5. П е т е р с е н И. О сходимости приближенных методов интерполяционного типа для обыкновенных дифференциальных уравнений.- Изв. АН Эст.ССР, сер. физ-матем. и техн. наук, 1961, т.10, с. 3 - 12.

6. К а р п и л о в с к а я Э.Б. О сходимости метода подобластей для обыкновенных интегро-дифференциальных уравнений.- Вычислительная матем. и матем.физика, 1965, т.5,№ 1, с.124 - 132.

7. Г а б д у л х а е в Б.Г., А х м е т о в С.М. Прямые методы решения уравнения теории струй.- Дифференциальные уравнения, 1977, т.XIII, № 7, с. 1299 - 1307.

8. Г а б д у л х а е в Б.Г. Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. Казань, 1980.- 231 с.

9. Г а б д у л х а е в Б.Г. Аппроксимация в H-пространствах и приложения.- ДАН СССР, 1975, т.223, № 6, с. 1293-1296.

10. Г а б д у л х а е в Б.Г. Наилучшие приближения решений функциональных уравнений.- Международная конференция по теории приближения функций. Тезисы докладов. Киев,30 мая-6 июня 1983.

11. В е к у а Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. М., 1970. - 379 с.

12. К а д у ш и н В.П. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений с комплексно сопряженными неизвестными.-В сб.: Математический анализ. Казань, 1978, с.39 - 51.

А.Л.Кузьмина

ОБ ИНТЕРВАЛЬНЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ ТИПА ГАУССА

Пусть задана система узлов x_k, $x_k \in [a,b], k=\overline{1,n}$, и узловых интервалов $[u_i,v_i]$, $[u_i,v_i] \subset [a,b]$, $i=\overline{1,m}$, причем $x_k \notin [u_i,v_i]$ для всех k и i.

Функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и известны значения $f(x_k)$, $k=\overline{1,n}$, и

$$I_i(f) = \frac{1}{v_i-u_i}\int_{u_i}^{v_i} f(x)\,dx\ , \quad i=\overline{1,m}\ .$$

Рассмотрим интерполяционные квадратурные формулы вида

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(f) + R_m(f) \qquad (1)$$

и

$$\int_a^b p(x) f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(f) + R_{n,m}(f), \qquad (2)$$

где $p(x) \geqslant 0$ и интегрируема на $[a, b]$, коэффициенты

$$A_k = \int_a^b p(x)\, \ell_{n,k}(x)\,dx, \quad B_i = \int_a^b p(x)\, \ell_i(x; m)\,dx,$$

$\ell_{n,k}(x)$ и $\ell_i(x;m)$ – точечные и интервальные, соответственно, фундаментальные многочлена Лагранжа, $R_m(f)$ и $R_{n,m}(f)$ – погрешности этих формул.

Здесь мы найдем условия, при которых формула (1) будет точна для всех многочленов степени не выше $2m-1$, а формула (2) – для всех многочленов степени не выше $2n+m-1$, т.е. формулы (1) и (2) будут квадратурными формулами типа Гаусса, получим также оценку их погрешности.

Условия точности формулы (2) для всех многочленов степени не выше $n+2m-1$ с оценкой погрешности исследованы в [1].

1. Введем многочлены, ортогональные относительно системы $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$.

Многочлены $\omega_m(x)$ назовем ортогональными с весом $p(x)$ относительно системы $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, если

$$\int_a^b p(x)\, \omega_m(x)\, q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(\omega_m q) \qquad (3)$$

для всех многочленов $q(x)$ степени не выше $m-1$. Многочлены $\omega_m(x)$, ортогональные с весом $p(x)$ на $[a,b]$, можно рассматривать как предельный случай, когда $[u_i, v_i]$ $(i=\overline{1,m})$ стягивается в точку – i-й корень многочлена $\omega_m(x)$.

Так как многочлены, ортогональные с весом $p(x)$ на $[a,b]$, существуют, то там же, как и в [1], доказывается существование семейства систем $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, для которых можно построить многочлены $\omega_m(x)$, удовлетворяющие условию (3).

Такие системы узловых интервалов $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, будем называть системами типа Гаусса.

Теперь может быть доказана

Т е о р е м а. Квадратурная формула (1) точна для всех многочленов степени $2m-1$ тогда и только тогда, когда $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, является системой типа Гауссу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость условия очевидна.

Пусть $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$ – система типа Гаусса, и $\omega_m(x)$ – многочлен, удовлетворяющий условию (3).

Каков бы ни был многочлен $h(x)$ степени не выше $2m-1$, $h(x)=\omega_m(x)q(x)+r(x)$, где $q(x)$ и $r(x)$ – многочлен степени не выше $m-1$.

Так как

$$\int_a^b p(x)h(x)dx = \int_a^b p(x)\omega_m(x)q(x)dx + \int_a^b p(x)r(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^m B_i I_i(\omega_m q) + \sum_{i=1}^m B_i I_i(r) = \sum_{i=1}^m B_i I_i(h),$$

то формула (1) типа Гаусса.

Очевидно, $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$ – система типа Гаусса тогда и только тогда, когда $\sum_{i=1}^m B_i \cdot I_i(\omega_m q)=0$, где $\omega_m(x)$ – многочлен, ортогональный с весом $p(x)$ на $[a,b]$, $q(x)$ – любой многочлен степени не выше $m-1$.

Замечания: 1) как и в [1], можно доказать, что наивысший порядок точности формулы (1) $2m-1$; 2) как и в [2], можно доказать, что существуют формулы (1) типа Гаусса с положительными коэффициентами.

2. Точечно-интервальные квадратурные формулы (2) типа Гаусса.

Обозначим через $\theta_m(x)$ многочлен степени m, $I_i(\theta_m)=0$, $i=\overline{1,m}$. Тогда может быть доказана

Т е о р е м а. Квадратурная формула (2) точна для всех многочленов степени не выше $2n+m-1$ тогда и только тогда, когда система $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, такова, что многочлен $\omega_n(x)=\prod_{k=1}^n (x-x_k)$ ортогонален с весом $p(x)\theta_m(x)$ относительно этой системы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть формула (2) точна для всех многочленов степени не выше $2n+m-1$.

Тогда $\omega_n(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b \rho(x)\omega_n(x)\theta_m(x)\,q(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} B_i\, I_i(\omega_n\theta_m q) \qquad (4)$$

для всех многочленов $q(x)$ степени не выше $n-1$, т.е. $\omega_n(x)$ – многочлен, ортогональный с весом $\rho(x)\theta_m(x)$ относительно системы $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$.

И обратно, пусть $\omega_n(x)$ удовлетворяет условию (4).

Так как каждый многочлен $h(x)$ степени $2n+m-1$ представим в виде

$$h(x) = \omega_n(x)\theta_m(x)\,q(x) + r(x),$$

где $q(x)$ – многочлен степени не выше $n-1$, $r(x)$ – многочлен степени не выше $n+m-1$, то

$$\int_a^b \rho(x)h(x)\,dx = \int_a^b \rho(x)\omega_n(x)\theta_m(x)q(x)\,dx + \int_a^b \rho(x)r(x) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(\omega_n\theta_m q) + \sum_{k=1}^{n} A_k r(x_k) + \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(r) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} A_k h(x_k) + \sum_{i=1}^{m} B_i I_i(h),$$

т.е. (2) есть формула типа Гаусса.

З а м е ч а н и я: 1) если многочлены $\omega_n(x)$, ортогональные с весом $\rho(x)\theta_m(x)$ на $[a,b]$, существуют, то, как и в [1], доказывается существование систем $[u_i, v_i]$, $i=\overline{1,m}$, для которых можно построить многочлены, ортогональные с весом $\rho(x)\theta_m(x)$ относительно этой системы; 2) как и в [1], можно доказать, что наивысший порядок точности формулы (2) $2n+m-1$.

3. Оценим $R_m(f)$ и $R_{n,m}(f)$.

Пусть функция $f(x)$ $2m$ раз непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Тогда

$$f(x) = H_{2m}(f;x) + r_{2m}(f;x),$$

где $H_{2m}(f;x)$ – интервальный многочлен Эрмита степени $2m-1$ функции $f(x)$, т.е.

$$I_i(H_{2m}) = I_i(f), \quad I_i(H'_{2m}) = I_i(f'), \quad i=\overline{1,m},$$

и

$$|r_{2m}(f;x)| \le M\frac{(b-a)^{2m}}{(2m)!}, \quad M = \max_{a\le x\le b}|f^{(2m)}(x)|$$

(см. (9) в [1]).

Так как

$$R_m(f) = R_m(H_{2m}) + R_m(r_{2m}), \quad R_m(H_{2m}) = 0,$$

то

$$|R_m(f)| \le M\frac{(b-a)^{2m}}{(2m)!}\int_a^b p(x)\,dx.$$

Пусть функция $f(x)$ $2n+m$ раз непрерывно дифференцируема на $[a,b]$.

Тогда

$$f(x) = H_{2n+m}(f;x) + r_{2n+m}(f;x),$$

где $H_{2n+m}(f;x)$ – точечно-интервальный многочлен Эрмита степени $2n+m-1$ функции $f(x)$, т.е.

$$H_{2n+m}(f;x_k) = f(x_k), \quad H'_{2n+m}(f;x_k) = f'(x_k), \quad k=\overline{1,n},$$

$$I_i(H_{2n+m}) = I_i(f), \quad i=\overline{1,m},$$

и

$$|r_{2n+m}(f;x)| \le M\frac{(b-a)^{2n+m}}{(2n+m)!}, \quad M = \max_{a\le x\le b}|f^{(2n+m)}(x)|$$

(см. (9) в [1]).

Так как

$$R_{n,m}(f)=R_{n,m}(H_{2n+m})+R_{n,m}(r_{2n+m}),\quad R_{n,m}(H_{2n+m})=0,$$

то

$$|R_{n,m}(f)|\le M\frac{(b-a)^{2n+m}}{(2n+m)!}\int_a^b p(x)\,dx\ .$$

Литература

1. Кузьмина А.Л. О точечно-интервальных квадратурных формулах.- В сб.: Конструктивная теория функций и функциональный анализ. Вып. II. Казань, 1979, с. 44 - 51.

2. Кузьмина А.Л. Интервальные квадратурные формулы с кратными узловыми интервалами.- Изв. вузов. Матем., 1980, № 7, с. 39 - 44.

А.Л.Кузьмина

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ИНТЕРПОЛЯЦИОННО-КВАДРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Пусть $f(x)\in C[a,b]$ и задана матрица узлов

$$x_k^{(n)},\quad x_k^{(n)}\in[a,b],\ k=\overline{1,n},\ n=1,2,\dots\ . \tag{1}$$

Положим

$$L_n(f)=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}f(x_k^{(n)}),$$

где

$$A_k^{(n)}=\int_a^b l_k^{(n)}(x)\,dx,$$

$l_k^{(n)}(x)$ - фундаментальные многочлены Лагранжа.

Рассмотрим интерполяционно-квадратурный процесс вида

$$\int_a^b f(x)\,dx\approx L_n(f),\quad n=1,2,\dots\ . \tag{2}$$