А. С. Денисов, Однородные O'-элементы в структурных предпорядках, *Алгебра и логика*, 1989, том 28, номер 6, 619–639

Алгебра и логика, 28, № 6(1989), 619-639

УДК 510.52

ОДНОРОДНЫЕ $0'$-ЭЛЕМЕНТЫ В СТРУКТУРНЫХ ПРЕДПОРЯДКАХ

А.С.ДЕНИСОВ

В данной статье устанавливается несколько результатов об алгоритмической сложности однородных моделей, точнее, о поведении однородных $0'$-элементов в структурных предпорядках разрешимых теорий. Определение структурного предпорядка таково: пусть T - некоторая теория эффективной сигнатуры, состоящей только из предикатных символов, тогда через $\mathfrak{M}_T$ обозначим множество всех счетных моделей T (изоморфные модели отождествляются), предупорядоченное отношением элементарной вложимости $\preccurlyeq$. Предпорядок $\mathfrak{M}_T$, в котором каждому элементу $\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}_T$ соотнесены: $d_1(\mathfrak{M})$ - степень слабой конструктивизируемости $\mathfrak{M}$, $d_2(\mathfrak{M})$ - степень сильной конструктивизируемости $\mathfrak{M}$, $n(\mathfrak{M})$ - число неавтоэквивалентных конструктивизаций $\mathfrak{M}$, каждому вложению $\mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$ соотнесена $d_3(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ -степень конструктивизируемости этого вложения - называется структурным предпорядком теории T и обозначается через $\mathfrak{M}_T^{(d_1, d_2, d_3, n)}$. В системе обозначений будем исходить из системы обозначений [1].

§ 1. Однородные модели разрешимых теорий, сильно конструктивные в $0'$

Разработка проблемы получения эффективной версии теоремы об элементарном однородном расширении [2] была начата в [5, 7]. Докажем оценку нижней границы сложности однородной модели разрешимой теории [8]. Используем новый прием, состоящий в том, что одновременно доказываются сразу две теоремы. В § 2 устанавливается неулучшаемость этой оценки.

ТЕОРЕМА 1. *Всякая разрешимая теория, имеющая простую модель, имеет простую модель, сильно конструктивную в* $0'$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякая разрешимая теория имеет однородную модель, сильно конструктивную в* O'.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\sigma = \{=, P_1^{n_1}, P_2^{n_2}, \ldots\}$ - эффективная сигнатура. Формулу Φ сигнатуры $\sigma \cup C \rightleftharpoons \sigma \cup \{c_0, c_1, \ldots\}$ назовем нормальной, если Φ уже приведена к пренексной форме, не содержит кванторов по фиктивным переменным, матрица Φ' формулы Φ имеет вид $\Phi_1 \cup \ldots$ $\ldots \cup \Phi_i$, где $\Phi_j \neq \Phi_k$ при $j \neq k$, и Φ_j имеет вид $\Phi_{j1} \& \ldots$ $\ldots \& \Phi_{jk_j}$ ($\Phi_{jk} \neq \Phi_{jl}$ при $k \neq l$ и Φ_{jk} есть атомная формула или ее отрицание). Зафиксируем L_0-эффективный список без повторений всех нормальных предложений сигнатуры $\sigma \cup C$.

Пусть $n \leq \omega$, $[C_n] \rightleftharpoons \{c_m\}_{m<n}$, $[x_n] \rightleftharpoons \{x_m\}_{m<n}$, $[P_n] \rightleftharpoons \{P_m\}_{m<n}$. Рассмотрим множество $\Phi^{(n)}$ формул L_0, все символы которых содержатся в множестве $[P_n] \cup [x_n] \cup [C_n]$ либо получены из таковых в результате навешивания кванторов $\exists$, $\forall$ на новые переменные из $[x_{2n}]$, подставленные вместо части констант.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $n \leq \omega$. Тогда n-диаграммой называется максимальное совместное подмножество $\Phi^{(n)}$, обозначаемое через Ψ, со следующим свойством: если $2m+1 < n$ и $\exists x \Phi(x)$ есть L_0-первое предложение из $\Psi \cap \Phi^{(2m+1)}$ такое, что $\Phi(c_i) \notin \Psi \cap \Phi^{(2m+1)}$ для всех $i < 2m+1$, то $\Phi(c_{2m+1}) \in \Psi$. Число n называется уровнем Ψ и обозначается через $\dim \Psi$; для $p \leq n$ обозначим $\Psi \restriction p \rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons \Psi \cap \Phi^{(p)}$.

Ввиду конечности $\Phi^{(n)}$ множество $\Psi^{(n)}$ всех n-диаграмм конечно при всех $n < \omega$. Ясно также, что частично упорядоченное множество $\mathcal{D} \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} \Psi^{(n)}$ образует дерево с конечными ветвлениями.

Зафиксируем произвольную разрешимую теорию T сигнатуры σ; в дальнейшем все n-диаграммы будем предполагать совместными с T; свойства $\mathcal{D}$ от этого не изменятся; кроме того, теперь оно будет рекурсивным.

Пусть L_1 - эффективный список элементов $\mathcal{D}$, составленный по правилу "слева направо и снизу вверх".

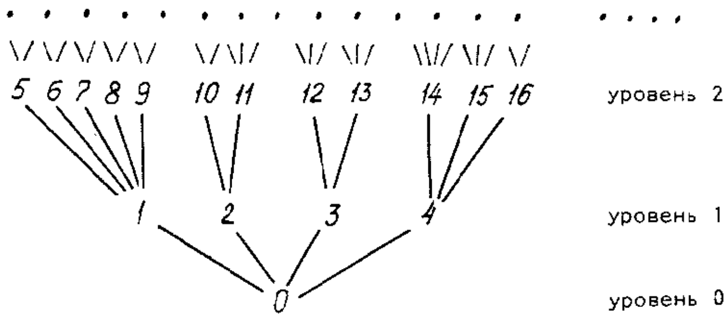

Диаграмма 1

Пусть L_2 - эффективный список всех кортежей вида $\bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c$, составленных из элементов $[C_{\omega}]$ и таких, что $lh\,\bar{a} = lh\,\bar{b}$, причем кортежи над $[C_n]$ образуют начальный сегмент L_2 для каждого $n<\omega$. Обозначим n-й элемент L_2 через $L_2(n)$.

Пусть $n \le \omega$, $\psi \in \Psi^{(n)}$, $\bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c$ - кортеж из L_2 над $[C_n]$. Если для всякой формулы $\Phi(\bar{x})$ сигнатуры σ имеет место $\Phi(\bar{a}) \in \psi \Leftrightarrow \Phi(\bar{b}) \in \psi$, то кортеж $\bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c$ называется претендентом (или просто $\bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c_{\psi}$ -претендентом). Кортеж $\bar{d} = \bar{a}'^\cup \bar{b}'^\cup c' \in L_2$ расширяет кортеж $d = \bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c \in L_2$, если $\bar{a}' = \bar{a}^\cup c$, $\bar{b}' = \bar{b}^\cup c_m$ для некоторого $c_m \in [C_\omega]$, $c' = c_0$.

Если $\psi \in \Psi^{(n)}$ и $m \le n$, то $\psi \upharpoonright [C_m] \rightleftharpoons \{\Phi \in \psi \mid \Phi$ не содержит констант из $[C_\omega] \setminus [C_m]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем ω-диаграмму ψ специальной, если

1) для всякого $m<\omega$ существует $n \ge m$ такой, что если $\psi^0, \psi^1 \in \mathcal{D}$, $\dim \psi^0 = \dim \psi^1$, $\psi^0, \psi^1 \supseteq \psi \upharpoonright n$, то $\psi^0 \upharpoonright [C_m] = \psi^1 \upharpoonright [C_m]$;

2) для всякого ψ-претендента существует ψ-претендент, его расширяющий.

Понятно, что речь идет о простой и однородной ω-диаграммах соответственно.

В возрастающей последовательности конечной длины $(\psi_m)_{m<n}$ элементов $\mathcal{D}$ четных уровней, $\dim \psi_m = p_m$. для $d_m = \bar{a}^\cup \bar{b}^\cup c \rightleftharpoons L_2(m)$ положим $\bar{d}_m \rightleftharpoons (\bar{a}^\cup c)^\cup (\bar{b}^\cup c_{p_m})^\cup c_0$, $m<n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Последовательность $(\psi_m)_{m\le n+1}$ ($\rho_m \rightleftharpoons \dim\psi_m$ для $m\le n+1$) называется настоящей, если она возрастающая ($\psi_0\subset\psi_1\subset\psi_2\subset \subset\ldots\subset\psi_n\subset\psi_{n+1}$), $\psi_0=\phi$, последовательность $(\psi_m)_{m\le n}$ настоящая и $\psi_{n+1}\supset\psi_n$ – L_1-первая диаграмма со свойством:

1) если $\psi^0, \psi^1\in\mathcal{D}$, $\psi^0, \psi^1\supseteq\psi_{n+1}$, $\dim\psi^0=\dim\psi^1$, то $\psi^0\restriction[c_{\rho_n}]=\psi^1\restriction[c_{\rho_n}]$;

2) ρ_m четно для всех $m\le n+1$, для каждого $s\ge\rho_{n+1}$ существует $\psi\supseteq\psi_{n+1}$, $\psi\in\psi^{(s)}$ такая, что для каждого $m\le n$ либо $(d_m)_\psi$ не претендент, либо $(\overline{d_m})_\psi$ - претендент.

Последовательность, состоящую из элемента ϕ, также будем считать настоящей.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существуют настоящие последовательности любой длины.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что последовательность $\psi_0\subset\psi_1\subset\ldots \ldots\subset\psi_n$ настоящая. Тогда

1) так как T имеет простую модель, то T атомная [2] и существование нужной ψ_{n+1} очевидно по определению настоящей последовательности;

2) так как $\mathcal{D}$ - дерево с конечными ветвлениями, то по индукционному предположению существует $\psi\supseteq\psi_n$, $\dim\psi=\omega$ такая, что для каждого $m<n$ либо $(d_m)_\psi$ не претендент, либо $(\overline{d}_m)_\psi$ - претендент.

Рассмотрим $\mathfrak{N}$ -однородное расширение модели $\mathfrak{M}$ сигнатуры σ, построенной по ψ каноническим образом (оно существует в силу классической теоремы [2]). Проследим за значениями констант c_m, $m<\rho_n$, в моделях $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Легко построить обогащение $\mathfrak{N}$ до сигнатуры $\sigma\cup[c_{\rho_n}]$. Если теперь d_m есть претендент в $(\mathfrak{N},[c_{\rho_n}])$, то определим значение c_{ρ_n} в $\mathfrak{N}$ так, чтобы $\overline{d}_m$ стал претендентом в $(\mathfrak{N},[c_{\rho_n+1}])$. После этого нетрудно достроить обогащение $\mathfrak{N}$ до сигнатуры $\sigma\cup C$ с тем, чтобы получить ω-диаграмму $\overline{\psi}\supset\psi_n$.

Возвращаясь теперь к определению настоящей последовательности и пользуясь s-диаграммами $\overline{\psi}\restriction s$, легко определить ψ_{n+1}.

Предложение доказано.

Ясно, что предел настоящих последовательностей $(\psi_m)_{m\le n}$ по $n<\omega$, $\psi=\bigcup\limits_{n<\omega}\psi_n$ есть специальная ω-диаграмма. Чтобы вычислить ее T -

степень, достаточно установить сложность множества

$$\{(\psi_m)_{m\leq n} \mid \text{последовательность } (\psi_m) \text{ настоящая}\}_{n<\omega} \quad .$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. $A \rightleftharpoons \{(\psi_m)_{m\leq n} \mid$ последовательность (ψ_m) настоящая $\} \in \Delta_2^0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО получается на основе предложения 1 с применением алгоритма Тарского-Куратовского:

I. $(\psi_m)_{m\leq n+1} \in A \Leftrightarrow \psi_0 \subset \psi_1 \subset \ldots \subset \psi_{n+1}$ &

$\quad$ & $\psi_0 = \emptyset$ & $(\psi_m)_{m\leq n} \in A$ & $(\forall s \geq \rho_{n+1}) \times$

$\quad \times [\psi^0, \psi^1 \in \mathcal{D}$ & $\psi^0 \supseteq \psi_{n+1}$ & $\psi^1 \supseteq \psi_{n+1}$ &

$\quad$ & $\dim\psi^0 = \dim\psi^1 = s \to \psi^0 \restriction [c_{\rho_n}] = \psi^1 \restriction [c_{\rho_n}]]$ &

$\quad$ & $[\psi \preccurlyeq_{L_1} \psi_{n+1},\ \psi \neq \psi_{n+1},\ \dim\psi = \rho_{n+1} \to \exists s \geq \rho_{n+1}$

$\quad$ (для некоторых $\psi^0, \psi^1 \in \mathcal{D},\ \psi^0 \supseteq \psi,\ \psi^1 \supseteq \psi,\ \dim\psi^0 = \dim\psi^1 =$

$\quad = s$ имеет место $\quad \psi^0 \restriction [c_{\rho_n}] \neq \psi^1 \restriction [c_{\rho_n}]] \Leftrightarrow$

$\quad \Leftrightarrow (\psi_m)_{m\leq n} \in A$ & $\forall$ & $\exists \Leftrightarrow \forall\exists \Leftrightarrow \exists\forall$.

II. $(\psi_m)_{m\leq n+1} \in A \Leftrightarrow \psi_0 \subset \psi_1 \subset \psi_2 \subset \ldots \subset \psi_n \subset \psi_{n+1}$ &

$\quad$ & $\psi_0 = \emptyset$ & $(\psi_m)_{m\leq n} \in A$ &

$\quad$ (ρ_m четно для всех $m \leq n+1$) & $(\forall s \geq \rho_{n+1})$ (для некоторой $\psi \supseteq \psi_{n+1}$, $\psi \in \psi^{(s)}$ $(d_m)_\psi$ не претендент или $(\bar{d}_m)_\psi$ - претендент)] & $[\psi \preccurlyeq_{L_1} \psi_{n+1},\ \psi \neq \psi_{n+1}$,

$\quad \dim\psi = \rho_{n+1} \to \exists s \geq \rho_{n+1}$ (для любой

$\quad \psi \supseteq \psi_{n+1}$, $\psi \in \psi^{(s)}$ $(d_m)_\psi$ -претендент и $\overline{(d_m)_\psi}$ не претендент)] $\Leftrightarrow (\psi_m)_{m\leq n} \in A$ & $\forall$ & $\exists \Leftrightarrow \forall\exists \Leftrightarrow \exists\forall$.

Итак, $A \in \Sigma_2^0 \cap \Pi_2^0$, т.е. $A \in \Delta_2^0$.

Предложение доказано.

Следовательно, если ψ - специальная ω -диаграмма, то $\psi \in \Delta_2^0$ и $\psi \leq_T 0'$. Теоремы доказаны.

Рассмотрим теперь, что дает данное доказательство в свете $\mathfrak{M}_T^{(d_1, d_2, d_3, n)}$. Если d - T-степень, а $\mathfrak{M} \in \mathfrak{M}_T$, то $\mathfrak{M}$ называется d-элементом, если существует $\nu \in H(\mathfrak{M})$ такая, что $deg_T(Th(\mathfrak{M}, \nu)) \leq_T d$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если T - разрешимая теория, то в $\mathfrak{M}_T^{(d_2)}$ имеется однородный $0'$-элемент.*

Будем говорить, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \text{Одн} & \uparrow & d \\ & | & \\ & |0 & \\ & | & \\ \mathfrak{M} & \downarrow & 0 \end{array}$$

Диаграмма 2

пополняется указанным образом, если для 0-элемента $\mathfrak{M}$ и T-степени d существует $\nu \in H(\mathfrak{M})$ со свойством $deg_T(Th(\mathfrak{M}, \nu)) = 0$ такая, что существуют однородный d-элемент $\mathfrak{N} \succ \mathfrak{M}$, вложение $g : \mathfrak{M} \preccurlyeq \mathfrak{N}$, $\mu \in H(\mathfrak{N})$, f - общерекурсивная со свойствами:

$$deg_T(Th(\mathfrak{N}, \mu)) \leq d, \quad g\nu = \mu f.$$

Зафиксируем некоторый 0-элемент $\mathfrak{M} = \langle B, \sigma \rangle$, $\nu \in H(\mathfrak{M})$ со свойством $deg_T(Th(\mathfrak{M}, \nu)) = 0$. Будем считать, что элементы $b_0, b_1, \ldots$, образующие B , введены в сигнатуру по правилу $\nu n = b_n$, $n < \omega$.

Деформируем понятие n-диаграммы следующим образом. Через L_0 будем обозначать список всех нормальных предложений сигнатуры $\sigma \cup B \cup C$; в множестве $\Phi^{(n)}$ $(n \leq \omega)$ допустим появление формул L_0 , содержащих символы из $[b_n] \rightleftharpoons \{b_m\}_{m<n}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $n \leq \omega$. Назовем n-диаграммой максимальное подмножество $\Phi^{(n)}$, совместное с $Th(\mathfrak{M}, \nu)$, обозначаемое через ψ , со следующими свойствами:

1) если $4m+1<n$, то $b_m=c_{4m+1}\in\psi$;

2) если $4m+3<n$ и $\exists x\Phi(x)$ есть L_0-первое предложение $\psi\restriction(4m+3)$ со свойством $\Phi(c_i)\notin\psi\restriction(4m+3)$ для всех $i<4m+3$, то $\Phi(c_{4m+3})\in\psi$.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Для каждого 0-элемента $\mathfrak{M}$ диаграмма 2 пополняется указанным образом.*

Релятивизация доказательства в T-степени d дает

СЛЕДСТВИЕ 3. *Для всякого d-элемента $\mathfrak{M}$ диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{одн} & \uparrow & d' \\ & \vdots & 0 \\ \mathfrak{M} & \downarrow & d \end{array}$$

Диаграмма 3

пополняется указанным образом.

СЛЕДСТВИЕ 5. *Если S – вычислимое семейство неглавных типов разрешимой теории T, то существует однородный $0'$-элемент $\mathfrak{M}\in\mathfrak{M}_T$, опускающий все типы из S.*

§ 2. Точность оценки § 1

В связи с теоремой 2, естественно, возникает следующий вопрос: поскольку существует счетное число T-степеней $d<0'$, то возможно ли, что для какой-то из них диаграмма 2 всегда пополняется указанным образом?

Отрицательный ответ на него дает

ТЕОРЕМА 3. *Для каждого множества $X<_T\emptyset'$ существует разрешимая теория T такая, что если $(\mathfrak{M},\nu)$ – нумерованная однородная модель T, то $Th(\mathfrak{M},\nu)\nleqslant_T X$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $X<_T\emptyset'$. Будем доказывать следующее утверждение: для множества X существует разрешимая такая теория T сигнатуры $\sigma=\sigma_{gg}\cup\{f^1,Q^2\}=\{=,f^1,Q^2,P_0^1,P_1^1,\ldots\}$, содержащей один одноместный функциональный, один двуместный предикатный, счетное число одноместных предикатных символов, а также символ равенства, что если $(\mathfrak{M},\nu)$ - однозначно нумерованная однородная модель T, то $Th(\mathfrak{M},\nu)\not\leq_T X$.

Так как $X <_T \emptyset'$, то для множества X существует [3, 10] эффективная последовательность $(X_n)_{n<\omega}$ конечных множеств такая, что $x\in X \Leftrightarrow \exists m\, \forall n \geq m\, (x\in X_n)$ и $x\notin X \Leftrightarrow \exists m\, \forall n\geq m,\ x\notin X_n$.
В дальнейшем будем писать: $X = \lim X_n$. Переформулируем теперь доказываемую теорему в следующем виде (рабочая формулировка): построить вычислимое двойное дерево V такое, что если ψ - ω-диаграмма, $\psi \models T_V$, $\psi \leq_T X$, то ψ неоднородна.

Перейдем к определениям.

Если Φ - формула, то обозначим $\Phi^0 \rightleftharpoons \neg\Phi$, $\Phi^1 \rightleftharpoons \Phi$. Пусть $n\leq\omega$, $\Phi^{(n)} \rightleftharpoons \{(c_i=c_j)^{\varepsilon_1}, (fc_i=c_j)^{\varepsilon_2}, Q^{\varepsilon_3}(c_i,c_j), P_i^{\varepsilon_4}(c_j) \mid i,j<n,\ \varepsilon_s\in\{0,1\}\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем n-диаграммой максимальное непротиворечие подмножество $\psi \subseteq \Phi^{(n)}$, содержащее $\{c_i \neq c_j \mid i<j<n\}$.

Ясно, что всякая n-диаграмма, если она замкнута относительно функции f (т.е. $\forall i\, \exists j\ (fc_i = c_j \in \psi)$), определяет (при $n=\omega$ однозначно нумерованную) модель. Истинность на n-диаграммах определяется поэтому естественным образом. Однородность ω-диаграммы определяется, как в § 1, и в случае элиминации кванторов совпадает с обычным понятием однородности.

Определим теперь понятие двойного дерева. Пусть $\mathcal{D}$ - полное бинарное дерево, задаваемое диаграммой:

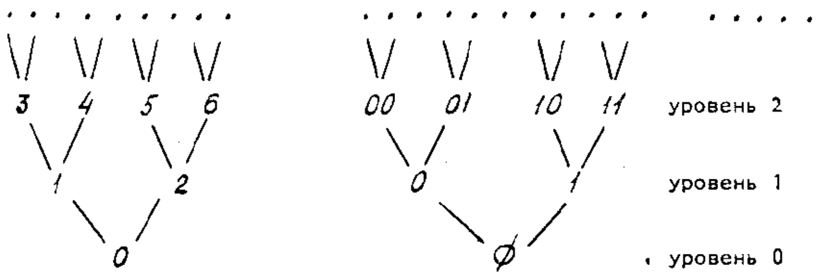

Диаграмма 4

так, что для всех $u_0, u_1 \in \mathcal{Q}$ ($u_0 < u_1 \Longleftrightarrow u_0$ ниже u_1). Множество $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{Q}$ называется деревом, если, во-первых, $u_0 \in \mathcal{Q}$, $u_1 \in \mathcal{D}$, $u_0 \leqslant u_1$ влечет $u_0 \in \mathcal{D}$, и, во-вторых, $u_0 \in \mathcal{D}$ влечет существование $u_1 \geqslant u_0$ такого, что $u_1 \in \mathcal{D}, u_1' \in \mathcal{D}$. Здесь для $u \in \mathcal{Q}$ через u' обозначается сосед $u \in \mathcal{Q}$; кроме того, через $Lu\ (Ru)$ обозначается непосредственный последователь $u \in \mathcal{Q}$, находящийся слева (справа), например, $4' = 3$, $2' = 1$, $L2 = 5$, $R2 = 6$. Для $u \in \mathcal{Q}$, $k < \omega$ $L^0 u = R^0 u \rightleftharpoons u$, $L^{k+1} u \rightleftharpoons L(L^k u)$, $R^{k+1} u \rightleftharpoons R(R^k u)$. Деревья обозначаются через $\mathcal{D}$, их элементы, или вершины, - через u, w. Некоторые элементы $\mathcal{Q}$ играют выделенную роль. Это $hm \rightleftharpoons 2^m$, $g_0 m \rightleftharpoons Lhm$, $g_1 m \rightleftharpoons Rhm$. Цепью в $\mathcal{D}$ называется линейно-упорядоченное подмножество $\mathcal{D}$, не содержащееся собственно ни в каком другом таком подмножестве. Цепи обозначаются через Γ. Уровень αu вершины $u \in \mathcal{Q}$ определяется из диаграммы 4.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Двойным деревом называется множество $V \subseteq \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$, для которого существует последовательность конечных множеств $V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots$ такая, что $V_0 = \emptyset$, $\bigcup_{n<\omega} V_n = V$; для всех $n < \omega$ выполняются условия:

1) если $(u, w) \in V_n$, то $g_0 m < u$, $g_1 m \prec w$ для некоторого m;

2) либо $V_{n+1} = V_n$, либо существует пара $(u, w) \in V_{n+1}$ такая, что $V_{n+1} = V_n \cup \{(u, w), (u', w), (u, w'), (u', w')\}$, $\alpha(u, w) = \alpha u = \alpha w = n+1$, причем если $(u_0, w_0) \in V_n$ таков, что $u_0 < u$, $w_0 \prec w$, и не существует $(u_1, w_1) \in V_n$ такого, что $u_0 \prec u_1$, $w_0 \prec w_1$, то $u = L^k R u_0$, $w = L^k R w_0$ для некоторого $0 < k < \omega$. Частичный порядок на двойном дереве определяется естественным образом:

$$(u_0, w_0) \prec (u_1, w_1) \Longleftrightarrow u_0 \prec u_1,\ w_0 \prec w_1 .$$

Максимальные и минимальные элементы, - непосредственные предшественники и последователи в этом частичном порядке - определяются стандартно. Так, в п. 2 мы могли сказать, что (u_0, w_0) - максимальный элемент V_n. Двойное дерево V называется вычислимым, если последовательность $(V_n)_{n<\omega}$ эффективна. Отметим, что для каждого двойного дерева V множество $\mathcal{D}(V) \rightleftharpoons \{u \in \mathcal{Q} \mid \exists u_1 \geqslant u$ (u_1 входит в некоторый элемент V) $\}$ является деревом.

Пусть V - вычислимое двойное дерево. Определим по нему некоторую теорию T_V сигнатуры σ .

ПОСТРОЕНИЕ T_V . Обозначим $\Phi^0 \rightleftharpoons \neg\Phi$, $\Phi^1 \rightleftharpoons \Phi$ для любой формулы, а также $P^u(x) \rightleftharpoons P_0^{\varepsilon_0}(x) \& \ldots \& P_k^{\varepsilon_k}(x)$ для вершины $u \in \mathcal{Q}$, являющейся, согласно диаграмме 4, кодом кортежа $\varepsilon_0 \ldots \varepsilon_k \in \{0,1\}^{<\omega}$.

Рассмотрим аксиоматику:

$$\forall xyz\,[Q(x,x) \& (Q(x,y) \to Q(y,x)) \& (Q(x,y) \& Q(y,z) \to Q(x,z))];$$

$$\forall xy\,[P^{hm}(x) \& Q(x,y) \to P^{hm}(y)],\quad m<\omega;$$

$$\forall x\,[P^{g_0 m}(x) \to \exists y\,(P^{g_1 m}(y) \& Q(x,y))],\quad m<\omega;$$

$$\forall x\,[P^{g_1 m}(x) \to \exists y\,(P^{g_0 m}(y) \& Q(x,y))],\quad m<\omega;$$

$$\neg(\exists xyz\,[P^{hm}(x) \& P^{hm}(y) \& P^{hm}(z) \&$$

$$\& \neg Q(x,y) \& \neg Q(y,z) \& \neg Q(x,z)]),\quad m<\omega.$$

Обозначим теорию, заданную этими аксиомами, через T_0 . Присоединим к ним следующие предложения:

$$\exists x P^{hm}(x),\quad m<\omega;$$

$$\forall xy\,[x \neq fx \& Q(x,fx) \& (x \neq y \to fx \neq fy) \& ffx = x];$$

$$\forall x\,[P^{g_0 m}(x) \to P^{g_1 m}(fx)],\quad m<\omega;$$

$$\exists x\,[P^u(x) \& P^w(fx)] \to \exists x_1 \ldots x_n\,[(\mathop{\&}_{i \neq j} x_i \neq x_j) \&$$

$$\& \left(\underset{i,j}{\&} Q(x_i, x_j) \right) \& \left(\underset{i}{\&} (P^u(x_i) \& P^w(fx_i)) \right) \Big], \; n < \omega, u, w \in 2 \; ;$$

$$\exists x \left[P^u(x) \& P^w(fx) \right] \to \exists xy \left[P^u(x) \& P^w(fx) \& P^u(y) \& \right.$$

$$\left. \& P^w(fy) \& \neg Q(x,y) \right], \; u, w \in 2 \, .$$

Обозначим теорию, заданную этими аксиомами, через T_1 . Тогда теория T_V получается из T_1 добавлением аксиоматики

$$\exists x \left[P^u(x) \& P^w(fx) \right], \; (u,w) \in V \, ;$$

$$\forall x \left[P^u(x) \& P^w(fx) \to P^{L^k Ru}(x) \& P^{L^k Rw}(fx) \right],$$

причем последняя аксиома добавляется в двух случаях: если (u, w) – максимальный элемент V и $k < \omega$ либо если (u_1, w_1) – непосредственный последователь (u, w) в V и k таково, что $(u, w) \prec \prec (L^k Ru, L^k Rw) \prec (u_1, w_1)$.

Так как каждое из обеднений T_V на сигнатуры $\{=, f, Q, P_i\}_{i<n}$ ω-категорично, $n < \omega$, то этим доказано

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если* V *– вычислимое двойное дерево, то теория* T_V *полна, разрешима и допускает элиминацию кванторов.*

Обозначим через T_2 теорию, аксиомы которой получаются из аксиом T_0 добавлением предложений

$$\exists x P^u(x) \to \exists xy \left[P^u(x) \& P^u(y) \& \neg Q(x,y) \right], \; u \in 2 \, ;$$

$$\exists x P^u(x) \to \exists x_1 \ldots x_n \left[\left(\underset{i \neq j}{\&} x_i \neq x_j \right) \& \right.$$

$$\left. \& \left(\underset{i,j}{\&} Q(x_i, x_j) \right) \& \left(\underset{i}{\&} P^u(x_i) \right) \right], \; u \in 2 \, , \; n < \omega \, .$$

Обозначим через T_3 теорию, аксиоматика которой получается из аксиоматики T_0 устранением аксиом

$$\neg(\exists xyz[P^{hm}(x)\,\&\,P^{hm}(y)\,\&\,P^{hm}(z)\,\&$$

$$\&\neg Q(x,y)\,\&\neg Q(y,z)\,\&\neg Q(x,z)]),\quad m<\omega,$$

и добавлением аксиом

$$\exists xP^{u}(x)\longrightarrow\exists x_1\ldots x_n[(\underset{i\neq j}{\&}\,x_i\neq x_j)\,\&\,(\underset{i,j}{\&}\,Q(x_i,x_j))\,\&\,(\underset{i}{\&}P^{u}(x_i))],\ u\in 2,\ n<\omega.$$

Очевидно, что $T_1\vdash T_2$, $T_1\vdash T_3$.

Пусть T есть полное расширение T_2 в сигнатуре $\sigma\setminus\{f\}$, допускающее элиминацию кванторов, $\mathcal{D}'(T)\rightleftharpoons\{u\in 2\mid T\vdash\exists xP^{u}(x)\}$, $\mathcal{D}(T)$ есть максимальное дерево, содержащееся в $\mathcal{D}'(T)$. Предположим, что T удовлетворяет такому условию: для каждого $m<\omega$ либо не существует бесконечной цепи в $\mathcal{D}(T)$, проходящей через hm, либо таких цепей ровно две: σ_0 и σ_1.

Опишем все однородные ω-диаграммы T. Пусть ψ-произвольная ω-диаграмма теории T. Определим некоторую последовательность $(\lambda_m)_{m<\omega}$, называемую типом однородности ψ. Если $m<\omega$ удовлетворяет первой альтернативе, то положим $\lambda_m\rightleftharpoons 0$, в противном случае положим $\lambda_m\rightleftharpoons\langle n_{p0},n_{q0},n_{q1},n_{p1}\rangle$, где кардиналы n_{pi}, $n_{qi}\leqslant\omega$ определяются так: для $p(x)\rightleftharpoons\{P^{u}(x)\mid u\in\sigma_0\}$, $q(x)\rightleftharpoons$ $\rightleftharpoons\{P^{w}(x)\mid w\in\sigma_1\}$, некоторого c_k со свойством $\psi\models P^{hm}(c_k)$ полагаем:

$$n_{p(1-i)}\rightleftharpoons|\{c_s\mid\psi\models p(c_s)\,\&\,Q^{i}(c_k,c_s)\}|,\quad i\in\{0,1\},$$

$$n_{q(1-i)}\rightleftharpoons|\{c_s\mid\psi\models q(c_s)\,\&\,Q^{i}(c_k,c_s)\}|,\quad i\in\{0,1\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если T - полное расширение теории T_2 описанного вида и $\psi\models T$, то ψ однородна $\Longleftrightarrow\forall m\,[\lambda_m=0$ или $n_{p0}=$ $=n_{p1}\,\&\,n_{q0}=n_{q1}]$.*

Доказательство очевидно.

В дальнейшем тип однородности λ_m будет вычисляться относительно c_k, однозначно определенной следующим образом. Для n-диаграммы $\psi \models T_3$ положим $A(\psi) \rightleftharpoons \{<c_k, c_\ell, u> \mid \psi \models P^{Lu}(c_k) \& P^{Ru}(c_\ell) \& \& P(c_k, c_\ell), hm \leqslant u$ для некоторого $m < \omega$, не существует $<k_0, \ell_0> <^o <k, \ell>$ такого, что $\psi \models P^{Lu}(c_{k_0}) \& P^{Ru}(c_{\ell_0}) \& Q(c_{k_0}, c_{\ell_0})$ и при этом $\psi \models Q(c_k, c_{k_0})\}$. Здесь линейный порядок $<^o$ на ω^2 определяется так: $<k_0, \ell_0> <^o <k, \ell> \Longleftrightarrow max(k_0, \ell_0) < max(k, \ell)$ или $max(k_0, \ell_0) = max(k, \ell)$ и $min(k_0, \ell_0) < min(k, \ell)$. λ_m теперь вычисляется так: находим наименьшую $<k, \ell>$ в порядке $<^o$ такую, что существует $u \geqslant hm$ со свойством $<c_k, c_\ell, u> \in A(\psi)$. λ_m вычисляется относительно этой c_k.

Обратимся теперь к анализу выражения $\psi \leqslant_T X$. Результатом его станет построение эффективного списка $\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \ldots$ всех ч.р.ф. специального вида. Впоследствии двойное дерево V, которое докажет теорему 3, будет построено по этому списку.

Введем эффективную кодировку множества $S = \Phi^{(\omega)} \rightleftharpoons \{(c_i = c_j)^{\varepsilon_1}, Q^{\varepsilon_2}(c_i, c_j), P_i^{\varepsilon_3}(c_j), (fc_i = c_j)^{\varepsilon_4} \mid i, j < \omega, \varepsilon_s \in \{0, 1\}\}$. По свойствам T-сводимости [3] существует эффективная двойная последовательность $\{S_{n,m} \mid n, m < \omega\}$ конечных подмножеств S такая, что

1) для каждого $m < \omega$ существует $\lim_n S_{nm}$;

2) для каждого $S_0 \subseteq S$, если $S_0 \overset{n}{\leqslant}_T X$, то существует $m < \omega$ такое, что $\lim_n S_{nm} = S_0$.

Для множества $S_0 \subseteq S$ через $\psi(S_0)$ обозначим максимальную n-диаграмму, совместную с T_3, содержащуюся в S_0. Пусть $\psi_{nm} \rightleftharpoons \psi(S_{nm})$, $A_{nm} \rightleftharpoons A(\psi_{nm})$. Растянем последовательность (A_{nm}) так, чтобы она обладала свойством $|A_{nm} \nabla A_{n+1m}| \leqslant 1 (n, m < \omega$; $A \nabla B \rightleftharpoons (A \setminus B) \cup (B \setminus A))$.

Равномерно по m по всякой последовательности A_{nm} эффективно строятся некоторые частичные функции: двуместная φ_m и одноместная i_m. Неформально функция φ_m вычисляет семейства бескванторных 1-типов, реализующихся в Q-компонентах $\psi_m \rightleftharpoons \lim_n \psi_{nm}$, а i_m указывает для каждого 1-типа номер Q-компоненты, в которой он реализуется. (Читатель без труда составит более точную формулировку этой фразы, дочитав конструкцию.) До окончания конструкции индекс m будем опускать. Для множества A вида A_n положим $C(A) \rightleftharpoons \{c_k \mid c_k$ входит в некоторый элемент $A\}$.

На каждом шаге n конструкции φ, i будут построены их приближения φ^n, i^n так, что $\forall x < \omega\ \forall y \leqslant n$ [существует эффективная процедура, вычисляющая $\varphi^n(x,y)$, либо устанавливающая, что $\varphi^n(x,y)$ не определено: $\varphi^n(x,y) = H$].

Конструкция специальной функции

ШАГ 0. $\varphi^0(x,0) = i^0(x) \rightleftharpoons H\ (x < \omega)$.

ШАГ $n+1$. Полагаем $\varphi^{n+1}(x,y) \rightleftharpoons \varphi^n(x,y)\ (x<\omega,\ y \leqslant n)$.

Если $A_{n+1} = A_n$, то $\varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(x,n), i^{n+1}(x) \rightleftharpoons i^n(x)\ (x<\omega)$.

Пусть предыдущее не имеет места и $A_{n+1} = A_n \setminus \{<c_k, c_\ell, u>\}$.

СЛУЧАЙ 1. $c_k \notin C(A_{n+1})$, $c_\ell \notin C(A_{n+1})$. Полагаем $\varphi^{n+1}(k,n+1) = \varphi^{n+1}(\ell,n+1) = i^{n+1}(k) = i^{n+1}(\ell) \rightleftharpoons H$, $\varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(x,n)$, $i^{n+1}(x) \rightleftharpoons i^n(x)\ (x \neq k, \ell)$.

СЛУЧАЙ 2. $c_k \notin C(A_{n+1})$, $c_\ell \in C(A_{n+1})$. Полагаем $\varphi^{n+1}(k,n+1) = i^{n+1}(k) \rightleftharpoons H$, $i^{n+1}(x) \rightleftharpoons i^n(x)\ (x \neq k)$. Находим $\bar{u}$ наибольшего уровня такую, что $<c_\ell, c_p, \bar{u}> \in A_{n+1}$ или $<c_p, c_\ell, \bar{u}> \in A_{n+1}$ (пусть для определенности имеет место первое). По свойствам (A_{mn}), $u \prec \bar{u}$ или $\bar{u} \prec u$. Если $u \prec \bar{u}$, то $\varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^n(x,n)\ (x \neq k)$. Если $\bar{u} \prec u$, то $\varphi^{n+1}(\ell,n+1) \rightleftharpoons Lu$, $\varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(x,n)\ (x \neq k,\ell)$.

СЛУЧАЙ 3. $c_k \in C(A_{n+1})$, $c_\ell \notin C(A_{n+1})$. Действуем аналогично случаю 2.

СЛУЧАЙ 4. $c_k \in C(A_{n+1})$, $c_\ell \in C(A_{n+1})$. Невозможен по свойствам (A_{nm}).

Пусть предыдущее не имеет места и $A_{n+1} = A_n \cup \{<c_k, c_\ell, u>\}$.

СЛУЧАЙ 1. $c_k \notin C(A_n)$, $c_\ell \notin C(A_n)$. Найдем m такое, что $hm \leqslant u$. Если $c_{\tilde{k}}$ не входит ни в какой элемент A_n вместе с вершиной $\tilde{u} \geqslant hm$, то полагаем $i^{n+1}(\tilde{k}) \rightleftharpoons i^n(\tilde{k})$. Определим теперь $i^{n+1}(\tilde{k})$ для $<c_{\tilde{k}}, c_{\tilde{\ell}}, \tilde{u}> \in A_{n+1}$, $hm \leqslant \tilde{u}$. Пусть X - максимальное подмножество A_n

такое, что если $\langle c_{\bar{k}}, c_{\bar{\ell}}, \bar{u}\rangle$, $\langle c_{\bar{\bar{k}}}, c_{\bar{\bar{\ell}}}, \bar{\bar{u}}\rangle$ - разные элементы X, то $\bar{u} \geq hm$, $\langle k,\ell\rangle <_0 \langle \tilde{k}, \tilde{\ell}\rangle$ и не существует последовательности $\{\langle c_{k_i}, c_{\ell_i}, u_i\rangle \mid 0 \leq i \leq p\} \subseteq A_n$ со свойствами $\langle c_{k_0}, c_{\ell_0}, u_0\rangle = \langle c_{\bar{k}}, c_{\bar{\ell}}, \bar{u}\rangle$, $\langle c_{k_p}, c_{\ell_p}, u_p\rangle = \langle c_{\bar{\bar{k}}}, c_{\bar{\bar{\ell}}}, \bar{\bar{u}}\rangle$, $u_i \geq hm$ $(0 \leq i \leq p)$ и $\{c_{k_i}, c_{\ell_i}\} \cap \{c_{k_{i+1}}, c_{\ell_{i+1}}\} \neq \emptyset$ для $0 \leq i < p$. Полагаем $i^{n+1}(\tilde{k}) \rightleftharpoons |X|$.

Далее определяем:

$$\varphi^{n+1}(k,n+1) \rightleftharpoons Lu,\ \varphi^{n+1}(\ell,n+1) \rightleftharpoons Ru,\ \varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(x,n)\quad (x \neq k,\ell).$$

СЛУЧАЙ 2. $c_k \notin c(A_n)$, $c_\ell \notin c(A_n)$. Полагаем $i^{n+1}(k) = i^{n+1}(\ell) \rightleftharpoons i^n(\ell)$, $i^{n+1}(x) \rightleftharpoons i^n(x) (x \neq k,\ell)$, $\varphi^{n+1}(k,n+1) \rightleftharpoons Lu$, $\varphi^{n+1}(x,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(x,n)$ $(x \neq \ell)$. Находим $\bar{u}$ наибольшего уровня такую, что $\langle c_\ell, c_p, \bar{u}\rangle \in A_n$ или $\langle c_p, c_\ell, \bar{u}\rangle \in A_n$ (пусть для определенности имеет место первое). Если $u \prec \bar{u}$, то $\varphi^{n+1}(\ell,n+1) \rightleftharpoons \varphi^{n+1}(\ell,n)$. Если $\bar{u} < u$, то $\varphi^{n+1}(\ell,n+1) \rightleftharpoons Ru$.

СЛУЧАЙ 3. $c_k \in c(A_n)$, $c_\ell \notin c(A_n)$. Действуем аналогично случаю 2.

СЛУЧАЙ 4. $c_k \in c(A_n)$, $c_\ell \in c(A_n)$. Невозможен по свойствам (A_{nm}).

Очевидно, что все объекты построены в соответствии с предварительным описанием, что заканчивает изложение конструкции.

Полагаем $\varphi \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} \varphi^n$, $i \rightleftharpoons \lim_{n<\omega} i^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция φ, построенная указанным образом, называется специальной.

Так как конструкция проводилась равномерно по всем $m < \omega$, то мы можем составить эффективный список $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ всех функций, строимых таким образом по множествам $S_0 \leq_T X$.

Пусть φ_m^n есть часть функции φ_m, вычисленная за n шагов конструкции.

Введем понятие штата. Пусть $n, m < \omega$, $i \in \{0,1\}$, $u \succ hp$ для некоторого $p < \omega$. Предположим, что существует $x < \omega$ и для него существует $h < n$ такое, что $\varphi_m^n(x,h) = H$, $\varphi_m^n(x,y)$ определено при

$h+1 \leq y \leq n,\ i_m^n(x)=i,\ \varphi_m^n(x,n) \geqslant u$. Положим $r_{m,u}^i(n)$ равным наименьшему такому x. В остальных случаях символ $r_{m,u}^i(n)$ оставляем неопределенным.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Пусть* $i \in \{0,1\},\ \psi \models T_1,\ c_k \in C(A(\psi)),\ \psi \models \exists x P^n(x) \& \exists x P^{u'}(x), \psi \leq_T X$, *по* ψ *строится* φ_m, $u \geqslant hp$ *для некоторого* p. *Тогда существует число* $n_0 < \omega$ *такое, что для всех* $n \geqslant n_0$ *имеем* $r_{m,u}^i(n)=r_{m,n}^i(n_0)$ *и* $i_m^n(k)=i_m^{n_0}(k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО очевидно по определению φ_m.

Обозначим через $r_{m,u}^i(\omega)$ указанное в предложении 3 установившееся значение $r_{m,u}^i(n)$ (для $i_m^n(k)$ это будет $i_m(k)$). Пусть $\mathcal{D}$ - дерево в $\mathfrak{L}$, $hp \prec u \in \mathcal{D}$, $u' \in \mathcal{D}$, φ_m - одна из функций списка $\varphi_0, \varphi_1, \ldots,\ n<\omega,\ i \in \{0,1\}$. Тогда i-штатом вершины u в дереве $\mathcal{D}$ относительно функции φ_m на шаге n (обозначение: $I_{m,u}^i(n)$) называется последовательность $\langle r_1, \ldots, r_s \rangle$, образованная следующим образом: пусть вершины $u_1, \ldots, u_s \in \mathcal{D}$ таковы, что

1) $u_1 = g_0 p$, если $g_0 p \preccurlyeq u$, и $u_1 = g_1 p$, если $g_1 p \preccurlyeq u$;

2) если $u \in \{g_0 p, g_1 p\}$, то $s=1$ (пусть далее это не так);

3) $\alpha u_i < \alpha u_{i+1},\quad 1 \leq i < s$;

4) $u_i' \preccurlyeq u,\ 2 \leq i < s$, и $u_{s-1}' = u_s = u$;

5) не существует $\bar{u} \in \mathcal{D} \setminus \{u_1, \ldots, u_s\}$ такой, что $u_1 \preccurlyeq \bar{u}$, $\bar{u}' \preccurlyeq u$.

Полагаем $r_t \rightleftarrows r_{m,u_t}^i(n)$, допуская неопределенность некоторых элементов штата.

Заметим теперь следующее: если $\psi \models T_1$, $\mathcal{D}=\mathcal{D}(T)$ для $T = Th\,\psi$, $u \in \mathcal{D},\ u' \in \mathcal{D},\ hp \prec u$ для некоторого p, $i \in \{0,1\}$, $\psi \leq_T X,\ \varphi_m$ построена по ψ, то по предложению 3 существует число n_0 такое, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $I_{m,u}^i(n_0) = I_{m,u}^i(n)$ и все элементы этих штатов определены.

Для завершения доказательства теоремы 3 очевидно достаточно доказать

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует вычислимое двойное дерево V такое, что теория T_V, построенная по V методом предложения 1, является искомой.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Опишем конструкцию последовательности $(V_n)_{n<\omega}$, задающей дерево V. На шаге n конструкции будет построено конечное двойное дерево V_n. Построение будет осуществлено с помощью движения меток A_m, $m<\omega$, по вершинам дерева V_n и элементам множества $\{(g_0 m, g_1 m) \mid m<\omega\}$. Начальное положение метки A_m есть $(g_0 m, g_1 m)$, ниже его она опуститься не может, движение ее возможно только на шаге вида $n=2<m,\ell>+2$.

Конструкция двойного дерева

ШАГ 0. $V_0 \rightleftharpoons \emptyset$, все метки неподвижны.

ШАГ $n+1=2k+1$. $V_{n+1} \rightleftharpoons V_n$, все метки неподвижны.

ШАГ $n+1=2<m,\ell>+2 \geqslant 2$. Пусть метка A_m находится на вершине $(u,w)\in V_n \cup\{(g_0 m, g_1 m)\}$.

Проверяем условие:

все элементы $I^0_{m,u}(\ell)=<z^0_1,\dots,z^0_s>$ определены и $z^0_s = z^0_1$;

все элементы $I^1_{m,w}(\ell)=<z^1_1,\dots,z^1_s>$ определены $z^1_i < z^1_s$ для всех $1\leq i<s$ (при $s=1$ считаем последнее выполненным).

Если это условие не выполнено, то опускаем метку A_m, а именно:

1) если $(u,w)=(g_0 m, g_1 m)$ или (u,w) - минимальный элемент V_n, то новое положение A_m есть $(g_0 m, g_1 m)$;

2) если (u_0,w_0)- непосредственный предшественник (u,w) в V_n, то новое положение A_m есть (u_0,w_0).

Полагаем, кроме того, $V_{n+1}\rightleftharpoons V_n$. Пусть это условие выполнилось. Если (u,w) - максимальный элемент V_n, то метка A_m остается неподвижной. В качестве V_{n+1} берем единственное двойное дерево, расширяющее V_n, содержащее элемент $(u_1,w_1)>(u,w)$ на уровне $n+1$ и все вершины этого дерева находятся на уровне $\leq n+1$.

Пусть, наконец, (u,w) не является максимальным элементом V_n и $(u_1,w_1)\in V_n$ таков, что (u,w) - непосредственный предшественник

(u_1, w_1) в V_n. Полагаем $V_{n+1} \rightleftharpoons V_n$. Вычисляем $\tau^0_{m,u_1}(\ell)$, $\tau^0_{m,u_1'}(\ell)$, $\tau^1_{m,w_1}(\ell)$, $\tau^1_{m,w_1'}(\ell)$.

Если хоть одно из этих чисел не определено, то A_m остается неподвижной. В противном случае по определению φ_m будем иметь для u_1: либо $\tau^0_{m,u_1}(\ell) = \tau^0_1$ и $\tau^0_{m,u_1'}(\ell) > \tau^0_1$, либо $\tau^0_{m,u_1}(\ell) > \tau^0_1$ и $\tau^0_{m,u_1'}(\ell) = \tau^0_1$; для w_1: либо $\tau^1_{m,w_1}(\ell) = \tau^1_s$ и $\tau^1_{m,w_1'}(\ell) > \tau^1_s$, либо $\tau^1_{m,w_1}(\ell) > \tau^1_s$ и $\tau^1_{m,w_1'}(\ell) = \tau^1_s$.

Новое положение $(\bar{u}, \bar{w})$, где $\bar{u} \in \{u_1, u_1'\}$, $\bar{w} \in \{w_1, w_1'\}$, метки A_m определяется из расчета $\tau^0_{m,\bar{u}}(\ell) = \tau^0_1$, $\tau^1_{m,\bar{w}}(\ell) > \tau^1_s$.

Описание конструкции закончено.

Полагаем $V \rightleftharpoons \bigcup_{n<\omega} V_n$.

Свойства дерева V

Рассмотрим теорию $T_X = T \rightleftharpoons T_V$. По предложению 1, T полна, разрешима и допускает элиминацию кванторов. Предположим, что $\psi \models T$, $\psi \in_T X$. Будем доказывать, что ψ неоднородна. Пусть φ_m - специальная функция, построенная по ψ.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. *Существует бесконечная цепь в $\mathcal{D}(T)$, проходящая через hm.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что это не так. Тогда дерево $\mathcal{D}(m) \rightleftharpoons \rightleftharpoons \{u \mid u \in \mathcal{D}(T),\ u \leqslant hm$ или $hm \leqslant u\}$ конечно и по предложению 3 существует число n_0 такое, что если u - максимальная вершина $\mathcal{D}(m)$, то для всех $n \geqslant n_0$, $i \in \{0,1\}$ имеем $\mathcal{D}(m) = \{u \mid u \geqslant hm,\ u \in \mathcal{D}(V_n)\}$ и $I^i_{m,n}(n) = I^i_{m,n}(n_0)$, причем все элементы этих штатов определены. Рассмотрим, где находится метка A_m на шаге $n_1 + 1 = 2 < m_0, n_0 > + 2$. Если ее положение - не максимальная вершина V_n, то она сдвигается на этом шаге вверх. То же имеет место и далее. Значит, на некотором шаге $n \geqslant n_1$ метка A_m находится в тупике V_n и $V_{n+1} \neq V_n$. Поэтому $\mathcal{D}(m) = \mathcal{D}(V_{n+1}) \neq \mathcal{D}(V_n) = \mathcal{D}(m)$, что невозможно. Противоречие.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. *Существует последовательность $(u_i, w_i)_{i<\omega} \subset \subset V \cup \{(g_0 m, g_1 m)\}$ такая, что $(u_0, w_0) = (g_0 m, g_1 m)$, для каждого $i < \omega$ в начале некоторого шага n_i метка A_m находилась в вершине (u_i, w_i),* *в конце этого шага – в* $(u_{i+1}, w_{i+1}) \succ (u_i, w_i)$ *и на каждом шаге* $n > n_i$ *метка* A_m *не опускается ниже* (u_{i+1}, w_{i+1}).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полагаем $(u_0, w_0) \rightleftharpoons (g_0 m, g_1 m)$. Пусть $(u_0, w_0) \prec (u_1, w_1) \prec \ldots \prec (u_i, w_i)$ уже найдены, найдем теперь (u_{i+1}, w_{i+1}). Рассмотрим любой шаг n' такой, что на этом шаге метка A_m находится в (u_i, w_i) и далее ниже (u_i, w_i) уже не опускается. Если (u_i, w_i) - максимальный элемент в $V_{n'}$, то по конструкции существует $n'' \geqslant n'$ такой; что для некоторой $(u, w) \in V_{n''}$ вершина (u_i, w_i) - непосредственный предшественник (u, w). Так как $(u, w) \in V$, то $\psi \models \exists x P^u(x) \& \exists P^{u'}(x)$, $\psi \models \exists x P^{w}(x) \& \exists x P^{w'}(x)$. Значит, существует шаг $n''' \geqslant n''$ такой, что для всех $n \geqslant n'''$ все элементы $I^i_{m,\bar{u}}(n)$ $(i \in \{0,1\}$, $\bar{u} \in \{u, u', w, w'\})$ определены и $I^i_{m,\bar{u}}(n) = I^i_{m,\bar{u}}(n''')$. Рассмотрим любой шаг $n^N = 2\langle m, \ell\rangle + 2 \geqslant n'''$. Если на нем метка A_m находится в $(\bar{u}, \bar{w}) \succ (u_i, w_i)$, то далее A_m ниже этого положения не опустится по правилам движения метки и определению n'''. Если в его начале A_m находится в (u_i, w_i), то на этом шаге она поднимется в $(\bar{u}, \bar{w})$ и далее не опустится ниже $(u_{i+1}, w_{i+1}) \rightleftharpoons (\bar{u}, \bar{w})$.

Положим $v_0 \rightleftharpoons \{u \in \mathscr{Q} \mid$ существует $i < \omega$ такой, что $u \leqslant u_i\}$, $v_1 \rightleftharpoons \{w \in \mathscr{Q} \mid$ существует $i < \omega$ такой, что $w \leqslant w_i\}$.

СЛЕДСТВИЕ предложения 5. *Существует* c_k *такая, что* $i_m(k) = 0$ *и* $\psi \models p(c_k)$ *и не существует* c_s *такой, что* $i_m(s) = 1$ *и* $\psi \models q(c_s)$, *где* $p(x) \rightleftharpoons \{P^u(x) \mid u \in v_0\}$, $q(x) \rightleftharpoons \{P^w(x) \mid w \in v_1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению правил подъема меток в терминах предложения 5 для всех $i < \omega$ имеем $\tau^0_{m,u_{i+1}}(\omega) = \tau^0_{m,u_i}(\omega)$ и $\tau^1_{m,w_{i+1}}(\omega) > \tau^1_{m,w_i}(\omega)$, откуда требуемое очевидно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. *Если* $\psi \models p(c_k)$, *то* $\psi \models q(fc_k)$, *а если* $\psi \models q(c_k)$, *то* $\psi \models p(fc_k)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению двойного дерева множества $\{u \mid Ru \in v_0\}$, $\{w \mid Rw \in v_1\}$ бесконечны. Предположим, что $\psi \models p(c_k)$. Если теперь $\{n \mid \psi \models P_n(fc_k)\}$ конечно, то существует максимальная вершина $(u,w) \in V$ такая, что $\psi \models P^u(c_k) \& P^w(fc_k)$. По одной из аксиом, определяющих теорию T_V из теории T_1 в предложении 1,

$$T \vdash \forall x\left[P^u(x) \& P^w(fx) \to \neg P_n(x) \& \neg P_n(fx)\right]$$

для всех $n > \alpha u = \alpha w$. Поэтому множество $\{n \mid \psi \models P_n(c_k)\}$ конечно. Противоречие. Вторая часть предложения доказывается точно так же.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. *Диаграмма* ψ *неоднородна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вычислим λ_m для ψ. По предложению 4 имеем $\lambda_m = \langle n_{p0}, n_{q0}, n_{q1}, n_{p1} \rangle$. По следствию предложения 5, $n_{p0} > 0$, $n_{q1} = 0$. По предложению 6, $n_{q0} > 0$, $n_{p1} = 0$. По предложению 2, ψ неоднородна.

Предложения 7 и 4, все переформулировки и сама теорема 3 доказаны.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для каждой* T*-степени* $d < 0'$ *существует* 0*-элемент* $\mathfrak{M}$ *такой, что диаграмма*

$$\begin{array}{ccc} \text{одн} & \bullet & d \\ & \vdots & \\ \mathfrak{M} & \bullet & 0 \end{array}$$

Диаграмма 5

непополнима указанным образом.

Исходным пунктом для получения теоремы 3 послужило дерево, построенное в [6]. Методом, которым доказана теорема 3, могут быть получены:

СЛЕДСТВИЕ 2 [6]. *Существует разрешимая теория, имеющая неконструктивизируемую простую и неконструктивизируемую насыщенную модели.*

СЛЕДСТВИЕ 3 [9]. *Для каждого множества* $X <_T \emptyset'$ *существует разрешимая теория, имеющая простую модель, не конструктивизируемую в* X.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Для каждого множества* $X <_T \emptyset'$ *существует разрешимая теория, имеющая неконструктивизируемую в* X *насыщенную и неконструктивизируемую в* X *простую модели.*

СЛЕДСТВИЕ 5 ([4]). *Существует разрешимая теория, не имеющая конструктивных однородных моделей.*

Литература

1. Ю.Л.ЕРШОВ, Проблемы разрешимости и конструктивные модели, М., Наука, 1980.

2. Г.КЕЙСЛЕР, Ч.Ч.ЧЭН, Теория моделей, М., Мир, 1977.

3. Х.РОДЖЕРС, Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость, М., Мир, 1972.

4. С.С.ГОНЧАРОВ, Тотально трансцендентная разрешимая теория без неконструктивизируемых однородных моделей, Алгебра и логика, 19, № 2 (1980) 137-149.

5. С.С.ГОНЧАРОВ, Б.Н.ДРОБОТУН, О нумерациях насыщенных и однородных моделей, Сиб.матем.ж., 21, № 2(1989), 25-41.

6. С.С.ГОНЧАРОВ, А.Т.НУРТАЗИН, Конструктивные модели полных разрешимых теорий, Алгебра и логика, 12, № 2(1973), 125-142.

7. А.С.ДЕНИСОВ, Конструктивные однородные расширения, Сиб.матем.ж., 25, № 6 (1984), 60-69.

8. А.С.ДЕНИСОВ, Всякая разрешимая теория имеет $0'$-сильно конструктивную однородную модель, в кн.: "Вычислимые инварианты алгебраических систем", ВЦ СО АН СССР (1987), 13-21.

9. Б.Н.ДРОБОТУН, О нумерациях простых моделей, Сиб.матем.ж., 18, № 5(1977), 1002-1014.

10. H.PUTNAM, Trial and error predicates and the solution to a problem of Mostowski, J. Symbolic Logic, 30, N 1, (1965), 49-57.

Поступило 20 сентября 1987 г.