



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. В. Садовничий, О пополнении метрических пространств вероятностных мер, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1994, номер 5, 28–32

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

3 декабря 2024 г., 00:15:39



15. Щепин Е. В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров//Успехи матем. наук. 1976. 31, № 5. 191—226.
 16. Федорчук В. В. Некоторые функторы, ретракты и многообразия//IV Тираспольский симп. по общей топол. и ее прил. Кишинев, 1979. 148—150.

Поступила в редакцию
17.05.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. I, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 5

УДК 515.12

Ю. В. Садовничий

О ПОПОЛНЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР

Для тихоновского пространства X через $P(X)$ обозначается множество всех вероятностных мер $\mu \in P(bX)$ (где bX — произвольное бикомпактное расширение, например расширение Стоуна—Чеха пространства X), носители (см. [1, гл. 7, § 3]) которых лежат в X . Это множество наделяется топологией, индуцируемой $*$ -слабой топологией бикомпакта $P(bX)$. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\text{diam } X < \infty$. Определим метрику $P(\rho)$ на $P(X)$ следующим образом:

$$P(\rho)(\mu_1, \mu_2) = \inf \left\{ \int_{X \times X} \rho(x_1, x_2) d\lambda : \lambda \in \Lambda(\mu_1, \mu_2) \right\},$$

где $\Lambda(\mu_1, \mu_2) = \{\lambda \in P(X \times X) : pr_i(\lambda) = \mu_i, i = 1, 2\}$. Здесь $pr_i = P(p_i)$, где $p_i: X \times X \rightarrow X$ — проектирование на i -й сомножитель.

В [2] было доказано, что для произвольного метрического пространства (X, ρ) метрика $P(\rho)$ порождает на $P(X)$ $*$ -слабую топологию. Для дальнейшего нам потребуется

Лемма 1. *Если $f: (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$ — нерастягивающее отображение метрических пространств, то отображение $P(f): (P(X_1), P(\rho_1)) \rightarrow (P(X_2), P(\rho_2))$ также нерастягивающее.*

Эта лемма непосредственно вытекает из леммы 8 работы [3].

Для метрического пространства (X, ρ) через $\text{Cpl}(X, \rho)$ обозначим его пополнение, а через $C_\rho X$ — компактификацию Смирнова (см. [4]) по метрической близости или, что то же самое, пополнение Сэмюэля (см. [5]) по прекомпактной равномерности на X , определяемой метрикой ρ .

Для равномерно непрерывного отображения $f: (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$ через $\text{Cpl}(f)$ и $\delta(f)$ обозначим продолжения отображения f на метрические пополнения и компактификации по метрической близости соответственно. Верна

Теорема А (см. [6, гл. II]). *Для произвольного метрического пространства (X, ρ) компактификации $C_\rho X$ и $C_\rho(\text{Cpl}(X, \rho))$ естественным образом совпадают, а для произвольного равномерно непрерывного отображения $f: (X_1, \rho_1) \rightarrow (X_2, \rho_2)$ имеем $\text{Cpl}(f) = \delta(f)|_{\text{Cpl}(X_1, \rho_1)}$.*

Цель настоящей работы — исследовать пополнения типа Cpl и C_ρ применительно к метрическому пространству $(P(X), P(\rho))$. Основным результатом статьи является следующая

Теорема 1. *Для произвольного метрического пространства (X, ρ) существует единственное непрерывное отображение*

$$j: C_{P(\rho)} P(X) \rightarrow P(C_\rho X),$$

продолжающее естественное вложение

$$i: (P(X), P(\rho)) \rightarrow P(C_\rho X)$$

и равномерно непрерывное на $\text{Cpl}(P(X), P(\rho))$.

Доказательство. Единственность отображения j вытекает из того, что оно однозначно определено на всюду плотном подпространстве $P(X)$ бикompакта $C_{P(\rho)}P(X)$.

Для доказательства существования рассмотрим множество $R = \{\rho_\alpha: \alpha \in A\}$ всех вполне ограниченных псевдометрик на X с условием $\rho_\alpha \leq \rho$. На множестве A введем частичный порядок: $\alpha \geq \beta \Leftrightarrow \rho_\alpha \geq \rho_\beta$; $\alpha, \beta \in A$. Через X/ρ_α обозначим фактормножество множества X по следующему отношению эквивалентности:

$$x \sim x' \Leftrightarrow \rho_\alpha(x, x') = 0.$$

Тогда псевдометрика ρ_α порождает на X/ρ_α метрику, которую будем обозначать $\bar{\rho}_\alpha$. Естественная проекция $p_\alpha: (X, \rho) \rightarrow (X/\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha)$ будет равномерно непрерывна, поскольку $\rho_\alpha \leq \rho$. Более того, если $\alpha \geq \beta$, то определено единственное равномерно непрерывное отображение $p_\beta^\alpha: (X/\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha) \rightarrow (X/\rho_\beta, \bar{\rho}_\beta)$, такое, что

$$p_\beta = p_\beta^\alpha \circ p_\alpha. \quad (1)$$

Положим $X_\alpha = \text{Cpl}(X/\rho_\alpha, \bar{\rho}_\alpha)$, $q_\alpha = \text{Cpl}(p_\alpha)$ и $q_\beta^\alpha = \text{Cpl}(p_\beta^\alpha)$. Тогда $q_\beta = q_\beta^\alpha \circ q_\alpha$ для любых $\alpha \geq \beta$. Отображения p_α и p_β^α близостно непрерывны относительно метрических близостей, поэтому они продолжаются на соответствующие близостные компактификации. Обозначим эти продолжения через π_α и π_β^α соответственно. Тогда

$$\pi_\beta = \pi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha \text{ для любых } \alpha \geq \beta \quad (2)$$

и, согласно теореме А, $\pi_\alpha|_{\text{Cpl}(X, \rho)} = q_\alpha$. Кроме того, $\pi_\beta^\alpha = q_\beta^\alpha$, так как $C_{\rho_\alpha} X/\rho_\alpha = X_\alpha$ в силу полной ограниченности метрики ρ_α , $\alpha \in A$.

Покажем, что множество A направлено вверх. Для $\alpha, \beta \in A$ положим $\rho_{\alpha\beta} = \max\{\rho_\alpha, \rho_\beta\}$. Тогда $\rho_{\alpha\beta}$ — псевдометрика на X со свойством $\rho_{\alpha\beta} \leq \rho$. Кроме того, она вполне ограничена. В самом деле, наделим произведение компактов $X_\alpha \times X_\beta$ метрикой $d_{\alpha\beta}$:

$$d_{\alpha\beta}((x_\alpha, x_\beta), (x'_\alpha, x'_\beta)) = \max\{\bar{\rho}_\alpha(x_\alpha, x'_\alpha), \bar{\rho}_\beta(x_\beta, x'_\beta)\}.$$

Для $\gamma \in A$ обозначим через $p'_\gamma: X \rightarrow X_\gamma$ композицию $i_\gamma \circ p_\gamma$, где $i_\gamma: X/\rho_\gamma \rightarrow X_\gamma$ — естественное вложение. Тогда, обозначив через $p_{\alpha\beta}$ диагональное произведение отображений p'_α и p'_β , легко убеждаемся в том, что псевдометрика $\rho_{\alpha\beta}$ порождается метрикой $d_{\alpha\beta}$ и отображением $p_{\alpha\beta}$, значит, она вполне ограничена.

Итак, множество $S = \{X_\alpha; \pi_\alpha; \alpha \in A\}$ является обратным спектром из метрических компактов. Положим $Y = \lim S$ и обозначим через $\bar{\pi}_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ предельные проекции спектра S . Согласно (2), существует предел $\pi: C_\rho X \rightarrow Y$ семейства отображений $\{\pi_\alpha: C_\rho X \rightarrow X_\alpha, \alpha \in A\}$. При этом

$$\pi_\alpha = \bar{\pi}_\alpha \circ \pi, \alpha \in A. \quad (3)$$

Все отображения π_α есть отображения «на». Поэтому, согласно (3), π также является отображением «на». Покажем, что оно взаимно одно-

значно. Для этого достаточно проверить, что семейство $\{\pi_\alpha: \alpha \in A\}$ разделяет точки пространства $C_\rho X$. Пусть $\xi_1, \xi_2 \in C_\rho X$ — различные точки. У них существуют далекие окрестности U_1 и U_2 . Положим $F_i = \bar{U}_i \cap X$, $i=1, 2$. Тогда F_1 и F_2 — замкнутые подмножества метрического пространства (X, ρ) , находящиеся на положительном расстоянии m . Определим отображение $\varphi: X \rightarrow [0, m]$ следующим образом:

$$\varphi(x) = \frac{m\rho(x, F_1)}{\rho(x, F_1) + \rho(x, F_2)}.$$

Тогда функция $d(x_1, x_2) = |\varphi(x_1) - \varphi(x_2)|$ будет вполне ограниченной псевдометрикой на X , поскольку пространство $(X/d, \bar{d})$ изометрично вложено в отрезок $[0, m]$. Покажем, что $d \leq \rho$. Пусть

$$x_1, x_2 \in X, \rho(x_1, x_2) = l, m_{ij} = \rho(x_i, F_j); i, j = 1, 2.$$

Имеем

$$d(x_1, x_2) = \left| \frac{mm_{11}}{m_{11} + m_{12}} - \frac{mm_{21}}{m_{21} + m_{22}} \right| = \frac{m |m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}|}{(m_{11} + m_{12})(m_{21} + m_{22})}.$$

Предположим, что $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \geq 0$. Тогда

$$d(x_1, x_2) \leq m \frac{m_{11}(m_{12} + l) - m_{12}(m_{11} - l)}{(m_{11} + m_{12})(m_{21} + m_{22})} = \frac{lm}{m_{21} + m_{22}} \leq l.$$

Аналогично $d(x_1, x_2) \leq l$ в случае $m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21} \leq 0$. Таким образом, псевдометрика d есть одна из псевдометрик ρ_α . Но $\rho_d = \varphi$, а $\varphi(F_1) = 0$, $\varphi(F_2) = m$. Следовательно, $\pi_d(\xi_1) = 0$, $\pi_d(\xi_2) = m$, поскольку $\xi_i \in \bar{F}_i \subset C_\rho X$, $i = 1, 2$. Итак, отображение $\pi: C_\rho X \rightarrow Y$ является гомеоморфизмом.

Рассмотрим теперь отображение

$$P(\rho_\alpha): (P(X), P(\rho)) \rightarrow (P(X/\rho_\alpha), P(\bar{\rho}_\alpha)).$$

Оно равномерно непрерывно для всякого $\alpha \in A$, согласно лемме 1. Отображения $P(\rho_\alpha^\beta)$ также равномерно непрерывны. Продолжения этих

отображений на компактификации по метрической близости и на метрические пополнения обозначим соответственно через j_α , j_β^α и k_α , k_β^α . Тогда из (1) вытекает, что

$$j_\beta = j_\beta^\alpha \circ j_\alpha, \alpha \geq \beta, \quad (4)$$

$$k_\beta = k_\beta^\alpha \circ k_\alpha, \alpha \geq \beta.$$

С другой стороны, из теоремы А получаем

$$k_\alpha = j_\alpha |_{\text{Cpl}(P(X), P(\rho))}. \quad (5)$$

В силу изометричности тождественного вложения

$$X/\rho_\alpha \subset \text{Cpl}(X/\rho_\alpha) = X_\alpha$$

вложение $P(X/\rho_\alpha) \subset P(X_\alpha)$ также будет изометричным. А поскольку это вложение плотно, имеем

$$P(X_\alpha) = \text{Cpl}(P(X/\rho_\alpha), P(\bar{\rho}_\alpha)) = C_{P(\bar{\rho}_\alpha)} P(X/\rho_\alpha).$$

Соответственно

$$j_\beta^\alpha = k_\beta^\alpha = P(\pi_\beta^\alpha). \quad (6)$$

В силу непрерывности функтора P (см. [7]) предельные проекции спектра $P(S)$ естественным образом совпадают с отображениями $P(\pi_\alpha): P(Y) \rightarrow P(X_\alpha)$. Поэтому, согласно (4) и (6), существует такое отображение ${}^1j: C_{P(\rho)}P(X) \rightarrow P(Y)$, что $P(\pi_\alpha) \circ {}^1j = j_\alpha$. Положим $j = P(\pi^{-1}) \circ {}^1j$ и покажем, что это искомое отображение.

Пусть $\mu \in P(X)$ и $F = \text{supp } \mu$. Докажем, что существует вполне ограниченная псевдометрика $\rho_F \leq \rho$, являющаяся метрикой на F , такой, что

$$\rho_F^{-1} \rho_F(F) = F. \quad (7)$$

Пусть $h_n(x) = \min\{1, \rho(x, x_n)\}$ для любого $x \in X$, где $\{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ плотно в F и

$$h_0(x) = \min\{1, \rho(x, F)\}, \quad t_n(x) = \frac{h_n(x)}{2^{n+1}}.$$

Тогда каждой точке $x \in X$ ставится в соответствие некоторая точка $(t_0(x), t_1(x), \dots, t_n(x), \dots)$ гильбертова кирпича Q . Гильбертова метрика индуцирует на X искомую метрику ρ_F , так как для любых $x, y \in X$

$$\begin{aligned} \rho_F(x, y) &= \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} (t_n(x) - t_n(y))^2} = \\ &= \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(h_n(x) - h_n(y))^2}{2^{2n+2}}} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\rho(x, y))^2}{2^{2n+2}}} \leq \rho(x, y), \end{aligned}$$

поскольку $-\rho(x, y) \leq \rho(x, x_n) - \rho(y, x_n) \leq \rho(x, y)$ и, следовательно, $|h_n(x) - h_n(y)| = |\rho(x, x_n) - \rho(y, x_n)| \leq \rho(x, y)$, если $\rho(x, x_n) < 1$ и $\rho(y, x_n) < 1$. Если же $\rho(x, x_n) \geq 1$, а $\rho(y, x_n) < 1$, то

$$|h_n(x) - h_n(y)| = 1 - h_n(y) \leq \rho(x, x_n) - \rho(y, x_n) \leq \rho(x, y).$$

Аналогичные рассуждения проведем и при $n=0$. Далее, ρ_F есть метрика на F . В самом деле, пусть $x, y \in F$ — различные точки. Существует последовательность $\{x_{n_k}: k \in \omega\}$, сходящаяся к точке x . Тогда $t_{n_k}(x) < t_{n_k}(y)$ для некоторого k . Следовательно, $\rho_F(x, y) \geq |t_{n_k}(x) - t_{n_k}(y)| > 0$. Координата t_0 нашего вложения обеспечивает выполнение равенства (7).

Множество $A_F = \{\alpha \in A: \rho_\alpha \geq \rho_F\}$ направлено и конфинально в A . Действительно, для любого $\alpha \in A$ имеем $\rho_\alpha \leq \rho_{\alpha F} = \max\{\rho_\alpha, \rho_F\}$. Отображение $P(\pi)$ ставит в соответствие мере μ набор мер $P(\pi_\alpha)(\mu) = P(\rho_\alpha)(\mu)$, $\alpha \in A_F$. Отображение 1j ставит в соответствие мере μ набор $j_\alpha(\mu) = P(\rho_\alpha)(\mu)$, $\alpha \in A_F$, поскольку j_α есть продолжение $P(\rho_\alpha)$. В то же время множество F , согласно (7), состоит из точек взаимной однозначности отображения ρ_α . Поэтому $P(\rho_\alpha)^{-1}P(\rho_\alpha)(\mu) = \mu$ для любого $\alpha \in A_F$. Следовательно, $j(\mu) = P(\pi^{-1}) \circ {}^1j(\mu) = \mu$.

Наконец, равномерная непрерывность отображения $j|_{C_{P(P(X), P(\rho))}}$ вытекает из (5) и равномерной непрерывности отображений k_α . Теорема доказана.

Автор выражает благодарность профессору В. В. Федорчуку за постановку задачи и помощь в работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М., 1988.

2. Садовничий Ю. В. О метрике на пространствах вероятностных мер//Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1994. № 4. 31—35.
3. Федорчук В. В. Тройки бесконечных итераций метризуемых функторов//Изв. АН СССР. Сер. Матем. 1990. 54, № 2. 396—417.
4. Смирнов Ю. М. О пространствах близости//Матем. сб. 1952. 31. 543—574.
5. Samuel P. Ultrafilters and compactifications//Trans. Amer. Math. Soc. 1948. 64. 100—132.
6. Isbell J. R. Uniform spaces//Amer. Math. Soc. 1964.
7. Федорчук В. В. Ковариантные функторы в категории компактов, абсолютные ретракты и Q -многообразия//Успехи матем. наук. 1981. 36, № 3. 177—195.

Поступила в редакцию
20.05.93

ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 1, МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА. 1994. № 5

УДК 517.518.475

В. А. Окулов

О МОДУЛЯХ НЕПРЕРЫВНОСТИ СОПРЯЖЕННОЙ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Пусть R^N ($R^1=R$; $N=1, 2, \dots$) — N -мерное евклидово пространство. Точки N -мерного евклидова пространства обозначим так: $\bar{x}=(x_1, \dots, x_N)$, $\bar{y}=(y_1, \dots, y_N)$ и т. д. Если $M=\{1, \dots, N\}$ и B — любое непустое подмножество множества M , то символом \bar{x}_B будем обозначать те точки из R^N , у которых от нуля могут быть отличны лишь координаты с индексами из множества B , причем $\bar{x}_M=\bar{x}$, $\bar{x}_{\{k\}}=\bar{x}_k$ ($k=1, \dots, N$). Количество элементов в множестве B обозначим $k(B)$, а символом T^N — N -мерный куб $[-\pi, \pi]^N$ ($T^1=T$; $N=1, 2, \dots$). Будем рассматривать 2π -периодические по всем переменным функции $f: T^N \rightarrow R$.

Если $f \in L(T^N)$, то, следуя Л. В. Жижиашвили (см., например, [1]), выражение

$$\tilde{f}_B(\bar{x}) = \left(-\frac{1}{2\pi} \right)^{k(B)} \int_{T^{k(B)}} f(\bar{x} + \bar{s}_B) \prod_{i \in B} \text{ctg} \frac{s_i}{2} ds_i \quad (1)$$

будем называть сопряженной функцией N переменных по совокупности тех переменных, индексы которых образуют множество B . Стоящий в определении (1) интеграл понимается как несобственный в смысле Прингсхейма.

Если $f \in C(T^N)$, т. е. является непрерывной 2π -периодической функцией, то через $\|f\|_{C(T^N)}$, как обычно, обозначим величину $\max_{\bar{x} \in T^N} |f(\bar{x})|$.

В этом случае функцию

$$\omega_k(f, \delta_k) = \sup_{|u_k| \leq \delta_k} \|f(x + u_k \bar{e}_k) - f(\bar{x})\|_{C(T^N)},$$

где $\delta_k \geq 0$ ($1 \leq k \leq N$), а \bar{e}_k — k -й единичный базисный вектор в R^N , назовем модулем непрерывности функции f по переменной x_k ($1 \leq k \leq N$), выражение

$$\omega(f, \delta) = \sup_{|\bar{u}| \leq \delta} \|f(\bar{x} + \bar{u}) - f(\bar{x})\|_{C(T^N)},$$

где $|\bar{u}| = \max_{1 \leq k \leq N} |u_k|$, $\delta \geq 0$, — модулем непрерывности по совокупности всех переменных. В частности, если