЖМат, 1954, 2280К)
33. *Фейеш Тот Л.*, Расположение на плоскости, на сфере и в пространстве. — Пер. с нем. М., Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1958, 363 с. (РЖМат, 1960, 13265К)
34. Best *L.*, On torsion-free discrete subgroups of PSL(2, *C*) with compact orbit space. — Can. J. Math., 1971, *23*, № 3, 451—460 (РЖМат, 1972, 3А195)
35. *Coxeter H. S. M.*, Regular honeycombs in hyperbolic space. — Prov. Internat. Congr. Math., 1954, vol. 3. Groningen-Amsterdam, 1956, 155—169 (РЖМат, 1958, 712)
36. *Klein F.*, 1879. Ges. Math. Abh., Bd. 3 (Berlin, 1923), 90—136
37. *Koebe P.*, Riemansche Mannigflattingkeiten und nichteuklidische Raumformen. — I. Ber. preuss. Akad. Wiss., 1927, 164—196; II, 1928, 345—348; III, 1928, 385—442; IV, 1929, 414—457; V, 1930, 304—364; VI, 1930, 505—541; VII, 1931, 506—534; VIII, 1932, 249—284
38. *Lanner F.*, On complexes with transitive groups of automorphisms. — Lunds Univ. Math. sem., 1950, 11
39. *Löbell F.*, Beispiele geschlossener dreidimensionaler Clifford-Kleinscher Rämu negativer Krümmung. — Ber., Sachs. Akad. Wiss., Leipzig, 1931, *83*, 167—174

40. *Maskit B.*, On Poincare's theorem for fundamental polygons. — Adv. Math., 1971, *7*, № 3, 219—230 (РЖМат, 1972, 6A583)
41. *Mostov G. D.*, Quasiconformal mappyngs in n-space and the rigidity of huperbolic space forms. — Publ. Math. IHES, 1967, *34*, 54—104
42. *Poincaré H.*, Memoire sur les groupes fuchsiennes. — Acta math., 1882, *1*, 1—62
43. —, Theorie de groupes kleineens. — Acta math., 1883, *3*, 49—92
44. *Schlegel V.*, Theorie der homogen zusammen gesetzen Raumgebilde. — Nova Acta. Leop. Carol, 1883, *44*, 343—459
45. *Selberg A.*, On discontinuous groups in higherdimensional symmetric spaces. — Contrib. Funct. theory. Bombay, Tata Inst. Fundam. Res., 1960, 147—164 (РЖМат, 1962, 3A332)
46. *Sullivan D.*, Travaux de Thurston sur les groupes quasifuchsiens et les variétés hyperboliques de dimension 3 fibrees sur S^1. — Sem. Bourbaki, 32-e annee, 1979/80, № 554, 554—601
47. *Thurston W. P.* Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. — Bull. Amer. Math. Soc., 1982, *6*, № 3, 357—358 (РЖМат, 1983, 1A567)
48. *Zassenhaus H.*, Über einen Algorithmus zur Bestimmung der Raumgruppen. — Comment. Math. Helv., 1948, *21*, 117—141