В. А. Ильин, Е. И. Моисеев, Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках,
Матем. моделирование, 1990, том 2, номер 8, 139–156

https://www.mathnet.ru/mm2433

Математическое моделирование

том 2 номер 8/1990

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И МЕТОДЫ

УДК 517.927.21:519.62

ДВУМЕРНАЯ НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ПУАССОНА В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ТРАКТОВКАХ

© *В.А. Ильин, Е.И. Моисеев*

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

В работе изучается нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в прямоугольной области как в дифференциальной, так и в разностной трактовках. Установлены теоремы существования и единственности классического решения рассматриваемой задачи и получена априорная оценка решения в метрике W_2^2 через правую часть уравнения в норме L_2. На базе установленной априорной оценки разработана разностная схема решения рассматриваемой задачи и доказано, что погрешность в отклонении решения разностной задачи от решения дифференциальной задачи имеет в метрике W_2^2 второй порядок малости по шагу сетки.

2-D NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR POISSON'S OPERATOR IN DIFFERENTIAL AND DIFFERENCE VARIANTS

V.A. Il'in, E.I.Moiseev

In the present note we study nonlocal boundary value for Poisson's operator in rectangular domain in differential and difference variants.

В настоящей работе изучается поставленная в известной работе А.В. Бицадзе и А.А. Самарского [1] нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в прямоугольной области как в дифференциальной, так и в разностной трактовках. Эта задача возникает при математическом моделировании ряда актуальных прикладных задач.

В работах А.В. Бицадзе [2] и А.Л. Скубачевского [3] была установлена фредгольмовость рассматриваемой задачи.

В настоящей работе получены следующие результаты:

1) установлены теоремы единственности и существования классического решения рассматриваемой задачи в ее дифференциальной трактовке и получена априорная оценка решения в метрике W_2^2 через правую часть уравнения в норме L_2, в которой постоянная зависит только от коэффициентов, входящих в нелокальное краевое условие;

2) на базе установленной априорной оценки разработана разностная схема решения рассматриваемой задачи и доказано, что погрешность в отклонении решения разностной задачи от решения дифференциальной задачи имеет в метрике W_2^2 второй порядок малости по шагу сетки h.

§ 1. Нелокальная краевая задача в дифференциальной трактовке

1. Постановка задачи. Единственность и существование решения. Пусть П – прямоугольник вида $(0 < x < 1) X (0 < y < \pi)$, $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ – точки интервала $(0, 1)$, удовлетворяющие неравенствам

$$0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < 1.$$

Считая, что $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ – пока произвольные вещественные числа, рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу для уравнения Пуассона в прямоугольнике П:

$$\begin{aligned} &\Delta u = f(x, y) \quad \text{в П}, \\ &u(x, 0) = u(x, \pi) = 0 \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ &u(0, y) = 0, \quad \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\xi_k, y) = u(1, y) \quad \text{для всех} \quad 0 \leqslant y \leqslant \pi. \end{aligned} \tag{1}$$

Под классическим решением задачи (1) будем, как обычно, понимать функцию $u(x, y)$ из класса $C^2(\Pi) \cap C^0(\overline{\Pi})$, удовлетворяющую всем условия задачи (1).

Т е о р е м а 1. *Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике $\overline{\Pi}$, а коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ удовлетворяют условию* *)

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{\alpha_k + |\alpha_k|}{2} \leqslant 1, \tag{2}$$

то может существовать только одно классическое решение задачи (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $u(x, y)$ – классическое решение задачи (1) при $f(x, y) \equiv 0$. Требуется доказать, что $u(x, y) \equiv 0$.

Положим

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u(x, y) \sin(ny)\, dy. \tag{3}$$

Тогда, учитывая, что $u(x, y)$ является в прямоугольнике П решением уравнения Лапласа, получим

$$X_n''(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} \sin(ny)\, dy = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \sin(ny)\, dy. \tag{4}$$

---

*) Условие (2) означает, что коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ могут принимать какие-угодно отрицательные значения, но сумма коэффициентов, которые имеют неотрицательные значения, не превышает единицу.

Далее учитывая, что $u(x,0) = u(x,\pi) = 0$ для всех $0 \leqslant x \leqslant 1$, и производя двукратное интегрирование по частям, получим

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} \sin(ny)\,dy = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \sin(ny)\right]\Bigg|_{y=0}^{y=\pi} -$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n \int_0^\pi \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \cos(ny)\,dy = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, [nu(x,y)\cos(ny)]\,\Big|_{y=0}^{y=\pi} -$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n^2 \int_0^\pi u(x,y)\sin(ny)\,dy = -n^2 \cdot X_n(x). \tag{5}$$

Из сопоставления (4) и (5) получим, что функция (3) является на интервале $0 < x < 1$ решением дифференциального уравнения $X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0$.

Кроме того, из справедливости для всех y из сегмента $0 \leqslant y \leqslant \pi$ соотношений

$$u(0,y) = 0, \qquad \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k, y) = u(1,y)$$

вытекает, что функция (3) удовлетворяет условиям

$$X_n(0) = 0, \qquad \sum_{k=1}^m \alpha_k X_n(\xi_k) = X_n(1).$$

Таким образом, функция (3) является решением следующей нелокальной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка:

$$\begin{gathered} X_n''(x) - n^2 X_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \\ X_n(0) = 0, \qquad \sum_{k=1}^m \alpha_k X_n(\xi_k) = X_n(1). \end{gathered} \tag{6}$$

В работе авторов настоящей статьи [4] доказано, что при выполнении условия (2) задача (5) имеет только тривиальное решение.

Но тогда из соотношения (3) и из полноты системы $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ny)\right\}$ на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \pi$ вытекает, что $u(x,y) \equiv 0$ в прямоугольнике $\overline{\Pi}$. Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *При выполнении условий теоремы* 1 *существует классическое решение задачи* (1).

Справедливость этой теоремы сразу вытекает из теоремы 1 и из установленной в работах [2] и [3] фредгольмовости задачи (1).

Замечание. Существование и единственность классического решения задачи (1) и даже более общей задачи было установлено Д.Г. Гордезиани в работе [8], но вместо условия (2) в его работе требуется выполнение существенно более жесткого условия $\sum_{k=1}^m \alpha_k^2 \leqslant m^{-1}$.

2. Априорная оценка решения. Прежде всего установим априорную оценку решения задачи (1) в норме $W_2^2(\Pi)$ через $L_2(\Pi)$ – норму правой части $f(x,y)$.

Эту оценку мы установим при несколько более жестких предположениях, чем условия теорем 1 и 2. В этом пункте мы потребуем, чтобы *все коэффициенты* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ *из нелокального краевого условия были либо неотрицательны, либо неположительны и чтобы выполнялось неравенство*

$$-\infty < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m \leqslant 1. \tag{7}$$

Теорема 3. *Если все коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ либо неотрицательны, либо неположительны и удовлетворяют неравенствам* (7), *то для решения $u(x, y)$ задачи* (1) *справедлива следующая оценка через правую часть уравнения $f(x,y)$:*

$$\|u(x,y)\|_{W_2^2(\Pi)} \leqslant C\|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)}. \tag{8}$$

Доказательство. Для установления оценки (8) достаточно установить следующие четыре оценки:

$$\begin{aligned}
&\|u(x,y)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_1 \cdot \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)},\\
&\|u_{xx}(x,y)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_2 \cdot \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)},\\
&\|u_{yy}(x,y)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_3 \cdot \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)},\\
&\|u_{xy}(x,y)\|_{L_2(\Pi)} \leqslant C_4 \cdot \|f(x,y)\|_{L_2(\Pi)}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Третья оценка (9) вытекает из второй оценки и из уравнения $u_{xx} + u_{yy} = f(x, y)$. Поэтому требуют доказательства только первая, вторая и четвертая оценки (9).

Положим для любого фиксированного x из сегмента $[0, 1]$

$$X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u(x,y)\sin(ny)\,dy, \tag{10}$$

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x,y)\sin(ny)\,dy. \tag{11}$$

Тогда в силу равенства Парсеваля, записанного для функций $u(x, y)$ и $u_{xx}(x, y)$ по полной ортонормированной на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \pi$ системе $\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(ny)\right\}$, мы получим, что для любого x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\int_0^\pi u^2(x,y)\,dy = \sum_{n=1}^\infty X_n^2(x), \quad \int_0^\pi u_{xx}^2(x,y)\,dy = \sum_{n=1}^\infty [X_n''(x)]^2. \tag{12}$$

Далее заметим, что в силу условий $u_x(x, 0) = u_x(x, \pi) = 0$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi u_{xy}(x,y)\cos(ny)\,ny = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, n \int_0^\pi u_x(x,y)\sin(ny)\,dy = nX_n'(x),$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi u_{xy}(x,y)\,dy = 0.$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля, записанного для функции $u_{xy}(x, y)$ по полной ортонормированной на сегменте $0 \leqslant y \leqslant \pi$ системе $\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(ny)\right\}$, мы получим, что для любого x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\int_0^\pi u_{xy}^2(x,y)\,dy = \sum_{n=1}^\infty n^2[X_n'(x)]^2. \tag{13}$$

Из соотношений (12) и (13) следует, что для установления первой, второй и четвертой оценок (9) достаточно доказать неравенства

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} X_n^2(x)\,dx \leqslant C_1^2 \, \| f \|^2_{L_2(\Pi)}, \tag{14}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} [X_n''(x)]^2\,dx \leqslant C_2^2 \, \| f \|^2_{L_2(\Pi)}, \tag{15}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \int_0^{\pi} [X_n'(x)]^2\,dx \leqslant C_4^2 \, \| f \|^2_{L_2(\Pi)}. \tag{16}$$

Так как для коэффициентов Фурье (11) при любом x из сегмента $0 \leqslant x \leqslant 1$ справедливо равенство Парсеваля

$$\int_0^{\pi} f^2(x, y)\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^2(x),$$

то для доказательства неравенств (14)–(16) достаточно установить оценки

$$\| X_n(x) \|_{L_2[0,1]} \leqslant C_1 \frac{1}{n^2} \, \| f_n(x) \|_{L_2[0,1]}, \tag{17}$$

$$\| X_n'(x) \|_{L_2[0,1]} \leqslant C_4 \frac{1}{n} \, \| f_n(x) \|_{L_2[0,1]}, \tag{18}$$

$$\| X_n''(x) \|_{L_2[0,1]} \leqslant C_2 \| f_n(x) \|_{L_2[0,1]}. \tag{19}$$

Доказательству оценок (17)–(19) предпошлем следующую лемму.

Лемма 1. *Пусть η_n – некоторое число из сегмента $\xi_1 \leqslant \eta_n \leqslant 1$, а $X_n(x)$ – решение уравнения $X_n''(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x)$ на интервале $0 < x < \eta_n$ с краевым условием $X_n(0) = 0$ и с одним из двух краевых условий $X_n(\eta_n) = 0$ или $X_n'(\eta_n) + h_n X_n(\eta_n) = 0$ при некотором $h_n \geqslant 0$. Тогда справедливы следующие три оценки*:

$$\| X_n(x) \|_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \frac{1}{n^2} \, \| f_n(x) \|_{L_2[0,\eta_n]}, \tag{20}$$

$$\| X_n'(x) \|_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \frac{1}{n} \, \| f_n(x) \|_{L_2[0,\eta_n]}, \tag{21}$$

$$\| X_n''(x) \|_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \| f_n(x) \|_{L_2[0,\eta_n]}. \tag{22}$$

Доказательство леммы 1. Заметим, что в силу условия $X_n(0) = 0$ справедливо соотношение

$$\int_0^{\eta_n} [X_n'(x) X_n(x)]' dx = X_n'(\eta_n) X_n(\eta_n) = \tag{23}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{в случае условия} \quad X_n(\eta_n) = 0, \\ -h_n X_n^2(\eta_n) \leqslant 0 & \text{в случае условия} \quad X_n'(\eta_n) + h_n X_n(\eta_n) = 0. \end{cases}$$

С другой стороны, в силу уравнения $X_n''(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x)$ справедливо соотношение

$$\int_0^{\eta_n} [X'_n(x) X_n(x)]' dx = \int_0^{\eta_n} [X'_n(x)]^2 dx + \int_0^{\eta_n} X''_n(x) X_n(x) dx =$$

$$= \| X'_n(x) \|^2_{L_2[0,\eta_n]} + n^2 \int_0^{\eta_n} X_n^2(x) dx + \int_0^{\eta_n} f_n(x) X_n(x) dx. \tag{24}$$

Из (23) и (24) вытекают два неравенства

$$n^2 \| X_n(x) \|^2_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \left| \int_0^{\eta_n} f_n(x) X_n(x) dx \right|, \tag{25}$$

$$\| X'_n(x) \|^2_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \left| \int_0^{\eta_n} f_n(x) X_n(x) dx \right|. \tag{26}$$

Применяя к интегралу, стоящему в правой части (25), неравенство Коши – Буняковского, мы придем к оценке (20).

Далее, применяя то же самое неравенство Коши – Буняковского к интегралу, стоящему в правой части (26), и привлекая уже доказанную оценку (20), мы придем к оценке (21).

Для доказательства оценки (22), снова используя уравнение $X''_n(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x)$, запишем равенство

$$\int_0^{\eta_n} f_n(x) X''_n(x) dx = \int_0^{\eta_n} [X''_n(x) - n^2 X_n(x)] X''_n(x) dx =$$

$$= \| X''_n \|^2_{L_2[0,\eta_n]} - n^2 \int_0^{\eta_n} X''_n(x) X_n(x) dx. \tag{27}$$

Заметим теперь, что из (23) и (24) вытекает неравенство

$$-\int_0^{\eta_n} X''_n(x) X_n(x) dx \geqslant 0. \tag{28}$$

Из соотношений (27) и (28) вытекает неравенство

$$\| X''_n(x) \|^2_{L_2[0,\eta_n]} \leqslant \left| \int_0^{\eta_n} f_n(x) X''_n(x) dx \right|.$$

Применяя к интегралу в правой части последнего неравенства неравенство Коши – Буняковского, мы придем к оценке (22).

Лемма 1 полностью доказана.

Теперь для завершения доказательства теоремы 3 остается доказать следующее утверждение.

Лемма 2. *При выполнении условий теоремы* 3 *для величин* (10) *и* (11) *справедливы оценки* (17)–(19).

Доказательство леммы 2. Из соотношений (4), (5) и (11) и из уравнения $\Delta u = f(x, y)$ вытекает, что $X_n(x)$ является на интервале $0 < x < 1$ решением уравнения $X''_n(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x)$. Кроме того, из последних двух краевых условий задачи (1) вытекают равенства

$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_n(\xi_k).$$

Таким образом, функция $X_n(x)$ является решением нелокальной краевой задачи

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \qquad (29)$$
$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k X_n(\xi_k).$$

В нашей работе [5] доказано, что последнее нелокальное краевое условие в задаче (29) может быть заменено нелокальным краевым условием более простого вида. Точнее, в [5] доказано, что между ξ_1 и ξ_m найдется точка $\hat{\xi}_n$ такая, что справедливо соотношение

$$X_n(1) = \alpha X_n(\hat{\xi}_n), \qquad (30)$$

в котором

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m. \qquad (31)$$

Иными словами, функцию $X_n(x)$ можно рассматривать как решение следующей нелокальной краевой задачи:

$$X_n''(x) - n^2 X_n(x) = f_n(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \qquad (32)$$
$$X_n(0) = 0, \quad X_n(1) = \alpha X_n(\hat{\xi}_n).$$

Исключим тривиальные случаи, когда либо $\alpha = 0$, либо $X_n(\hat{\xi}_n) = 0$. В этих случаях в силу условия (30) $X_n(1) = 0$, и справедливость оценок (17)- (19) сразу вытекает из леммы 1 при $\eta_n = 1$.

Итак, пусть $\alpha \neq 0$, $X_n(\hat{\xi}_n) \neq 0$. Рассмотрим параллельно два возможных случая: 1) $\alpha < 0$, 2) $0 < \alpha \leqslant 1$.

В первом из этих случаев в силу условия (30) величины $X_n(\hat{\xi}_n)$ и $X_n(1)$ суть числа разных знаков и потому по теореме Дарбу между $\hat{\xi}_n$ и 1 найдется точка η_n такая, что $X_n(\eta_n) = 0$.

В случае $0 < \alpha \leqslant 1$, как показано в работе [5], с помощью замены

$$W_n(x) = \frac{(\alpha - 1)x + (\hat{\xi}_n - \alpha)}{\hat{\xi}_n - 1} X_n(x)$$

устанавливается существование точки η_n, также заключенной между $\hat{\xi}_n$ и 1 и такой, что при некоторой постоянной $h_n \geqslant 0$ выполняется условие

$$X_n'(\eta_n) + h_n X_n(\eta_n) = 0.$$

Таким образом, как в случае $\alpha < 0$, так и в случае $0 < \alpha \leqslant 1$ выполняются все условия леммы 1, и в силу этой леммы справедливы оценки (20)–(22).

Нам остается доказать, что из справедливости оценок (20)–(22) вытекает справедливость оценок (17)–(19).

С этой целью, считая величину $X_n(1)$ известной, представим решение $X_n(x)$ задачи (32) в виде суммы $\bar{X}_n(x)$ и $\bar{\bar{X}}_n(x)$ решений двух задач

$$\bar{X}_n''(x) - n^2 \bar{X}_n(x) = f_n(x) \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \qquad (33)$$
$$\bar{X}_n(0) = 0, \quad \bar{X}_n(1) = 0,$$

$$\bar{\bar{X}}_n'' - n^2 \bar{\bar{X}}_n(x) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < x < 1, \qquad (34)$$
$$\bar{\bar{X}}_n(0) = 0, \quad \bar{\bar{X}}_n(1) = X_n(1).$$

Достаточно установить оценки вида (17)–(19) для каждой из функций $\overline{X}_n(x)$ и $\overline{\overline{X}}_n(x)$.

Справедливость указанных оценок для решения $\overline{X}_n(x)$ задачи (33) сразу вытекает из леммы 1, взятой при $\eta_n = 1$.

Итак, остается установить справедливость оценок вида (17)–(19) для решения $\overline{\overline{X}}_n(x)$ задачи (34).

Заметим, что решением задачи (34) является функция

$$\overline{\overline{X}}_n(x) = \frac{X_n(1)\,\mathrm{sh}(nx)}{\mathrm{sh}\, n}, \tag{35}$$

и нам остается проверить справедливость для функции (35) оценок (17)–(19).

Прежде всего оценим $|X_n(1)|$ через $\|f_n(x)\|_{L_2[0,1]}$.

Для этого в силу соотношения (30) достаточно оценить $X_n(\hat{\xi}_n)$ через $\|f_n(x)\|_{L_2[0,1]}$.

Заметим, что, с одной стороны, в силу равенства $X_n(0) = 0$

$$\int_0^{\hat{\xi}_n} [X_n^2(x)]'dx = X_n^2(\hat{\xi}_n), \tag{36}$$

а, с другой стороны, в силу неравенства Коши–Буняковского

$$\left|\int_0^{\hat{\xi}_n} [X_n^2(x)]'dx\right| = 2\left|\int_0^{\hat{\xi}_n} X_n(x)X_n'(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\cdot \|X_n(x)\|_{L_2[0,\hat{\xi}_n]}\, \|X_n'(x)\|_{L_2[0,\hat{\xi}_n]}. \tag{37}$$

В силу того, что $\hat{\xi}_n \leqslant \eta_n \leqslant 1$, и в силу установленных в лемме 1 оценок (20) и (21) неравенство (37) можно переписать в виде

$$\left|\int_0^{\hat{\xi}_n} [X_n^2(x)]'dx\right| \leqslant \frac{2}{n^3}\|f_n(x)\|^2_{L_2[0,1]}. \tag{38}$$

Из (36) и (38) заключаем, что

$$|X_n(\hat{\xi}_n)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}\|f_n(x)\|_{L_2[0,1]},$$

и потому, в силу (30),

$$|X_n(1)| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{n^{3/2}}\,\alpha\|f_n(x)\|_{L_2[0,1]}. \tag{39}$$

Заметим теперь, что из (35) вытекает, что для всех x из интервала $0 < x < 1$

$$\overline{\overline{X}}{}_n'(x) = \frac{X_n(1)\cdot n\cdot \mathrm{ch}(nx)}{\mathrm{sh}\, n},$$
$$\overline{\overline{X}}{}_n''(x) = \frac{X_n(1)\cdot n^2\cdot \mathrm{sh}(nx)}{\mathrm{sh}\, n}. \tag{40}$$

Из соотношений (35) и (40) вытекает, что

$$\|\bar{\bar{X}}_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} = |X_n(1)|^2 \frac{\int\limits_0^1 \mathrm{sh}^2(nx)\,dx}{\mathrm{sh}^2 n}, \tag{41}$$

$$\|\bar{\bar{X}}'_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} = |X_n(1)|^2 \cdot n^2 \frac{\int\limits_0^1 \mathrm{ch}^2(nx)\,dx}{\mathrm{sh}^2 n}, \tag{42}$$

$$\|\bar{\bar{X}}''_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} = |X_n(1)|^2 \cdot n^4 \frac{\int\limits_0^1 \mathrm{sh}^2(nx)\,dx}{\mathrm{sh}^2 n}. \tag{43}$$

Так как для всех номеров $n \geqslant 1$

$$\frac{\int\limits_0^1 \mathrm{sh}^2(nx)\,dx}{\mathrm{sh}^2 n} \leqslant \frac{1}{n}, \qquad \frac{\int\limits_0^1 \mathrm{ch}^2(nx)\,dx}{\mathrm{sh}^2 n} \leqslant \frac{5}{2n},$$

то из соотношений (41)–(43) и из оценки (39) окончательно получим

$$\|\bar{\bar{X}}_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} \leqslant \frac{5\alpha^2}{n^4}\|f_n(x)\|^2_{L_2[0,1]},$$

$$\|\bar{\bar{X}}'_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} \leqslant \frac{2\alpha^2}{n^2}\|f_n(x)\|^2_{L_2[0,1]},$$

$$\|\bar{\bar{X}}''_n(x)\|^2_{L_2[0,1]} \leqslant 5\alpha^2\|f_n(x)\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Тем самым справедливость для функции $\bar{\bar{X}}_n(x)$ оценок вида (17)–(19) установлена.

Доказательство леммы 2, а потому и теоремы 3 завершено.

§ 2. Нелокальная краевая задача в разностной трактовке

Введем на прямоугольнике П сетку с узлами $x_i = ih_1$, где $i = 0, 1, \ldots, N_1$, и $y_j = jh_2$, где $j = 0, 1, 2, \ldots, N_2$.

В дальнейшем мы будем требовать существования постоянной C_0 такой, что для всей совокупности значений h_1 и h_2 справедливо неравенство

$$h_1 \leqslant C_0 h_2. \tag{44}$$

Будем также считать, что шаг h_1 меньше половины длины наименьшего из сегментов $[0, \xi_1]$, $[\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_{m-1}, \xi_m]$, $[\xi_m, 1]$, и обозначим через i_l номер, который определяется неравенствами

$$i_l h_1 \leqslant \xi_l < (i_l + 1)h_1.$$

Рассмотрим следующую разностную трактовку нелокальной краевой задачи (1):

$$\Lambda Y = Y_{\bar{x}x} + Y_{\bar{y}y} = f(x, y) \text{ во всех внутренних узлах П},$$

$$Y|_{y=0} = 0, \quad Y|_{y=\pi} = 0, \quad Y|_{x=0} = 0, \tag{45}$$

$$LY = 0,$$

где

$$LY = \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left\{ Y_{i_l j} \frac{[(i_l+1)h_1 - \xi_l]}{h_1} + Y_{(i_l+1)j} \frac{[\xi_l - i_l h_1]}{h_1} \right\} - Y_{N_1 j}$$

для всех $j = 1, 2, \ldots, N_2 - 1$.

Основной целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 4. *Если выполнены неравенства* (2) *и* (44) *и функция* $f(x, y)$ *обеспечивает принадлежность решения* $u(x, y)$ *задачи* (1) *классу* $C^4(\overline{\Pi})$, *то решение* Y *разностной задачи* (45) *сходится к решению* u *дифференциальной задачи* (1) *при* $h_2 \to 0$ *со скоростью* $O(h^2)$, *где* $h = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$, *как в равномерной метрике, так и в разностной метрике* W_2^2.

Доказательство теоремы 4 проведем в несколько шагов.

1. Оценим погрешность $z = Y - u$, где Y – решение разностной задачи (45), а u – решение дифференциальной задачи (1). Функция z является решением следующей разностной задачи:

$$\begin{aligned} &\Lambda z = f - \Lambda u = F \text{ во внутренних узлах } \Pi, \\ &z|_{x=0} = z|_{y=0} = z|_{y=\pi} = 0, \quad Lz = -Lu. \end{aligned} \tag{46}$$

В монографии А.А. Самарского [6, с. 81, 229] доказано, что $F = O(h^2)$ и $Lu = O(h^2)$.

Наша цель доказать, что $\|z\|_{W_2^2} = O(h^2)$. (Под нормой в W_2^2 понимается разностная норма.)

Представим решение z разностной задачи (46) в виде суммы $z = \tilde{z} + \hat{z}$ решений следующих двух задач:

$$\begin{aligned} &\Lambda \tilde{z} = 0 \text{ во внутренних узлах } \Pi, \\ &\tilde{z}|_{x=0} = \tilde{z}|_{y=0} = \tilde{z}|_{y=\pi} = 0, \quad L\tilde{z} = -Lu, \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} &\Lambda \hat{z} = F \text{ во внутренних узлах } \Pi, \\ &\hat{z}|_{x=0} = \hat{z}|_{y=0} = \hat{z}|_{y=\pi} = 0, \quad L\hat{z} = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Докажем, что разностная норма в W_2^2 каждой из функций $\tilde{z}$ и $\hat{z}$ равна $O(h^2)$.

2. Сначала оценим норму $\tilde{z}$. В монографии А.А. Самарского [6, с. 113] установлено, что система функций $\{\sin(ky)\}\big|_{k=1}^{k=N_2-1}$ является ортогональной на сетке $y = jh_2$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N_2$ и имеет на этой сетке норму, равную $\sqrt{\pi/2}$. Поэтому естественно искать решение $\tilde{z}$ задачи (47) в виде

$$\tilde{z} = \sum_{k=1}^{N_2-1} \tilde{z}_k \sin(ky).$$

При этом $\tilde{z}_k$ являются решениями следующей задачи:

$$\begin{aligned} &\Lambda_1 \tilde{z}_k - \lambda_k \tilde{z}_k = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, N_1, \\ &\tilde{z}_k|_{x=0} = 0, \quad L\tilde{z}_k = -Q_k, \end{aligned} \tag{49}$$

в которой $\Lambda_1 z = z_{\bar{x}x}$, $\lambda_k = \dfrac{4}{h_2^2} \sin^2(kh_2)$, $Q_k = (Lu)_k$.

Решение уравнения, входящего в задачу (49), удовлетворяющее условию $\tilde{z}|_{x=0} = 0$, записывается в виде

$$\tilde{z}_{ik} = A_k \operatorname{sh}(i \ln q_k), \tag{50}$$

где

$$q_k = 1 + \frac{\lambda_k h_1^2}{2} + \sqrt{\lambda_k h_1^2 + \frac{\lambda_k^2 h_1^4}{4}}, \tag{51}$$

а коэффициент A_k, определяемый из соотношения $A_k L[\operatorname{sh}(i \ln q_k)] = -Q_k$, равен

$$A_k = -\frac{Q_k}{L[\operatorname{sh}(i \ln q_k)]}. \tag{52}$$

Оценим снизу фигурирующую в (52) величину $-L[\operatorname{sh}(i \ln q_k)]$. Используя выражение для величины L, получим

$$-L[\operatorname{sh}(i \ln q_k)] = \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \alpha_l \left\{ \operatorname{sh}(i_l \ln q_k) \frac{[(i_l+1)h_1 - \xi_l]}{h_1} + \operatorname{sh}[(i_l+1)\ln q_k] \frac{[\xi_l - i_l h_1]}{h_1} \right\} \geqslant$$
$$\geqslant \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) - \sum_{l=1}^{m} \frac{(\alpha_l + |\alpha_l|)}{2} \left\{ \operatorname{sh}(i_l \ln q_k) \frac{[(i_l+1)h_1 - \xi_l]}{h_1} + \right.$$
$$\left. + \operatorname{sh}[(i_l+1)\ln q_k] \frac{[\xi_l - i_l h_1]}{h_1} \right\} \geqslant \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) -$$
$$- \sum_{l=1}^{m} \frac{(\alpha_k + |\alpha_k|)}{2} \operatorname{sh}[(i_m+1)\ln q_k] \geqslant \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) - \operatorname{sh}[(i_m+1)\ln q_k] =$$
$$= \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh}[(i_m+1)\ln q_k]}{\operatorname{sh}(N_1 \ln q_k)} \right\}. \tag{53}$$

Далее оцениваем снизу величину, стоящую в правой части (53). Заметим, что

$$i_m + 1 \leqslant \frac{\xi_m + h_1}{h_1} = \xi_m N_1 + 1 = N_1 \left(\xi_m + \frac{1}{N_1} \right).$$

Если мы предположим, что $N_1 > 1/(1-\xi_m)$, то $\xi_m + \dfrac{1}{N_1} < 1$ и потому существует $\delta > 0$ такая, что $\xi_m + \dfrac{1}{N_1} \leqslant 1 - \delta$. Таким образом, при $N_1 > 1/(1-\xi_m)$ справедливо неравенство

$$i_m + 1 \leqslant N_1(1-\delta). \tag{54}$$

Из (53) и (54) получим

$$-L[\operatorname{sh}(i \ln q_k)] \geqslant \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh}[N_1(1-\delta)\ln q_k]}{\operatorname{sh}(N_1 \ln q_k)} \right\} =$$
$$= \operatorname{sh}[N_1 \ln q_k] \left\{ 1 - \frac{q_k^{N_1(1-\delta)} - q_k^{-N_1(1-\delta)}}{q_k^{N_1} - q_k^{-N_1}} \right\} \geqslant \operatorname{sh}[N_1 \ln q_k] \left(1 - \frac{1}{q_k^{N_1 \delta}} \right), \tag{55}$$

ибо $\dfrac{q_k^{N_1(1-\delta)} - q_k^{-N_1(1-\delta)}}{q_k^{N} - q_k^{-N}} \leqslant \dfrac{q_k^{N_1(1-\delta)}}{q_k^{N_1}}$ при $q_k \geqslant 1$.

Оценим, наконец, снизу величину $q_k^{N_1\delta}$.

Из соотношения (51) вытекает, что $q_k \geqslant 1 + \sqrt{\lambda_k} h_1$, поэтому

$$q_k^{N_1\delta} \geqslant (1 + \sqrt{\lambda_k}\, h_1)^{N_1\delta} \geqslant 1 + \sqrt{\lambda_k}\, h_1 N_1 \delta = 1 + \sqrt{\lambda_k}\,\delta. \tag{56}$$

Далее, учитывая, что $\sqrt{\lambda_k} \geqslant \sqrt{\lambda_1}$, получим при $h_2 \leqslant \pi/2$

$$\sqrt{\lambda_1} = \frac{2}{h_2} \sin h_2 \geqslant \frac{2}{h_2}\,\frac{2}{\pi}\, h_2 = \frac{4}{\pi}\,. \tag{57}$$

Из (56) и (57) вытекает следующая оценка снизу величины $q_k^{N_1\delta}$:

$$q_k^{N_1\delta} \geqslant 1 + \sqrt{\lambda_1}\,\delta \geqslant 1 + \frac{4\delta}{\pi}\,. \tag{58}$$

Сопоставляя (55) и (58), окончательно получим следующую оценку снизу величины, стоящей в левой части (53):

$$-L\,[\operatorname{sh}(i \ln q_k)] \geqslant \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k) \left[1 - \frac{1}{1 + 4\delta/\pi}\right] = C_1 \operatorname{sh}(N_1 \ln q_k)\,. \tag{59}$$

3. Теперь с помощью оценки (59) перейдем к оценке норм величины $\tilde z$ и ее производных.

Сначала оценим введенную в монографии А.А. Самарского [6, с. 108] норму $\| z]|$:

$$\| \tilde z]|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} \tilde z_{ij}^2 h_2 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} A_k^2 \operatorname{sh}^2(i \ln q_k)\,.$$

Далее, учитывая (59) и (52), получим

$$\| \tilde z]|^2 \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{Q_k^2 \operatorname{sh}^2(i \ln q_k)}{C_1^2 \operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)} \leqslant \frac{\pi}{2C_1^2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} Q_k^2 = \frac{\pi}{2C_1^2} \sum_{k=1}^{N_2-1} Q_k^2 =$$

$$= \frac{1}{C_1^2} \sum_{j=1}^{N_2-1} \Big(\sum_{k=1}^{N_2-1} Q_k \sin(kjh_2)\Big)^2 h_2 = \frac{1}{C_1^2} \| Lu \|^2 = O(h^4)\,.$$

4. Оценим теперь $\tilde z_{\bar x x}$, $\tilde z_{\bar y y}$, $\tilde z_{\bar x \bar y}$.

Заметим, что

$$\tilde z_{\bar y y} = \Lambda_2 \tilde z = - \sum_{k=1}^{N_2-1} A_k \operatorname{sh}(i \ln q_k) \sin(ky) \lambda_k\,.$$

Учитывая (52) и (59), получим оценку

$$\| \Lambda_2 \tilde z]|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} (\tilde z_{\bar y y})^2 h_2 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} A_k \lambda_k^2 \operatorname{sh}^2(i \ln q_k) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2C_1^2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{\lambda_k^2 Q_k^2 \operatorname{sh}^2(i \ln q_k)}{\operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2C_1^2} \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} Q_k^2 \lambda_k^2 = \frac{\pi}{2C_1^2} \sum_{k=1}^{N_2-1} (\Lambda_2 Q)_k^2 =$$

$$= \frac{1}{C_1^2} \sum_{j=1}^{N_2-1} (\Lambda_2 L u_j)^2 = \frac{1}{C_1^2} \| \Lambda_2 L u \|^2 = O(h^4)\,.$$

Далее из уравнения, которому удовлетворяет $\tilde{z}$, следует
$\| \Lambda_1 \tilde{z}]|^2 = \| \Lambda_2 \tilde{z}]|^2 = O(h^4)$.

Оценим теперь норму $\tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}}$:

$$\tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}} = \sum_{k=1}^{N_2-1} 2A_k \operatorname{ch}\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\ln q_k\right] \frac{\operatorname{sh}(\ln q_k/2)}{h_1} (\sin ky)_{\bar{y}}. \qquad (60)$$

Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 3. *Система функций* $\{[\sin(ky)]_{\bar{y}}\}\Big|_{k=1}^{k=N_2-1}$ *ортогональна на* $[0,\pi]$, *т.е.*

$$((\sin ky)_{\bar{y}}, (\sin my)_{\bar{y}}] = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}\lambda_k & \textit{при}\quad k=m,\\ 0 & \textit{при}\quad k\neq m. \end{cases} \qquad (61)$$

Доказательство. Из разностного аналога формулы интегрирования по частям

$$(u, v_{\bar{x}}] = u_N v_N - u_1 v_0 - (u_x, v)$$

получаем

$$((\sin ky)_{\bar{y}}, (\sin my)_{\bar{y}}] = (\sin ky)_{\bar{y}N_2}(\sin ky)_{N_2} -$$
$$-(\sin ky)_{\bar{y}1}(\sin ky)_0 - ((\sin ky)_{\bar{y}y}, \sin my) = \lambda_k(\sin ky, \sin my).$$

Отсюда и следует (61).

Продолжим оценку нормы $\tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}}$. Из (60) с учетом (59), (61) получим

$$\|\tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}}]|^2 = \sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{j=1}^{N_2-1} (\tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}})^2 h_2 = \frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} 4A_k^2 \times$$
$$\times \operatorname{ch}^2\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\ln q_k\right]\frac{\operatorname{sh}^2(\ln q_k/2)}{h_1^2}\lambda_k \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2\pi}{C_1^2}\sum_{i=1}^{N_1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{Q_k^2 \operatorname{ch}^2[(i-1/2)\ln q_k]\operatorname{sh}^2[(\ln q_k)/2]}{\operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)\cdot h_1^2}\lambda_k \leqslant$$
$$\leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{Q_k^2 \operatorname{ch}^2(N_1\ln q_k)\operatorname{sh}^2[(\ln q_k)/2]}{\operatorname{sh}^2(N_1\ln q_k)\cdot h_1^2}\lambda_k. \qquad (62)$$

Для дальнейших оценок докажем вспомогательные неравенства.

Лемма 4. *Справедливы следующие соотношения*:

$$\operatorname{sh}^2\left(\frac{\ln q_k}{2}\right) = \frac{\lambda_k h_1^2}{4}, \quad \frac{\operatorname{ch}(N_1\ln q_k)}{\operatorname{sh}(N_1\ln q_k)} \leqslant \frac{\operatorname{ch}(N_1 \ln q_1)}{\operatorname{sh}(N_1\ln q_1)}. \qquad (63)$$

Доказательство. Проведя элементарные преобразования и учитывая (51), получим

$$\operatorname{sh}^2\left(\frac{\ln q_k}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{q_k} - 1/\sqrt{q_k}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(q_k - 2 + \frac{1}{q_k}\right) =$$
$$= \frac{q_k^2 - 2q_k + 1}{4q_k} = \frac{\lambda_k h_1^2 q_k}{4q_k} = \frac{\lambda_k h_1^2}{4}.$$

Второе соотношение (63) следует из того, что $q_k \geqslant q_1$, а $\operatorname{cth} x$ при $x > 0$ – убывающая функция.

Лемма 2 доказана.

Возвращаясь к оценке (62), с помощью (63) получим

$$\| \tilde{z}_{\bar{x}\bar{y}} \|^2 \leqslant \frac{2\pi}{4} \sum_{k=1}^{N_2-1} Q_k^2 \lambda_k^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{N_2-1} (\Lambda_2 Q)_k^2 =$$

$$= \| \Lambda_2 (Lu) \|^2 = O(h^4). \tag{64}$$

Аналогично можно показать, что

$$\| \tilde{z}_{\bar{x}}]\!] = O(h^2), \quad \| \tilde{z}_{\bar{y}}]\!] = O(h^2).$$

Итак, доказано, что разностная норма в W_2^2 функции $\tilde{z}$ равна $O(h^2)$.

В заключение заметим, что сходимость в равномерной метрике следует из представления

$$\tilde{z}_{ij} = \sum_{i'=1}^{i} h_1 \sum_{j'=1}^{j} \tilde{z}_{\bar{x}\,\bar{y}} h_2,$$

применение к которому неравенства Коши – Буняковского и (64) дает

$$| \tilde{z}_{ij} | \leqslant \Big(\sum_{i'=1}^{i} h_1 \sum_{j'=1}^{j} h_2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big(\sum_{i'=1}^{i} h_1 \sum_{j'=1}^{j} \tilde{z}^2_{\bar{x}\,\bar{y}} h_2 \Big)^{\frac{1}{2}} = O(h^2).$$

Отсюда и следует сходимость в равномерной метрике со вторым порядком точности.

5. Переходим к изучению функции $\hat{z}$. Выпишем в этом пункте решение $\hat{z}$ задачи (48), которое будем искать в виде

$$\hat{z} = \sum_{k=1}^{N_2-1} \hat{z}_k \sin(ky).$$

Тогда для $\hat{z}_k$ получим задачу

$$\Lambda_1 \hat{z}_k - \lambda_k \hat{z}_k = F_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N_2 - 1,$$

$$\hat{z}_{k0} = 0, \quad L\hat{z}_k = 0,$$

где F_k определяются из равенства

$$F = \sum_{k=1}^{N_2-1} F_k \sin(ky).$$

Решение поставленной задачи можно записать в виде

$$\hat{z}_{ik} = \sum_{j=1}^{N_1-1} F_{jk} G_k(i, j) h_1 + A_k \operatorname{sh}(i \ln q_k) = W_k + V_k, \tag{65}$$

где $G_k(i, j)$ – разностная функция Грина первой краевой задачи

$$\Lambda_1 G_k - \lambda_k G_k = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq j, \\ \dfrac{1}{h_1} & \text{при} \quad i = j, \end{cases}$$

$$G_k|_{x=0} = G_k|_{x=1} = 0.$$

Разностная функция Грина строится по схеме, приведенной в книге А.А. Самарского [6, с. 197], и имеет вид

$$G_k(i,j)=\begin{cases} -\dfrac{h_1\,\mathrm{sh}(i\ln q_k)\,\mathrm{sh}[(N_1-j)\ln q_k]}{\mathrm{sh}(\ln q_k)\,\mathrm{sh}(N_1\ln q_k)} & \text{при} \quad i\leqslant j,\\ -\dfrac{h_1\,\mathrm{sh}[(N_1-i)\ln q_k]\,\mathrm{sh}(j\ln q_k)}{\mathrm{sh}(\ln q_k)\,\mathrm{sh}(N_1\ln q_k)} & \text{при} \quad i\geqslant j.\end{cases}$$

Коэффициент A_k определяется из краевого условия $L\hat{z}_k=0$ и равен

$$A_k=\frac{-\sum\limits_{j=1}^{N_1-1}F_{jk}L[G_k(i,j)]h_1}{L[\mathrm{sh}(i\ln q_k)]}. \tag{66}$$

6. Оценим норму функции V и ее вторых производных, где

$$V=\sum_{k=1}^{N_2-1}V_k\sin(ky)=\sum_{k=1}^{N_2-1}A_k\mathrm{sh}(i\ln q_k)\sin ky,$$

а V_k находятся из формулы (65).

$$\|V\|^2=\sum_{i=1}^{N_1-1}h_1\sum_{j=1}^{N_2-1}V_{ij}^2h_2=\frac{\pi}{2}\sum_{i=1}^{N_1-1}h_1\sum_{k=1}^{N_2-1}A_k^2\mathrm{sh}^2(i\ln q_k)=$$
$$=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{N_2-1}A_k^2h_1\sum_{i=1}^{N_1-1}[\mathrm{ch}(2i\ln q_k)-1]\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{N_2-1}A_kh_1\sum_{i=1}^{N_1-1}\mathrm{ch}(2i\ln q_k)=$$
$$=\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{N_2-1}\frac{A_k^2h_1\,\mathrm{sh}(N_1\ln q_k)}{\mathrm{sh}(\ln q_k)}\mathrm{ch}[(N_1-1)\ln q_k]. \tag{67}$$

Для дальнейшей оценки нормы функции V выпишем два вспомогательных неравенства.

С учетом (63) имеем

$$\mathrm{sh}(\ln q_k)=2\mathrm{sh}\left(\frac{\ln q_k}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\ln q_k}{2}\right)\geqslant 2\mathrm{sh}\left(\frac{\ln q_k}{2}\right)=\sqrt{\lambda_k}\,h_i; \tag{68}$$

далее,

$$\mathrm{ch}[(N_1-1)\ln q_k]\leqslant\mathrm{ch}(N_1\ln q_k)=\frac{q_k^{N_1}+q_k^{-N_1}}{2}\leqslant A\frac{q_k^{N_1}-q_k^{-N_1}}{2}$$

(при A достаточно большом; справедливость последнего неравенства следует из (58) при $\delta=1$).

Итак,

$$\mathrm{ch}[(N_1-1)\ln q_k]\leqslant A\mathrm{sh}(N_1\ln q_k). \tag{69}$$

Возвращаясь к (67), с учетом (68), (69) получаем

$$\|V\|^2\leqslant\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{N_2-1}\frac{A_k^2A\,\mathrm{sh}^2(N_1\ln q_k)}{\sqrt{\lambda_k}}.$$

В силу (59) и (66) имеем

$$\|V\|^2 \leqslant \frac{\pi A}{4C_1^2} \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \Big[\sum_{j=1}^{N_1-1} F_{jk} LG_k(i,j) h_1 \Big]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi A}{4C_1^2} \sum_{k=1}^{N_2-1} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{N_1-1} F_{ij}^2 h_1 \sum_{i=1}^{N_1-1} [L(G_k(i,j)]^2 h_1 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi A}{4C_1^2} \max_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{N_1-1} (LG_k)^2 h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} \sum_{j=1}^{N_1-1} F_{jk}^2 h_1 =$$

$$= \frac{A}{2C_1} \max_k \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}} \sum_{j=1}^{N_1-1} (LG_k)^2 h_1 \|F\|^2. \qquad (70)$$

Оценим теперь

$$\sum_{j=1}^{N_1-1} (LG_k)^2 h_1 \leqslant h_1 \sum_{j=1}^{N_1-1} \Big\{ \sum_{l=1}^{m} \alpha_l [|G_k(i_l,j)| + |G_k(i_l+1,j)|]^2 \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant Ch_1 \sum_{j=1}^{N_1-1} \sum_{l=1}^{m} G_k^2(i_l,j).$$

Достаточно оценить выражение

$$h_1 \sum_{j=1}^{N_1-1} G_k^2(i,j),$$

где $1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1$.

Используя конкретное выражение для разностной функции Грина, получим

$$h_1 \sum_{j=1}^{N_1-1} G_k^2(i,j) = h_1 \sum_{j=1}^{i-1} G_k^2(i,j) + h_1 \sum_{j=i+1}^{N_1-1} G_k^2(i,j) +$$

$$+ h_1 G_k^2(i,1) = \frac{h_1^3}{\operatorname{sh}^2(\ln q_k)\operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)} \Big\{ \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{sh}^2(j \ln q_k) \operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k] +$$

$$+ \sum_{j=i+1}^{N_1-1} \operatorname{sh}^2[(N_1 - j)\ln q_k] \operatorname{sh}^2(i \ln q_k) + \operatorname{sh}^2(i \ln q_k) \operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k] \Big\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_1^3}{2\operatorname{sh}^2(\ln q_k)\operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)} \Big\{ \operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k] \sum_{j=1}^{i-1} \operatorname{ch}(2j \ln q_k) +$$

$$+ \operatorname{sh}^2(i \ln q_k) \sum_{j=i+1}^{N_1-1} \operatorname{ch}[2(N_1 - j)] + 2\operatorname{sh}^2(i \ln q_k)\operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k] \Big\} =$$

$$= \frac{h_1^3}{2\operatorname{sh}^2(\ln q_k)\operatorname{sh}^2(N_1 \ln q_k)} \left\{ \frac{\operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k]\operatorname{sh}(i \ln q_k)\operatorname{ch}[(i-1)\ln q_k]}{\operatorname{sh}(\ln q_k)} + \right.$$

$$+ \frac{\operatorname{sh}^2(i \ln q_k)\operatorname{sh}[(N_1 - i)\ln q_k]\operatorname{ch}[(N_1 - i - 1)\ln q_k]}{\operatorname{sh}(\ln q_k)} +$$

$$\left. + 2\operatorname{sh}^2(i \ln q_k)\operatorname{sh}^2[(N_1 - i)\ln q_k] \right\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{h_1^3}{2\operatorname{sh}^2(\ln q_k)\operatorname{sh}^2[N_1\ln q_k]}\left\{\frac{A\operatorname{sh}^2[(N_1-i)\ln q_k]\operatorname{sh}^2(i\ln q_k)}{\operatorname{sh}(\ln q_k)}+\right.$$

$$+\frac{A\operatorname{sh}^2(i\ln q_k)\operatorname{sh}^2[(N_1-i)\ln q_k]}{\operatorname{sh}(\ln q_k)}+$$

$$\left.+\;2\operatorname{sh}^2(i\ln q_k)\operatorname{sh}^2[(N_1-i)\ln q_k]\right\}.$$

Далее,

$$\operatorname{sh}[(N_1-i)\ln q_k]\operatorname{sh}(i\ln q_k)\leqslant\frac{q_k^{N_1-i}q_k^i}{4}=\frac{q_k^{N_1}}{4}\leqslant$$

$$\leqslant A\,\frac{q_k^{N_1}-q_k^{-N_1}}{2}=A\operatorname{sh}(N_1\ln q_k),$$

и поэтому

$$h_1\sum_{j=1}^{N_1-1}G_k^2(i,j)\leqslant\frac{Ah_1^3}{2\operatorname{sh}^2(\ln q_k)}\left\{\frac{2}{\operatorname{sh}(\ln q_k)}+2\right\}.$$

С учетом (68) получаем

$$h_1\sum_{j=1}^{N_1-1}G_k^2(i,j)\leqslant\frac{A}{(\sqrt{\lambda_k}\,)^3}+\frac{Ah_1}{(\sqrt{\lambda_k}\,)^2}. \tag{71}$$

Теперь из неравенства (70) с учетом (71) получаем требуемую оценку $\|V\|^2\leqslant C\|F\|^2=O(h^4)$.

7. Оценим теперь $V_{\bar{y}y}$:

$$\|V_{\bar{y}y}\|^2=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N_1-1}h_1\sum_{k=1}^{N_2-1}A_k\operatorname{sh}^2(i\ln q_k)\lambda_k^2.$$

Далее оценка проводится совершенно аналогично п. 6, только в (70) получится выражение

$$\frac{A}{2C_1^2}\max_k\lambda_k^{3/2}\sum_{j=1}^{N_1-1}(LG_k)^2h_1\|F\|^2,$$

поэтому вместо (71) надо выписать неравенство

$$\lambda_k^{3/2}h_1\sum_{j=1}^{N_1-1}G_k^2(i,j)\leqslant A[1+h_1\sqrt{\lambda_k}\,]. \tag{72}$$

Для оценки (72) заметим, что в силу (44)

$$h_1\leqslant C_0h_2\leqslant\frac{2C_0h_2}{2\sin(kh_2)}=\frac{2C_0}{\sqrt{\lambda_k}},$$

поэтому вместо (71) получаем

$$\lambda_k^{3/2}h_1\sum_{j=1}^{N_1-1}G_k^2(i,j)\leqslant A[1+2C_0].$$

Отсюда сразу и следует, что

$$\|V_{\bar{y}y}\|^2\leqslant C\|F\|^2=O(h^4). \tag{73}$$

Производная $V_{\bar{x}x}$ оценивается из однородного разностного уравнения Лапласа и с помощью оценки (73).

С целью оценки $V_{\bar{x}\bar{y}}$ выпишем из (66) выражение

$$V_{\bar{x}\bar{y}} = \sum_{k=1}^{N_2-1} 2A_k \operatorname{ch}\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\ln q_k\right] \frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\ln q_k}{2}\right)}{h_1} (\sin ky)_{\bar{y}}.$$

С учетом (61) имеем

$$\| V_{\bar{x}\bar{y}} \|^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{i=1}^{N_1-1} h_1 \sum_{k=1}^{N_2-1} 4A_k^2 \operatorname{ch}^2\left[\left(i-\frac{1}{2}\right)\ln q_k\right] \frac{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\ln q_k}{2}\right)}{h_1^2} \lambda_k^2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi \sum_{k=1}^{N_2-1} A_k^2 \lambda_k^2 h_1 \sum_{i=1}^{N_1-1} [\operatorname{ch}(2i-1)\ln q_k - 1] \frac{\operatorname{sh}^2\left(\dfrac{\ln q_k}{2}\right)}{h_1^2}.$$

Далее, проводя преобразования совершенно аналогично п. 6, получим

$\| V_{\bar{x}\bar{y}} \|^2 \leqslant C\| F \|^2 = O(h^4)$.

Итак, требуемые оценки для функции V и ее производных установлены.

8. Для завершения оценки функции $\hat{z}$ нам еще необходимо установить оценки для функции W из (65), где

$$W = \sum_{k=1}^{N_2-1} W_k \sin(ky).$$

Оценки для функции W и ее производных можно установить, следуя схеме пп. 6 и 7. Но мы заметим, что функция W является решением разностной первой краевой задачи для уравнения Пуассона в прямоугольнике, а для решения этой задачи требуемые оценки уже получены в монографии А.А. Самарского, Р.Д. Лазарова, В.Л. Макарова [7].

Теорема 4 полностью доказана.

Появлению настоящей статьи способствовали чтение монографии [7] и беседы с академиком А.А. Самарским. Авторы выражают ему свою глубокую признательность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бицадзе А.В. Самарский А.А.* // ДАН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739–740.
2. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: 1981.
3. *Скубачевский А.Л.* // Матем. сборник 1982. – Т. 117 (159), № 4. – С. 548–558.
4. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 795–804.
5. *Ильин В.А., Моисеев Е.И.* // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1198–1207.
6. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.
7. *Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л.* Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М.: Наука, 1987.
8. *Гордезиани Д.Г.* О методах решения одного класса нелокальных краевых задач. Препринт института Прикладной математики при Тбилисском госуниверситете. – Тбилиси, 1981.

Поступила в редакцию
11.05.90