Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина, Двумерная стохастическая задача ползучести толстостенной трубы под действием внутреннего давления,
Матем. моделирование и краев. задачи, 2007, часть 1, 193–197

https://www.mathnet.ru/mmkz790

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.14.85
6 декабря 2025 г., 19:01:28

Разброс деформаций относительно среднего значения при фиксированных α и n примерно в два раза больше разброса напряжений. Величина $\sqrt{\langle p_{11}^2 \rangle}/p_{11}^0$ при $n = 9$ изменяется в пределах от 1,6 ($\alpha = 0,1$) до 8,01 % ($\alpha = 0,5$), а при $n = 1$ — от 5,06 ($\alpha = 0,1$) до 25,31 % ($\alpha = 0,5$). Максимально возможное отклонение напряжений и деформаций от среднего значения характеризуется утроенным коэффициентом вариации(правило «трёх сигма»). Отсюда ясно, что стохастические неоднородности материала способны оказывать существенное влияние на оценку работоспособности элементов конструкций.

1. *Попов Н. Н., Самарин Ю. П.* Пространственная задача стационарной ползучести стохастически неоднородной среды // ПМТФ, 1985. — № 2. — С. 150–155.
2. *Свешников А. А.* Прикладные методы теории случайных функций. — М.: Наука, 1968. — 464 с.

Самарский государственный технический университет, г. Самара

nial@mail.ru

УДК 539.376

Н. Н. Попов, В. Н. Исуткина

ДВУМЕРНАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ПОЛЗУЧЕСТИ ТОЛСТОСТЕННОЙ ТРУБЫ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ВНУТРЕННЕГО ДАВЛЕНИЯ

При решении стохастической краевой задачи ползучести для толстостенной трубы под действием внутреннего давления в работах [1, 2] предполагалось, что случайные свойства материала изменяются только вдоль радиуса цилиндра. Это допущение значительно упрощало решение задачи.

В данной работе стохастические свойства материала описываются случайной функцией двух аргументов. Задача рассматривается в полярных координатах для случая плоского деформированного состояния.

Пусть компоненты тензора напряжений σ_r, σ_φ, $\sigma_{r\varphi}$ удовлетворяют уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0, \tag{1}$$

а компоненты тензора скоростей деформаций $\dot{\varepsilon}_r$, $\dot{\varepsilon}_\varphi$, $\dot{\varepsilon}_{r\varphi}$ — условию

совместности

$$r\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_r}{\partial\varphi^2}+2\frac{\partial\dot{\varepsilon}_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\dot{\varepsilon}_r}{\partial r}=2\frac{\partial^2\dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial r\partial\varphi}+\frac{2}{r}\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{r\varphi}}{\partial\varphi}. \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) замыкаются определяющими соотношениями, которые принимаются в соответствии с нелинейной теорией вязкого течения (установившейся ползучести) в стохастической форме:

$$\dot{\varepsilon}_\varphi=-\dot{\varepsilon}_r=\frac{c}{3}S^{n-1}\left(\sigma_\varphi-\sigma_r\right)(1+\alpha U), \qquad \dot{\varepsilon}_{r\varphi}=cS^{n-1}\sigma_{r\varphi}(1+\alpha U), \qquad (3)$$

где $S=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\sigma_\varphi-\sigma_r\right)^2+4\sigma_{r\varphi}^2}$ — интенсивность напряжений; $U\left(r,\varphi\right)$ — случайная однородная функция, описывающая реологические свойства материала, с математическим ожиданием $\langle U\rangle=0$ и дисперсией $\left\langle U^2\right\rangle=1$; c, n, α — постоянные материала. Обозначая через a и b внутренний и внешний радиусы цилиндра, граничные условия задачи примут вид

$$\sigma_r\left(a,\varphi\right)=-q, \quad \sigma_r\left(b,\varphi\right)=\sigma_{r\varphi}\left(a,\varphi\right)=\sigma_{r\varphi}\left(b,\varphi\right)=0,$$

где q — внутреннее давление.

Статистическая линеаризация задачи (1)–(3) производится путём разложения компонент тензора напряжений по малому параметру α:

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^0+\alpha\sigma_{ij}^*, \quad \left\langle\sigma_{ij}\right\rangle=\sigma_{ij}^0, \quad \left\langle\sigma_{ij}^*\right\rangle=0,$$

где $\sigma_{11}=\sigma_r$, $\sigma_{12}=\sigma_{r\varphi}$, $\sigma_{22}=\sigma_\varphi$.

Тензор σ_{ij}^0 задаёт известное детерминированное решение [3] вида:

$$\sigma_r^0=A\left(b^{-\frac{2}{n}}-r^{-\frac{2}{n}}\right), \quad \sigma_{r\varphi}^0=0, \quad \sigma_\varphi^0=A\left(b^{-\frac{2}{n}}-\left(1-\frac{2}{n}\right)r^{-\frac{2}{n}}\right),$$

где $A=\frac{q}{a^{-\frac{2}{n}}-b^{-\frac{2}{n}}}$.

С целью физической линеаризации функция S^{n-1} разлагается в степенной ряд, и в этом разложении учитываются только линейные члены. В итоге получается стохастическая система из трёх линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Она при помощи перехода к функции напряжения F по формулам

$$\sigma_r^*=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}, \quad \sigma_\varphi^*=\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \sigma_{r\varphi}^*=\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi} \qquad (4)$$

может быть сведена к одному дифференциальному уравнению

$$r^2\frac{\partial^4 F}{\partial r^4}-\frac{2(n-2)}{n}r\frac{\partial^3 F}{\partial r^3}+\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}-$$
$$-\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2}\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}-\frac{2(n-3)}{n}\frac{\partial^4 F}{\partial r^2\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{2(n-3)(3n-2)}{n^2}\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial r\partial\varphi^2}-\frac{2\left(4n^2-15n+8\right)}{n^2}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}+$$
$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^4 F}{\partial\varphi^4}=\frac{2}{n^2}Ar^{-\frac{2}{n}}\left(-r^2\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+r\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right) \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\bigg|_{r=a}=\frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\bigg|_{r=b}=0,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi}\bigg|_{r=a}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial F}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi}\bigg|_{r=b}=0.$$

Пусть случайная однородная функция $U(r,\varphi)$, с помощью которой задаётся случайное поле возмущений реологических свойств материала, представима в форме [4]

$$U=\lambda_0 J_0(r)+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right)J_k(r),$$

где $J_k(r)$ — функция Бесселя I рода целого порядка; λ_k, β_k — независимые случайные величины, причём

$$\langle\lambda_k\rangle=\langle\beta_k\rangle=0,\quad \langle\lambda_k^2\rangle=\langle\beta_k^2\rangle=1.$$

Решение уравнения (5) можно искать в виде

$$F=\lambda_0 f_0(r)+\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}f_k(r)\left(\lambda_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right). \quad (6)$$

Подставляя (6) в уравнение (5) для определения $f_k(r)$ получаем

$$r^2 f_0^{IV}-\frac{2(n-2)}{n}r f_0'''+\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2}f_0''-\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2}\frac{1}{r}f_0'=$$
$$=\frac{2}{n^2}Ar^{-\frac{2}{n}+1}\left(rJ_0(r)-2J_1(r)\right); \quad (7)$$

$$r^2 f_k^{IV} - \frac{2(n-2)}{n} r f_k''' + \left(\frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} + \frac{2(n-3)}{n} k^2 \right) f_k'' -$$

$$- \frac{(n-2)(3n-2)}{n^2} \left(1+2k^2\right) \frac{1}{r} f_k' + \left(\frac{2\left(4n^2-15n+8\right)}{n^2} k^2 + k^4 \right) \frac{1}{r^2} f_k =$$

$$= \frac{2}{n^2} A r^{-\frac{2}{n}} \left(\left(r^2 - 2k^2 - 2k\right) J_k(r) + 2r J_{k-1}(r) \right). \quad (8)$$

Здесь производные вычисляются по переменной r.

Решение уравнений (7), (8) производилось численно.

Далее были вычислены компоненты тензора напряжений согласно (4) и по известной формуле теории вероятностей были найдены дисперсии случайного поля напряжений:

$$\frac{\mathrm{D}[\sigma_r]}{\alpha^2} = \frac{1}{r^2} \left(f_0'\right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{r} f_k' - \frac{k^2}{r^2} f_k \right)^2,$$

$$\frac{\mathrm{D}\left[\sigma_\varphi\right]}{\alpha^2} = \left(f_0''\right)^2 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(f_k''\right)^2, \quad \frac{\mathrm{D}\left[\sigma_{r\varphi}\right]}{\alpha^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{r^2} f_k - \frac{k}{r} f_k' \right)^2.$$

Проведено исследование случайных полей напряжений при помощи коэффициента вариации. Получено, что наибольший разброс тангенциальных напряжений σ_φ происходит на внутренней поверхности трубы.

Здесь коэффициент вариации $\frac{\sqrt{\mathrm{D}[\sigma_\varphi]}}{\sigma_\varphi^0}$ для материалов с высоким показателем нелинейности ($n = 8$) находится в пределах от 0,6 % ($\alpha = 0{,}1$) до 3,2 % ($\alpha = 0{,}5$).

Для случая низких показателей нелинейности ($n = 2$) величина коэффициента вариации находится в пределах от 1 % ($\alpha = 0{,}1$) до 5 % ($\alpha = 0{,}5$).

Радиальные напряжения имеют наибольший разброс на срединной поверхности. Причем это значение на порядок меньше, чем наибольший разброс для тангенциального напряжения.

1. *Должковой А.А., Попов Н.Н., Радченко В.П.* Решение стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы методом малого параметра // ПМТФ, 2006. — Т. 47, № 1. — С. 161–171.
2. *Исуткина В.Н., Маргаритов А.Ю.* Сравнительный анализ решений стохастической краевой задачи установившейся ползучести для толстостенной трубы на основе методов малого параметра и Монте—Карло // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер.: Физ.-матем. науки, 2006. — № 43. — С. 116–123.
3. *Качанов Л.М.* Теория ползучести. — М.: Физматгиз, 1960. — 455 с.

4. *Лавренюк В. И.* Распределение напряжений около кругового отверстия в плоскости из стохастически неоднородного материала // Прикладная механика, 1973. — Т. IX, Вып. 4. — С. 128–132.

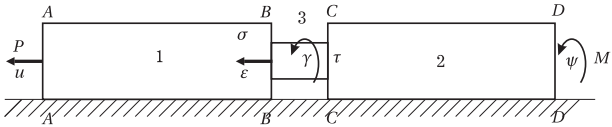
Самарский государственный технический университет, г. Самара

УДК 539.3

Е. Ю. Просвиряков, В. В. Стружанов

ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА В ЗАДАЧЕ О КРУЧЕНИИ С РАСТЯЖЕНИЕМ ОБРАЗЦА ИЗ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО МАТЕРИАЛА

Рассмотрим механическую систему, состоящую из двух упругих цилиндрических стержней 1 и 2, которые осуществляют нагружение полого упругопластического цилиндрического образца 3 (см. рис.).



Стержень 1 осуществляет растяжение, посредством приложения к сечению $A-A$ растягивающей силы P или задания перемещения u при блокировании кручения сечения $B-B$, его жёсткость при растяжении равна λ_1. Стержень 2 скручивает образец 3 посредством приложения к сечению $D-D$ крутящего момента M, или угла закручивания ψ. В сечении $C-C$ блокировано перемещение, его жёсткость при кручении равна λ_2. Нагружение везде осуществляется квазистатически. Механическую систему будем описывать при помощи параметров управления и параметров состояния. Возможно четыре способа задания нагружения системы: (P, M), (P, ψ), (u, M), (u, ψ). Параметры управления (P, M) задают мягкое нагружение; (P, ψ), (u, M) — смешанное, а (u, ψ) — жёсткое нагружение.

В результате данного нагружения в образце 3 возникают продольная деформация растяжения ε, растягивающее напряжение σ, а также сдвиговая деформация γ и касательное напряжение τ.

Полагаем, что образец имеет единичные высоту и средний радиус поперечного сечения, а толщина стенки равна $\frac{1}{2\pi}$. В этом случае растягивающая сила, действующая на образец, равна напряжению σ (площадь поперечного сечения равна единице), а перемещение его конца, примыкающего к стержню 1 равно деформации ε, кроме того, крутящий момент, действующий на образец в его сечении,