М. Г. Григорян, А. А. Саргсян, Безусловно расходящиеся по мере ряды Фурье–Фабера–Шаудера, *Сиб. матем. журн.*, 2018, том 59, номер 5, 1057–1065

DOI: 10.17377/smzh.2018.59.508

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2018. Том 59, № 5

УДК 517.51

БЕЗУСЛОВНО РАСХОДЯЩИЕСЯ ПО МЕРЕ РЯДЫ ФУРЬЕ — ФАБЕРА — ШАУДЕРА

М. Г. Григорян, А. А. Саргсян

Аннотация. Доказано, что для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с мерой $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C_{[0,1]}$ можно построить функцию $\tilde{f} \in C_{[0,1]}$, совпадающую с f на E, разложение которой по системе Фабера — Шаудера после некоторой перестановки расходится по мере.

DOI 10.17377/smzh.2018.59.508

Ключевые слова: равномерная сходимость, система Фабера — Шаудера, сходимость по мере.

§ 1. Введение

В статье описывается структура непрерывных функций, разложения которых по системе Фабера — Щаудера после некоторой перестановки расходятся по мере. Система $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ Фабера — Шаудера [1] является одной из самых популярных систем функций. Ее изучению было посвящено много работ (основные свойства приведены, например, в [2, гл. 6, § 1]).

Напомним, что система Фабера — Шаудера образует базис в пространстве $C[0,1]$ (см. [3]), т. е. всякая функция $f \in C[0,1]$ однозначно представима рядом

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n(f)\varphi_n(x)$$

по системе Фабера — Шаудера, равномерно сходящимся к f на $[0,1]$ (этот ряд назовем *рядом Фурье — Фабера — Шаудера* функции f). Коэффициенты Фурье $A_n(f)$ этого ряда определяются равенствами

$$\begin{gathered} A_0(f) = f(0), \quad A_1(f) = f(1) - f(0), \\ A_n(f) = A_{k,i}(f) = f\left(\frac{2i-1}{2^{k+1}}\right) - \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{i-1}{2^k}\right) + f\left(\frac{i}{2^k}\right)\right]. \end{gathered} \tag{1}$$

Есть много интересных результатов о свойствах системы Фабера — Шаудера (см. обзорную статью П. Л. Ульянова [4], а также [5–8]). Приведем те результаты, которые непосредственно относятся к результатам, полученным в настоящей работе.

Известно, что в пространстве $C_{[0,1]}$ безусловных базисов не существуют (см. [9]), т. е. существует непрерывная функция, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой после некоторой перестановки не будет сходиться к ней по норме пространства $C_{[0,1]}$ (т. е. равномерно).

Результаты, доказанные в [10, 11], показывают, что система Фабера — Шаудера в этом отношении еще более ненадежна.

Теорема A. *Существует функция из $C_{[0,1]}$, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой после некоторой перестановки расходится по мере.*

Однако, как доказывается в [12], изменением значений непрерывных функций на множестве сколь угодно малой меры можно исправить кажущееся «безнадежное» положение (см. также [13]): ряд Фурье — Фабера — Шаудера исправленной функции безусловно равномерно сходится к ней.

Целью настоящей заметки является доказательство того, что, изменяя значения любой непрерывной функции на множестве сколь угодно малой меры, можно получить «плохую» функцию, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой после некоторой перестановки расходится по мере.

Более того, в настоящей работе доказывается

Теорема 1. *Для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C_{[0,1]}$ можно построить функцию $\tilde{f} \in C_{[0,1]}$, совпадающую с f на E, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой после некоторой перестановки расходится по мере.*

Вместе с тем в [14] установлена

Теорема B. *Для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C_{[0,1]}$ можно найти функцию $\tilde{f} \in C_{[0,1]}$, совпадающую с f на E, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой безусловно сходится в $C_{[0,1]}$.*

Таким образом, из теорем 1 и B вытекает следующее утверждение: для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существует измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1-\varepsilon$ такое, что для каждой функции $f \in C_{[0,1]}$ можно построить две функции $f_1, f_2 \in C_{[0,1]}$, совпадающие с f на E, так, чтобы ряд Фурье — Фабера — Шаудера f_1 сходился безусловно в $C_{[0,1]}$, а ряд f_2 после некоторой перестановки расходился по мере.

Интересно выяснить, как ведут себя в этом отношении другие базисы пространства непрерывных функций.

Отметим, что в [14] доказано, что теорема B неверна для системы Франклина (интересно, существует ли ортонормальный базис пространства $C[0,1]$, для которого имело бы место теорема B?).

§ 2. Доказательство основной леммы

Функции системы Фабера — Шаудера $\Phi = \{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $x \in [0,1]$, определяются следующим образом: $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$ и при $n = 2^k + i$, $k = 0,1,\dots$, $i = 1,2,\dots,2^k$,

$$\varphi_n(x) = \varphi_k^{(i)}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin \Delta_n = \Delta_k^{(i)} \equiv \left(\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right), \\ 1, & \text{если } x = x_n = x_k^{(i)} = \frac{2i-1}{2^{k+1}}, \\ \text{линейна и непрерывна на } \left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{2i-1}{2^{k+1}}\right], \left[\frac{2i-1}{2^{k+1}}, \frac{i}{2^k}\right]. \end{cases} \tag{2}$$

Учитывая определение системы Фабера — Шаудера, легко видеть, что для любой функции $f \in C_{[0,1]}$ и для каждого целого неотрицательного числа m сумма $\sum\limits_{n=0}^{m} A_n(f)\varphi_n(x)$ на $[0,1]$ представляет собой ломаную, вершины которой лежат на графике функции f, так что

$$\left\| \sum_{n=0}^{m} A_n(f)\varphi_n \right\|_C \le \|f\|_C, \quad m = 0,1,\dots. \tag{3}$$

Лемма. *Для любых чисел $\epsilon \in (0,1)$, $\delta > 0$, $B > 0$, $\gamma > 0$ и натурального числа $N_0 > 1$ существуют измеримое множество $E_\epsilon \subset [0,1]$, полином по системе Фабера — Шаудера вида*

$$P(x) = \sum_{n=N_0}^{N} A_n \varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^N$ (не единственная) натуральных чисел $N_0, \ldots, N$ и натуральное число $M \in [N_0, N]$ такие, что

1) $|E_\epsilon| > 1 - \epsilon$,
2) $\delta > |A_{\sigma(n)}| \geq |A_{\sigma(n+1)}| \geq 0, \quad n = N_0, \ldots, N-1$,
3) $\sum\limits_{n=N_0}^{M} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > B \quad \forall x \in E_\epsilon$,
4) $\|P\|_C < \delta + \gamma$,
5) $\frac{\gamma}{2} < P(x) = \mathrm{const} < \gamma \quad \forall x \in E_\epsilon$.

Доказательство. Пусть $N_0 = 2^{k_0} + i_0$ $(i_0 \in [1, 2^{k_0}])$. Подберем натуральное число $k > \max\{k_0, \log_2 \frac{4}{\epsilon}\}$ и для каждого натурального числа j определим числа $q_j = \sum\limits_{m=k}^{k+j-1} m$ и последовательности индексов I_j^1 и I_j^2:

$$\begin{gathered} I_j^1 = \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} \bigcup_{n_2=1}^{2^{k+1}-2} \cdots \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \bigcup_{n=2}^{2^{k+j-1}-1} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + n \right\}, \\ I_j^2 = \bigcup_{n_1=1}^{2^k-2} \cdots \bigcup_{n_{j-1}=1}^{2^{k+j-2}-2} \left\{ \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1; \sum_{l=0}^{j-1} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 2^{k+j-1} \right\}, \end{gathered} \tag{4}$$

где полагается $n_0 = 0$, $q_0 = 1$.

Рассмотрим следующие множества:

$$E_j = \bigcup_{i \in I_j^1} \Delta_{q_j}^{(i)}, \quad j \in \mathbb{N}, \tag{5}$$

где E_1 получается из отрезка $[0,1]$ в результате деления на 2^k равных частей $\left(\Delta_{q_1}^{(i)} = \Delta_k^{(i)}\right)$ и отбрасывания первого и последнего, $E_2 \subset E_1$ получается из E_1 в результате деления каждого из входящих в E_1 интервалов $\Delta_{q_1}^{(i)}$ на 2^{k+1} равных частей $\left(\Delta_{q_2}^{(i)} = \Delta_{2k+1}^{(i)}\right)$ и отбрасывания первого и последнего и вообще для всякого натурального числа $j > 1$ множество $E_j \subset E_{j-1}$ получается из E_{j-1} в результате деления каждого из входящих в E_{j-1} интервалов $\Delta_{q_{j-1}}^{(i)}$ на 2^{k+j-1} равных частей $\left(\Delta_{q_j}^{(i)} = \Delta_{\frac{2k+j-1}{2}j}^{(i)}\right)$ и отбрасывания первого и последнего.

Положим

$$E_\epsilon = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j. \tag{6}$$

Учитывая определения последовательностей индексов (4), нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |E_\epsilon| &= 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in I_j^2} \left|\Delta_{q_j}^{(i)}\right| \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{1}{2^k} - 2 \cdot \sum_{j=2}^{\infty} \frac{(2^k - 2)(2^{k+1} - 2) \ldots (2^{k+j-2} - 2)}{2^k 2^{k+1} \ldots 2^{k+j-1}} > 1 - \epsilon. \end{aligned}$$

Далее, рассмотрим систему непрерывных на $[0,1]$ функций $\{\psi_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$, в которой (см. (5))

$$\psi_j(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \notin E_j, \\ 1 \quad \text{при } x \in E_{j+1}, \\ \text{линейна и непрерывна при } x \in E_j \setminus E_{j+1}. \end{cases} \tag{7}$$

Имея в виду определения (6), (7) и учитывая (1), нетрудно видеть, что для каждого натурального числа j

$$E_\epsilon \subset E_j = \mathscr{S}_{\psi_j}, \quad \|\psi_j\|_C = 1, \quad \psi_j(x) = 1 \ \forall x \in E_\epsilon, \tag{8}$$

$$\psi_j(x) = \sum_{i \in I_j^1} \left(\varphi_{q_j}^{(i)}(x) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{p=1}^{k+j-1} \varphi_{q_j+p}^{(2t_p-1)}(x) + \sum_{p=1}^{k+j-1} \varphi_{q_j+p}^{(2h_p)}(x) \right\} \right), \tag{9}$$

где $\mathscr{S}_{\psi_j}$ — носитель функции $\psi_j(x)$, $t_1 = h_1 = i = \sum\limits_{l=0}^{j} n_l \cdot 2^{q_j - q_l} + 1$, $t_{p+1} = 2t_p - 1$, $h_{p+1} = 2h_p$.

Из (5)–(9) следует, что, каковы бы ни были натуральное число j и точка $x_0 \in E_\epsilon$,

$$\varphi_{q_j}^{(i_{x_0})}(x_0) \neq 0 \tag{10}$$

верно только для одного индекса $i_{x_0} \in I_j^1$.

Возьмем натуральные числа $K > \delta^{-1}$ и L так, чтобы

$$\frac{1}{K} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=L}^{2L-1} \frac{1}{2l} \right) > B, \tag{11}$$

и рассмотрим ряд

$$\frac{1}{K} + \frac{1}{2K} - \frac{1}{2K} + \dots + \frac{1}{(2m-1)K} + \frac{1}{(2m)K} - \frac{1}{(2m)K} + \dots = +\infty. \tag{12}$$

Переставим члены ряда (12) по схеме Римана (см. [15, гл. 11, § 4, п. 388, теорема Римана]) так, чтобы он сходился к γ. Члены переставленного ряда обозначим через C_j, $j = 1, 2, \dots$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j = \gamma. \tag{13}$$

Пусть J — натуральное число, для которого $C_{J+1} = \frac{1}{(4L-1)K}$. На основе (12) и схемы Римана будем считать, что число L выбрано настолько большим, что

$$-\frac{\gamma}{2} < -\frac{1}{(4L-2)K} < C_J < \sum_{j=1}^{J} C_j - \gamma < 0 \tag{14}$$

и все числа $\left\{\frac{1}{mK}\right\}_{m=1}^{4L-2}$ и $\left\{-\frac{1}{2mK}\right\}_{m=1}^{2L-1}$ входят в множество $\{C_j\}_{j=1}^{J}$.

Рассмотрим функцию

$$Q_J(x) = \sum_{j=1}^{J} C_j \psi_j(x). \tag{15}$$

Учитывая (9) и (12), находим, что $Q_J(x)$ представляет собой некий полином $P(x)$ по системе Фабера — Шаудера вида

$$Q_J(x) = P(x) = \sum_{n=N_0}^{N} A_n \varphi_n(x), \quad \text{где } 0 \le |A_n| < \delta, \ n = N_0, \dots, N. \tag{16}$$

Далее, учитывая (7), (8), схему построения ряда (13) и (14), находим

$$\|P\|_C < C_1 + \gamma < \delta + \gamma, \quad \frac{\gamma}{2} < P(x) = \sum_{j=1}^{J} C_j < \gamma \quad \forall x \in E_\epsilon.$$

Пусть $\{\sigma(n)\}_{n=N_0}^N$ — перестановка натуральных чисел $N_0, \dots, N$ такая, что $|A_{\sigma(n)}| \ge |A_{\sigma(n+1)}|$, и M — натуральное число, для которых

$$|A_{\sigma(M)}| = \frac{1}{(4L-2)K}, \quad |A_{\sigma(M+1)}| < \frac{1}{(4L-2)K}. \tag{17}$$

Через $\{\tilde\sigma(j)\}_{j=1}^J$ обозначим такую перестановку натуральных чисел $1, \dots, J$, что $|C_{\tilde\sigma(j)}| \ge |C_{\tilde\sigma(j+1)}|$ (очевидно, $\{\tilde\sigma(j)\}_{j=1}^J$ — не единственная такая перестановка). Учитывая (9), (10), (12)–(17), нетрудно заметить, что для каждой точки $x \in E_\epsilon$ верно

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=N_0}^{M} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \\
&\quad = \frac{1}{K} \sum_{l=1}^{L-1} \left\{ \frac{\psi_{\tilde\sigma(3l-2)}(x)}{2l-1} + \lambda_{\tilde\sigma}^{2l} \frac{\psi_{\tilde\sigma(3l-1)}(x)}{2l} - \lambda_{\tilde\sigma}^{2l} \frac{\psi_{\tilde\sigma(3l)}(x)}{2l} \right\} + \frac{\psi_{\tilde\sigma(3L-2)}(x)}{(2L-1)K} \\
&\qquad + \frac{1}{K} \sum_{l=L}^{2L-2} \left(\lambda_{\tilde\sigma}^{2l} \frac{\varphi^{(i_x)}_{q_{\tilde\sigma(3l-1)}}(x)}{2l} - \lambda_{\tilde\sigma}^{2l} \frac{\varphi^{(i_x)}_{q_{\tilde\sigma(3l)}}(x)}{2l} + \frac{\varphi^{(i_x)}_{q_{\tilde\sigma(3l+1)}}(x)}{2l+1} \right) \\
&\qquad\qquad + \frac{1}{K} \left(\lambda_{\tilde\sigma}^{4L-2} \frac{\varphi^{(i_x)}_{q_{\tilde\sigma(6L-4)}}(x)}{4L-2} - \lambda_{\tilde\sigma}^{4L-2} \frac{\varphi^{(i_x)}_{q_{\tilde\sigma(6L-3)}}(x)}{4L-2} \right),
\end{aligned}$$

где $\lambda_{\tilde\sigma}^{2l}$, $l = 1, \dots, 2L-1$, принимают значения 1 или -1 в зависимости от $\{\tilde\sigma(j)\}_{j=1}^J$. Отсюда, имея в виду (8), (11) и определение системы Фабера — Шаудера (2), находим

$$\sum_{n=N_0}^{M} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > \frac{1}{K} \left(\sum_{l=1}^{L} \frac{1}{2l-1} - \sum_{l=L}^{2L-1} \frac{1}{2l} \right) > B \quad \forall x \in E_\epsilon.$$

Лемма доказана.

§ 3. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы 1 понадобится

Теорема 2. *Для любого числа $\varepsilon \in (0,1)$ существуют измеримое множество $E \subset [0,1]$ с $|E| > 1 - \varepsilon$, функция $f_0 \in C_{[0,1]}$, перестановка натуральных чисел $\sigma(n)$ и последовательности натуральных чисел $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ и $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ такие, что*

1) $f_0(x) = 0 \quad \forall x \in E$,

2) $\lim\limits_{k\to\infty}\left\|\sum\limits_{n=0}^{N_k} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)} - f_0\right\|_C = 0,$

3) $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{n=0}^{M_k} A_{\sigma(n)}\varphi_{\sigma(n)}(x) = +\infty$ *п. в. на отрезке* $[0,1]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть ε — произвольное число из $(0,1)$. Применим лемму, полагая в ее формулировке $\epsilon = \frac{\varepsilon}{2}$, $\delta = 1$, $B = 1$, $\gamma = 1$, $N_0 := N_1 + 1 = 2$. Тогда определяются измеримое множество $E_1 \subset [0,1]$, полином вида

$$P_1(x) = \sum_{n=N_1+1}^{N_2} A_n^{(1)}\varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma_1(n)\}_{n=N_1+1}^{N_2}$ натуральных чисел $N_1+1,\dots,N_2$ и натуральное число $M_1 \in (N_1, N_2]$, удовлетворяющие условиям

$$|E_1| > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

$$1 > \left|A^{(1)}_{\sigma_1(n)}\right| \ge \left|A^{(1)}_{\sigma_1(n+1)}\right| \ge 0, \quad n = N_1+1,\dots,N_2-1,$$

$$\|P_1\|_C < 2, \tag{18}$$

$$\frac{1}{2} < P_1(x) := p_1 < 1 \quad \forall x \in E_1, \tag{19}$$

$$\sum_{n=2}^{M_1} A^{(1)}_{\sigma_1(n)}\varphi_{\sigma_1(n)}(x) > 1 \quad \forall x \in E_1.$$

Из (3), (18) и (19) следует, что

$$\max_{N_1+1\le m\le N_2}\left\|\sum_{n=2}^{m} A_n^{(1)}\varphi_n\right\|_C = \|P_1\|_C < 2$$

и

$$0 < 1 - p_1 < \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Абсолютную величину наименьшего по модулю коэффициента $A_n^{(1)}$, входящего в $P_1(x)$, обозначим через a_1, т. е. $a_1 := \min\bigl\{\left|A_n^{(1)}\right| \ne 0,\, n \in (N_1, N_2]\bigr\}$. Снова применим лемму, полагая в ее формулировке $\epsilon = \frac{\varepsilon}{4}$, $\delta = \frac{a_1}{2}$, $B = 2$, $\gamma = 1 - p_1$, $N_0 = N_2 + 1$. Тогда определяются измеримое множество $E_2 \subset [0,1]$, полином вида

$$P_2(x) = \sum_{n=N_2+1}^{N_3} A_n^{(2)}\varphi_n(x),$$

перестановка $\{\sigma_2(n)\}_{n=N_2+1}^{N_3}$ натуральных чисел $N_2+1,\dots,N_3$ и натуральное число $M_2 \in (N_2, N_3]$, удовлетворяющие условиям

$$|E_2| > 1 - \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\frac{1}{2} > \frac{a_1}{2} > \left|A^{(2)}_{\sigma_2(n)}\right| \ge \left|A^{(2)}_{\sigma_2(n+1)}\right| \ge 0, \quad n = N_2+1,\dots,N_3-1,$$

$$\|P_2\|_C < 1, \tag{21}$$

$$\frac{1-p_1}{2} < P_2(x) := p_2 < 1 - p_1 \quad \forall x \in E_2, \tag{22}$$

$$\sum_{n=N_2+1}^{M_2} A^{(2)}_{\sigma_2(n)}\varphi_{\sigma_2(n)}(x) > 2 \quad \forall x \in E_2.$$

Из (3), (20)–(22) следует, что

$$\max_{N_2+1\le m\le N_3}\left\|\sum_{n=N_2+1}^{m} A^{(2)}_n\varphi_n\right\|_C = \|P_2\|_C < 1 \quad \text{и} \quad 0 < 1 - p_1 - p_2 < \frac{1}{4}.$$

Продолжая эти рассуждения, для каждого натурального числа $k > 1$ можно определить по индукции измеримое множество $E_k \subset [0,1]$, полином вида

$$P_k(x) = \sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_n\varphi_n(x), \tag{23}$$

перестановку $\{\sigma_k(n)\}_{n=N_k+1}^{N_{k+1}}$ натуральных чисел $N_k+1,\ldots,N_{k+1}$ и натуральное число M_k, удовлетворяющие условиям

$$|E_k| > 1 - \varepsilon 2^{-k}, \tag{24}$$

$$\frac{1}{2^{-k+1}} > \frac{a_{k-1}}{2} > \left|A^{(k)}_{\sigma_k(n)}\right| \ge \left|A^{(k)}_{\sigma_k(n+1)}\right| \ge 0, \quad n = N_k+1,\ldots,N_{k+1}-1,$$

$$\|P_k\|_C < 2^{-k+2}, \tag{25}$$

$$\frac{1 - \sum\limits_{l=1}^{k-1} p_l}{2} < P_k(x) := p_k < 1 - \sum_{l=1}^{k-1} p_l \quad \forall x \in E_k, \tag{26}$$

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A^{(k)}_{\sigma_k(n)}\varphi_{\sigma_k(n)}(x) > k \quad \forall x \in E_k, \tag{27}$$

где $a_{k-1} = \min\left\{\left|A^{(k-1)}_n\right| \ne 0,\ n \in (N_{k-1}, N_k]\right\}$ и

$$0 < 1 - \sum_{l=1}^{k-1} p_l < 2^{-k+1}. \tag{28}$$

Учитывая (3), (25), (26) и (28), находим, что

$$\max_{N_k+1\le m\le N_{k+1}}\left\|\sum_{n=N_k+1}^{m} A^{(k)}_n\varphi_n\right\|_C < 2^{-k+2}, \tag{29}$$

$$0 < 1 - \sum_{l=1}^{k} p_l < 2^{-k}. \tag{30}$$

Из (25) и (29) следует, что ряд $-\varphi_0(x) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n\varphi_n(x)$, где $A_n = A^{(k)}_n$, $n \in (N_k, N_{k+1}]$, равномерно сходится на отрезке $[0,1]$.

Положим

$$f_0(x) := -\varphi_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty} A_n\varphi_n(x) = -\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x)$$

$$= -\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_n\varphi_n(x) = -\varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=N_k+1}^{N_{k+1}} A^{(k)}_{\sigma_k(n)}\varphi_{\sigma_k(n)}(x), \tag{31}$$

$$\sigma(n) = \sigma_k(n), \quad n \in (N_k, N_{k+1}], \tag{32}$$

$$E' := \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} E_k, \quad E'' := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \subset E_k. \tag{33}$$

На основе (24), (26), (30), (31) и (33) нетрудно видеть, что

$$|E'| = 1, \quad |E''| > 1 - \varepsilon, \quad f_0(x) = -1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 0 \quad \forall x \in E''$$

и для каждой точки $x \in E'$ можно найти натуральное число k_x такое, что для любого натурального числа $k \geq k_x$ верно $x \in E_k$. Следовательно, имея в виду (27) и (32), для любого натурального $k \geq k_x$ получим

$$\sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) > k,$$

откуда, учитывая (25), (31) и (32), с одной стороны, заключаем, что для каждой точки $x \in E'$ при $k \to +\infty$

$$-\varphi_0(x) + \sum_{n=2}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = -\varphi_0(x) + \sum_{l=1}^{k-1} \sum_{n=N_l+1}^{N_{l+1}} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x)$$
$$+ \sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) \geq \sum_{n=N_k+1}^{M_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) - \left\| \sum_{l=1}^{k-1} P_l \right\|_C - 1 > k - 5 \to +\infty,$$

а с другой стороны,

$$-\varphi_0(x) + \sum_{n=2}^{N_k} A_{\sigma(n)} \varphi_{\sigma(n)}(x) = -\varphi_0(x) + \sum_{l=1}^{k-1} P_l(x)$$

равномерно на отрезке $[0, 1]$ сходится к $f_0(x)$.

Теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 усиливает теорему А, ибо в ней построена непрерывная функция, отличная от нуля только на множестве сколь угодно малой меры, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой после некоторой перестановки расходится по мере. Заметим, что в этой перестановке модули ненулевых коэффициентов расположены в убывающем порядке.

Пусть $\varepsilon \in (0, 1)$ — произвольно заданное число. Определим множества $E_1 \subset [0, 1]$ и $E_2 \subset [0, 1]$ с $|E_1| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ и $|E_2| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, входящие в формулировки теорем B и 2 соответственно, и рассмотрим множество $E = E_1 \cap E_2$, являющееся подмножеством как для E_1, так и для E_2 и имеющего меру $|E| > 1 - \varepsilon$. Для каждой функции $f \in C_{[0,1]}$, с одной стороны, по теореме B определим функцию $f_1 \in C_{[0,1]}$, совпадающую с f на E, ряд Фурье — Фабера — Шаудера которой безусловно сходится в $C_{[0,1]}$, с другой стороны, по теореме 2 определим функцию $f_0 \in C_{[0,1]}$, равную нулю на множестве E, ряд которой после некоторой перестановки расходится по мере. Легко видеть, что ряд функции $f_2 = f_1 + f_0$ (которая совпадает с f на E) после соответствующей перестановки опять расходится по мере.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Faber G.* Uber die Orthogonalenfunctionen des Herrn Haar // Jahrscber. Deutsch. Math. Verien. 1910. V. 19. P. 104–113.

2. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1999.

3. *Schauder J.* Zur Theorie stetiger Abbildungen in Functionalraumen // Math. Z. 1927. Bd 26. S. 47–65.

4. *Ульянов П. Л.* Представление измеримых функций рядами и классы $\varphi(L)$ // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 2. С. 3–52.

5. *Кротов В. Г.* Представление измеримых функций рядами по системе Фабера — Шаудера и универсальные ряды // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, № 1. С. 215–239.

6. *Кротов В. Г.* Об универсальных рядах Фурье по системе Фабера — Шаудера // Вестн. МГУ. 1975. Т. 4. С. 53–58.

7. *Григорян М. Г., Кротов В. Г.* Теорема исправления Лузина и коэффициенты разложений Фурье по системе Фабера — Шаудера // Мат. заметки. 2013. Т. 93, № 2. С. 172–178.

8. *Галоян Л. Н., Григорян М. Г., Кобелян А. Х.* О сходимости рядов Фурье по классическим системам // Мат. сб. 2015. Т. 206, № 7. С. 55–94.

9. *Karlin S.* Bases in Banach spaces // Duke Math. J. 1948. V. 15. P. 971–985.

10. *Бочкарев С. В.* О рядах по системе Шаудера // Мат. заметки. 1968. Т. 4, № 4. С. 453–460.

11. *Григорян М. Г., Саргсян А. А.* Нелинейная аппроксимация непрерывных функций по системе Фабера — Шаудера // Мат. сб. 2008. Т. 199, № 5. С. 3–26.

12. *Grigoryan M. G., Sargsyan A. A.* Unconditional C-strong property of Faber–Schauder system // J. Math. Anal. Appl. 2009. V. 352. P. 718–723.

13. *Меньшов Д. Е.* О равномерной сходимости рядов Фурье // Мат. сб. 1942. Т. 53, № 2. С. 67–96.

14. *Grigoryan M. G., Grigoryan T. M.* On the absolute convergence of Schauder series // Adv. Theor. Appl. Math. 2014. V. 9, N 1. P. 11–14.

15. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1970. Т. 2.

Статья поступила 11 декабря 2017 г.

Григорян Мартин Геворгович
Ереванский гос. университет,
ул. А. Манукяна, 1, Ереван 0025, Армения
`gmarting@ysu.am`

Саргсян Арцрун Аршалуйсович
Российско-Армянский университет,
ул. О. Эмина, 123, Ереван 0051, Армения
`asargsyan@ysu.am`