S. V. Shpirko, Solution of n-person games by means of a prediction-type gradient method,
Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 2000, Number 6, 63–69

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

2000 МАТЕМАТИКА № 6 (457)

УДК 517.977

С.В. ШПИРКО

РЕШЕНИЕ ИГР МНОГИХ ЛИЦ С ПОМОЩЬЮ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА ПРОГНОЗНОГО ТИПА

1. Постановка задачи

В работе строятся итерационные методы решения бескоалиционной игры n лиц с равновесием по Нэшу

$$f^i(v_1^*,\dots,v_i^*,\dots,v_n^*) \le f^i(v_1^*,\dots,v_i,\dots,v_n^*) \ \ \forall (v_1^*,\dots,v_i,\dots,v_n^*) \in V, \tag{1.1}$$

где множество решений V^* не пусто, а допустимое множество V задано как прямое произведение выпуклых, замкнутых подмножеств

$$V = \{v = (v_1,\dots,v_i,\dots,v_n) : v_i \in V_i \subseteq R^{m_i},\ i = 1,\dots,n\}.$$

В такой игре каждому участнику невыгодно уклоняться от своей оптимальной стратегии v_i^*, если известно, что остальные игроки придерживаются своих стратегий $v_{-i}^* = (v_1^*,\dots,v_{i-1}^*,v_{i+1}^*,\dots,v_n^*)$.

Будем считать, что каждая из функций $f^i(v_i,v_{-i})$ дифференцируема и выпукла по v_i при фиксированных v_{-i}. В этом случае игра (1.1) эквивалентна решению системы вариационных неравенств

$$\langle \nabla f_i^i(v^*), v_i - v_i^*\rangle \ge 0 \ \ \forall v_i \in V_i,\ \ i = 1,\dots,n, \tag{1.2}$$

где через $\nabla f_i^i(v)$ обозначена частная производная функции $f^i(v)$ по переменной v_i.

Для обеспечения сходимости градиентного метода к решению задачи (1.2) в него вводят элемент прогноза [1] и используют идею кососимметричности [2].

2. Описание методов

Метод 1. Выбирается начальное приближение $v^0 = (v_1^0,\dots,v_n^0) \in V$ и число $\alpha_0 > 0$. Пусть уже проделано k итераций метода. На $(k+1)$-й итерации производятся следующие действия.

I. Вычисляется прогнозная точка

$$\overline{u}_i^k = \pi_{V_i}(v_i^k - \alpha_k \nabla f_i^i(v_i^k, v_{-i}^k)), \quad i = 1,\dots,n, \tag{2.1}$$

где $\pi_{V_i}(v)$ — проекция элемента v на множество V_i.

II. Проверяются условия

$$\alpha_k|\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k)| \le \sqrt{1-\varepsilon}\,|v^k - \overline{u}^k|, \quad i = 1,\dots,n, \tag{2.2}$$

где $1 - 1/n \le \varepsilon < 1$ — произвольно выбранная константа. Если условия (2.2) не верны хотя бы для одного i, то α_k заменяется на $\alpha_k/2$ и следует возвращение к п. I.

III. Вычисляется новое приближение

$$v_i^{k+1} = \pi_{V_i}(v_i^k - \alpha_k \nabla f_i^i(\overline{u}_i^k, \overline{u}_{-i}^k)), \quad i = 1,\dots,n, \tag{2.3}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-15-96124).

полагается $\alpha_{k+1} = 2\alpha_k$.

Замечание. Если частные производные $\nabla f_i^i(v)$ удовлетворяют неравенствам Липшица

$$|\nabla f_i^i(v) - \nabla f_i^i(w)| \le L|v - w| \ \ \forall v, w \in V, \ \ i = 1, \dots, n, \tag{2.4}$$

то условия (2.2) выполнятся за конечное число шагов. Действительно, с учетом (2.4) получим

$$\alpha_k|\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k)| \le L\alpha_k|v^k - \overline{u}^k| \le \sqrt{1-\varepsilon}\,|v^k - \overline{u}^k|,$$

если взять $\alpha_k \le \sqrt{1-\varepsilon}/L$.

Введем свертку функций

$$\Phi(v, w) = \sum_{i=1}^n f^i(w_i, v_{-i}), \ \ v, w \in V,$$

и рассмотрим условие

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, v^*) \ge 0 \ \ \forall v \in V, \tag{2.5}$$

где $v^* \in V^*$. Это условие обобщает условие кососимметричности

$$\Phi(v, v) - \Phi(v, w) - \Phi(w, v) + \Phi(w, w) \ge 0 \ \ \forall v, w \in V$$

и является достаточным для сходимости метода к решению.

Теорема 1. *Если функции $f^i(v)$ дифференцируемы, выпуклы по v_i при фиксированных v_{-i} и удовлетворяют условию (2.5), то траектория $\{v^k\}$ метода (2.1)–(2.3) монотонно сходится к решению v^* задачи (1.1).*

Доказательство. С учетом свойства проекции представим уравнение (2.1) в виде вариационного неравенства

$$\langle \overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_k \nabla f_i^i(v^k), w_i - \overline{u}_i^k \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i.$$

Поскольку скалярное произведение равно разности квадратов, то

$$|w_i - v_i^k|^2 - |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 - |w_i - \overline{u}_i^k|^2 + 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(v^k), w_i - \overline{u}_i^k \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i. \tag{2.6}$$

Аналогично преобразуем уравнение (2.3)

$$|w_i - v_i^k|^2 - |v_i^{k+1} - v_i^k|^2 - |w_i - v_i^{k+1}|^2 + 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), w_i - v_i^{k+1} \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i. \tag{2.7}$$

Положим $w_i = v_i^{k+1}$ в (2.6), $w_i = v_i^*$ в (2.7) и сложим оба неравенства

$$|v_i^{k+1} - v_i^*|^2 - |v_i^k - v_i^*|^2 + |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 + |v_i^{k+1} - \overline{u}_i^k|^2 \le 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(v^k), v_i^{k+1} - \overline{u}_i^k \rangle + 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^* - v_i^{k+1} \rangle.$$

Преобразуем неравенство по формуле $-|a|^2 + 2\langle a, b \rangle \le |b|^2$. Применяя затем условие (2.2), получим

$$\begin{aligned} |v_i^{k+1} - v_i^*|^2 - |v_i^k - v_i^*|^2 + |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 - 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^* - \overline{u}_i^k \rangle \le -|v_i^{k+1} - \overline{u}_i^k|^2 + \\ + 2\alpha_k \langle \nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^{k+1} - \overline{u}_i^k \rangle \le \alpha_k^2 |\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k)|^2 \le (1-\varepsilon)|v^k - \overline{u}^k|^2. \end{aligned}$$

Поскольку $f^i(v_i, v_{-i})$ выпукла по v_i, то

$$|v_i^{k+1} - v_i^*|^2 - |v_i^k - v_i^*|^2 + |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 - 2\alpha_k \big(f^i(v_i^*, \overline{u}_{-i}^k) - f^i(\overline{u}_i^k, \overline{u}_{-i}^k)\big) \le (1-\varepsilon)|v^k - \overline{u}^k|^2.$$

Просуммируем эти неравенства по i от 1 до n. Учитывая (2.5) и условия $1 - 1/n \le \varepsilon < 1$, получим

$$\begin{aligned} |v^{k+1} - v^*|^2 - |v^k - v^*|^2 \le 2\alpha_k \sum_{i=1}^n \big(f^i(v_i^*, \overline{u}_{-i}^k) - f^i(\overline{u}^k)\big) + \\ + (1-\varepsilon) \sum_{i=1}^n |v^k - \overline{u}^k|^2 - |v^k - \overline{u}^k|^2 \le (n(1-\varepsilon) - 1)|v^k - \overline{u}^k|^2 \le 0. \end{aligned}$$

Выделим из ограниченной последовательности $\{v^k\}$ сходящуюся подпоследовательность $v^{k_j} \to v'$ при $k_j \to \infty$. Переходя к пределу по $k_j \to \infty$ в неравенстве (2.6), получим

$$\langle \nabla f_i^i(v'), w_i - v_i' \rangle \geq 0 \ \ \forall w_i \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, n.$$

Поскольку эти неравенства совпадают с (1.2), то $v' = v^* \in V^*$, т. е. любая предельная точка последовательности $\{v^k\}$ является решением задачи (1.1). Покажем, что $\{v^k\}$ сходится к v^*. Предположим противное, т. е. у последовательности $\{v^k\}$ существует и другая предельная точка $v_1^* \neq v^*$.

Рассмотрим два малых шара $B(v^*)$, $B_1(v_1^*)$ с центрами соответственно в точках v^* и v_1^*. Выберем их радиус так, чтобы шары друг с другом не пересекались (для этого достаточно взять его равным $|v^* - v_1^*|/3$). Поскольку v^* — предельная точка, то в последовательности $\{v^k\}$ обязательно найдется точка, которая попадает в шар $B(v^*)$. А так как $|v^k - v^*|$ монотонно убывает, то и все последующие точки из $\{v^k\}$ также будут принадлежать этому шару.

Таким образом, начиная с некоторого номера, все точки из последовательности $\{v^k\}$ находятся вне шара $B(v_1^*)$. А это противоречит предположению о том, что v_1^* — предельная точка. Следовательно, $\{v^k\}$ сходится к единственной предельной точке v^*. $\square$

Заметим, что в предложенном методе у всех игроков единая длина шага. Чтобы реализовать идею разных длин шагов, введем в процесс вычислений комбинированную длину шага [3].

Метод 2. Пусть для каждого игрока задано начальное приближение $v_i^0 \in V_i$ и длина шага $\alpha_i^0 > 0$. На $(k+1)$-й итерации производим следующие действия.

I. Вычисляем прогнозную точку

$$\overline{u}_i^k = \pi_{V_i}(v_i^k - \alpha_i^k \nabla f_i^i(v_i^k, v_{-i}^k)), \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.8}$$

II. Проверяем условия

$$2\alpha_i^k \langle \nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^k - \overline{u}_i^k \rangle \leq (1 - \varepsilon)|v^k - \overline{u}^k|^2, \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.9}$$

Если условия (2.9) не верны хотя бы для одного i, то заменяем α_i^k на $\alpha_i^k/2$ и возвращаемся к п. I.

III. Вычисляем комбинированную общую длину шага

$$\delta^k = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \alpha_i^k \frac{C(1-\varepsilon)|\overline{u}^k - v^k|^2}{|\overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k(\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k))|^2} \right\}, \tag{2.10}$$

где $C = \mathrm{const} > 1$, и с помощью δ^k вычисляем

$$v_i^{k+1} = \pi_{V_i}(v_i^k - \delta^k \nabla f_i^i(\overline{u}_i^k, \overline{u}_{-i}^k)), \ \ i = 1, \ldots, n. \tag{2.11}$$

В конце итерации удваиваем длины шагов всех игроков: $\alpha_i^{k+1} = 2\alpha_i^k \ \forall i$.

По поводу предложенного метода необходимо сделать несколько замечаний. Во-первых, будем считать, что длины шагов ограничены снизу, т. е. $\exists \Delta_1 > 0 : \alpha_i^k \geq \Delta_1 \ \forall k, \ i = 1, \ldots, n$. В частности, это требование выполняется, если каждая из функций $f^i(v)$ удовлетворяет условию Липшица (2.4). С другой стороны, постараемся так отрегулировать шаги, чтобы они не превосходили некоторой фиксированной константы $\Delta_2 > 0 : \alpha_i^k \leq \Delta_2 \ \forall k, \ i = 1, \ldots, n$. Константу $\varepsilon > 0$ будем выбирать из условия $1 - 2\Delta_1/(n(1+C)\Delta_2) \leq \varepsilon < 1$.

Заметим, что предложенный метод является обобщением метода 1. Действительно, если положить $\alpha_i^k \equiv \alpha^k$, $i = 1, \ldots, n$, то оба условия (2.9) и (2.2) совпадут. Отметим еще раз, что в условии (2.9) фигурируют собственные длины шагов игроков. Тем самым в методе 2 для каждого участника реализуется дополнительная степень свободы. Константа $C > 1$ из (2.10) выбирается эмпирически с целью улучшения сходимости метода.

Теорема 2. *Если $f^i(v)$ дифференцируемы, выпуклы по v_i при фиксированных v_{-i} и удовлетворяют условию* (2.5)*, то последовательность $\{v^k\}$, построенная с помощью метода* (2.8)–(2.11)*, монотонно сходится к решению v^* задачи* (1.1).

Доказательство. С учетом свойства проекции преобразуем уравнения (2.8), (2.11) к виду

$$\langle \overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k \nabla f_i^i(v^k), w_i - \overline{u}_i^k \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, n, \tag{2.12}$$

и

$$\begin{aligned} 2\langle v_i^{k+1} - v_i^k + \delta^k \nabla f_i^i(\overline{u}^k), w_i - v_i^{k+1} \rangle = |w_i - v_i^k|^2 - |v_i^{k+1} - v_i^k|^2 - \\ - |w_i - v_i^{k+1}|^2 + 2\delta^k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), w_i - v_i^{k+1} \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Положим $w_i = v_i^{k+1}$ в (2.12), $w_i = v_i^*$ в (2.13) и сложим их вместе. Преобразуя полученное неравенство по формуле $-|a|^2 + 2\langle a, b \rangle \le |b|^2$, получим

$$\begin{aligned} &|v_i^{k+1} - v_i^*|^2 - |v_i^k - v_i^*|^2 - 2\delta^k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^* - \overline{u}_i^k \rangle \le \\ &\le -|v_i^{k+1} - v_i^k|^2 + 2\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} \langle \overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k(\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k)), v_i^{k+1} - \overline{u}_i^k \rangle \le \\ &\le \left(\frac{\delta^k}{\alpha_i^k}\right)^2 |\overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k(\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k))|^2 + 2\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} \langle \overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k(\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k)), v_i^k - \overline{u}_i^k \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуя правую часть полученного неравенства, с учетом (2.9) и (2.10) имеем

$$2\delta^k \langle \nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^k - \overline{u}_i^k \rangle \le (1 - \varepsilon)\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} |v^k - \overline{u}^k|^2$$

и

$$\left(\frac{\delta^k}{\alpha_i^k}\right)^2 |\overline{u}_i^k - v_i^k + \alpha_i^k(\nabla f_i^i(v^k) - \nabla f_i^i(\overline{u}^k))|^2 \le C(1 - \varepsilon)\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} |\overline{u}^k - v^k|^2.$$

Подставим эти соотношения в исходное неравенство. Учитывая $\Delta_1 \le \alpha_i^k \le \Delta_2$ $\forall k$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\begin{aligned} &|v_i^{k+1} - v_i^*|^2 - |v_i^k - v_i^*|^2 - 2\delta^k \langle \nabla f_i^i(\overline{u}^k), v_i^* - \overline{u}_i^k \rangle \le \\ &\le -2\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 + (1 - \varepsilon)(1 + C)\frac{\delta^k}{\alpha_i^k} |v^k - \overline{u}^k|^2 \le -2\frac{\delta^k}{\Delta_2} |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 + (1 - \varepsilon)(1 + C)\frac{\delta^k}{\Delta_1} |v^k - \overline{u}^k|^2. \end{aligned}$$

Просуммируем последнее неравенство по i от 1 до n. В силу выпуклости $f^i(v)$ по v_i

$$\begin{aligned} |v^{k+1} - v^*|^2 - |v^k - v^*|^2 - 2\delta^k \sum_{i=1}^n \left(f^i(v_i^*, \overline{u}_{-i}^k) - f^i(\overline{u}_i^k, \overline{u}_{-i}^k) \right) \le -2\sum_{i=1}^n \frac{\delta^k}{\Delta_2} |\overline{u}_i^k - v_i^k|^2 + \\ + (1 - \varepsilon)(1 + C)\sum_{i=1}^n \frac{\delta^k}{\Delta_1} |\overline{u}^k - v^k|^2 = -\delta^k |\overline{u}^k - v^k|^2 \left(\frac{2}{\Delta_2} - n(1 - \varepsilon)(1 + C)\frac{1}{\Delta_1} \right) \le 0, \end{aligned}$$

поскольку $\varepsilon \ge 1 - 2\Delta_1/(n(1 + C)\Delta_2)$ по условию. Применяя затем (2.5), окончательно получим

$$|v^{k+1} - v^*|^2 \le |v^k - v^*|^2.$$

Выделим из $\{v^k\}$ сходящуюся подпоследовательность $v^{k_j} \to v'$. Переходя к пределу по $k_j \to \infty$ в неравенстве (2.12), получим

$$\langle \nabla f_i^i(v'), w_i - v_i' \rangle \ge 0 \ \ \forall w_i \in V_i, \ \ i = 1, \ldots, n,$$

т. е. $v' \in V^*$. Поэтому последовательность $\{v^k\}$ сходится к единственной предельной точке v^* — решению задачи (1.1). $\square$

Подчеркнем, что оба рассмотренных метода являются модификациями соответствующих методов [4] и [3]. В то же время преимуществом этих методов по сравнению с [4] и [3] является то, что они позволяют учесть специфику задачи — игру n лиц и используют более простые условия выбора шага.

Исследуем теперь предложенные методы с точки зрения их применимости для решения конкретных задач — дуополии Курно [5] и биматричных игр с нулевой суммой.

3. Примеры задач

Дуополия Курно. В этой задаче участвуют две конкурирующие фирмы, производящие некоторый товар в объеме v_i и реализующие его на рынке по единой цене p. Цена формируется из соотношения $p(v) = \alpha - c(v_1 + v_2)$, а издержки каждой из фирм составляют $f^i(v) = (\gamma - p(v))v_i$, где γ — себестоимость единицы товара. Эту задачу можно сформулировать в терминах игры (1.1), т. е. найти $v^* = (v_1^*, v_2^*)$:

$$\begin{aligned} &v_1^*(v_1^* + v_2^* - u) \le v_1(v_1 + v_2^* - u) \quad \forall v_1 \in [0, u],\\ &v_2^*(v_1^* + v_2^* - u) \le v_2(v_1^* + v_2 - u) \quad \forall v_2 \in [0, u], \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $u = (\alpha - \gamma)/c$. Как известно [5], решением (3.1) является единственная точка $v^* = (u/3,\ u/3)$. Понятно, для того чтобы обосновать применимость предложенных методов к (3.1), достаточно доказать выполнимость условия (2.5), а это было установлено в [6]:

$$\begin{aligned} \Phi(v,v) - \Phi(v,v^*) = (v_1 + v_2)^2 - u(v_1 + v_2) - u/3(v_2 - 2u/3) - u/3(v_1 - 2u/3) = \\ = (v_1 + v_2 - 2u/3)^2 \ge 0 \quad \forall v_1, v_2 \in [0, u]. \end{aligned}$$

Биматричные игры с нулевой суммой. Биматричные игры характеризуются $m \times n$-матрицами A, B и функциями проигрыша игроков $f^1(v) = \langle Av_1, v_2\rangle$, $f^2(v) = \langle B^T v_1, v_2\rangle$, $0 \le v_1, v_2 \le 1$. В этой ситуации естественней перейти от использования условия (2.5) к его частному случаю — условию кососимметричности

$$\Phi(v,v) - \Phi(v,w) - \Phi(w,v) + \Phi(w,w) \ge 0 \quad \forall v, w \in V^0 = [0,1] \times [0,1]. \tag{3.2}$$

Легко проверить, что игра с нулевой суммой ($A + B^T = 0$) удовлетворяет (3.2). На самом деле, верно и обратное утверждение, т. е. игры с нулевой суммой являются единственным классом биматричных игр, для которых условие (3.2) выполняется. Действительно, поскольку свертка $\Phi(v,w) = \langle Aw_1, v_2\rangle + \langle B^T v_1, w_2\rangle$, то (3.2) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \Phi(v,v) - \Phi(v,w) - \Phi(w,v) + \Phi(w,w) = \langle (A + B^T)v_1, v_2\rangle + \langle (A + B^T)w_1, w_2\rangle - \\ - \langle (A + B^T)w_1, v_2\rangle - \langle (A + B^T)v_1, w_2\rangle = \langle (A + B^T)(v_1 - w_1), v_2 - w_2\rangle \ge 0 \quad \forall v, w \in V^0. \end{aligned}$$

Последнее неравенство верно для любых $v, w \in V^0$ только в том случае, когда матрица $A + B^T$ нулевая.

В терминах биматричной игры с нулевой суммой исходная задача (1.1) преобразуется к седловому виду, т. е. найти v^*:

$$\langle Av_1^*, v_2\rangle \le \langle Av_1^*, v_2^*\rangle \le \langle Av_1, v_2^*\rangle \quad \forall v_1, v_2 \in [0,1]. \tag{3.3}$$

Соответственно градиентный прогнозный метод представится в следующей форме.

Метод $1'$. На $(k+1)$-й итерации

I. вычисляем прогнозные точки

$$\overline{u}_1^k = \pi_{[0,1]}(v_1^k - \alpha^k A^T v_2^k), \quad \overline{u}_2^k = \pi_{[0,1]}(v_2^k + \alpha^k A v_1^k); \tag{3.4}$$

II. вычисляем новые приближения решения

$$v_1^{k+1} = \pi_{[0,1]}(v_1^k - \alpha^k A^T \overline{u}_2^k), \quad v_2^{k+1} = \pi_{[0,1]}(v_2^k + \alpha^k A \overline{u}_1^k). \tag{3.5}$$

Для приведенного метода справедлива

Теорема 3. *Если длина шага выбирается из условия* $\alpha^k \le \sqrt{1-\varepsilon}/|A|$, *то траектория* (v_1^k, v_2^k) *метода* (3.4)–(3.5) *монотонно сходится к решению* (v_1^*, v_2^*) *задачи* (3.3).

4. Численные результаты

Оба предложенных метода употребим для решения задачи дуополии (3.1) с параметром $u = 12$. Численные результаты работы методов приводятся в таблице.

Таблица 1

метод	число итер.	начальные точки	конечные точки	начальн. шаг α	конечн. шаг	значение градиента
1	7	3.0000 1.0000	4.0000 4.0000	2.0	$\alpha = 1.192$	0.000015
2	6	3.0000 1.0000	4.0000 4.0000	2.0	$\delta = 1.226$	0.0000176

Из данной таблицы можно сделать вывод, что метод 2, при котором каждый игрок оперирует собственной длиной шага, сходится к решению быстрее, чем метод 1.

Сравним результаты работы предложенных методов с известным ранее экстраградиентным (э. г.) методом. Так, в [4] э. г. метод употреблялся для решения задач минимизации, и в качестве тестовых использовались функции следующих типов:

1. квадратичная функция $\phi(v_1, v_2) = (v_1 - v_2)^2$,
2. функция Розенброка $\phi(v_1, v_2) = \alpha(v_2 - v_1^2)^2 + (1 - v_1)^2$, $\alpha = 10$,
3. вспомогательная функция $\phi(v_1, v_2, v_3) = 9v_1^2 + v_2^2 + 9v_3^2 + \exp(1-v_2) + \exp(1-v_1v_2) + \exp(v_3-1)$.

Ниже приведены результаты расчетов по э. г. методу [4], примененному для минимизации тестовых функций 1–3.

Таблица 2

задача	метод	начальн. точка	число итер.	значение функционала	точность
1	э. г.	$v_1 = 3,\ v_2 = 1$	20	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$\|f'\| \le 10^{-1}$
2	э. г.	$v_i = 0,\ i = 1,2$	93	0.00011	$\gg$
3	э. г.	$v_i = 2.5,\ i = 1,2,3$	111	12.8313	$\gg$

Пусть все функции проигрыша игроков равны между собой: $f^i(v) \equiv \phi(v)/3$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда задачу минимизации можно выразить и в терминах задачи поиска равновесия по Нэшу, т. е. найти $v^* : f^i(v_i^*, v_{-i}^*) \le f^i(v_i, v_{-i}^*)$, $i = 1, \ldots, n$. Применим теперь для решения этой задачи оба предложенных метода.

Таблица 3

задача	метод	начальн. точка	число итер.	начальн. шаг α
1	1	$v_1 = 3,\ v_2 = 1$	7	1
1	2	то же	15	2
2	1	$v_i = 0,\ i = 1,2$	75	1
2	2	то же	115	2
3	1	$v_i = 0,\ i = 1,2,3$	21	1
3	2	то же	24	2

задача	метод	конечн. шаг	$\phi(v)$	значение градиента
1	1	$\alpha = 0.267$	$1.1 \cdot 10^{-7}$	$7.02 \cdot 10^{-4}$
1	2	$\delta = 0.233$	$6.5 \cdot 10^{-6}$	$7.2 \cdot 10^{-3}$
2	1	$\alpha = 0,014$	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$6.61 \cdot 10^{-2}$
2	2	$\delta = 0.016$	$1.57 \cdot 10^{-4}$	$1.64 \cdot 10^{-2}$
3	1	$\alpha = 0.129$	4.822	$2.0 \cdot 10^{-6}$
3	2	$\delta = 0.16$	4.822	$4.04 \cdot 10^{-5}$

Как видно из таблиц 2 и 3, оба предложенных метода почти всегда сходятся быстрее (в 1.5–2 раза), чем э. г. метод. В то же время отметим, что метод 2 по сравнению с методом 1 сходится к решению более медленно. В данном случае это можно объяснить тем, что формируемая в конце каждой итерации комбинированная длина шага δ^k становится очень малой величиной по сравнению с собственной длиной шага α_i^k. Но все же метод 2 в отличие от метода 1 реализует дополнительную степень свободы игрока, и в этом состоит его преимущество.

В заключение автор благодарит А.С. Антипина за внимание и ценные замечания в процессе написания этой статьи.

Литература

1. Корпелевич Г.М. *Экстраградиентный метод для отыскания седловых точек и других задач* // Экономика и матем. методы. – 1976. – Т. XII. – № 4. – С. 747–756.
2. Антипин А.С. *Вычисление неподвижных точек экстремальных отображений с помощью методов градиентного типа* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1997. – Т. 37. – № 1. – С. 1–12.
3. Коннов И.В. *Комбинированные релаксационные методы для поиска точек равновесия и решения смежных задач* // Изв. вузов. Математика. – 1993. – № 2. – С. 46–53.
4. Хоботов Е.Н. *О модификации экстраградиентного метода для решения вариационных неравенств и некоторых задач оптимизации* // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1987. – Т. 27. – № 10. – С. 1462-1474.
5. Обен Ж.П. *Нелинейный анализ и его экономические приложения.* – М.: Мир, 1988. – 267 с.
6. Антипин А.С. *Равновесное программирование: методы градиентного типа* // Автоматика и телемеханика. – 1997. – № 8. – С. 166–178.

Вычислительный центр
Российской Академии наук

Поступила
16.03.1998