V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$,
Algebra i Analiz, 1990, Volume 2, Issue 4, 149–181

В.Г.Дринфельд

О КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ КВАЗИХОПФОВЫХ АЛГЕБРАХ И ОДНОЙ ГРУППЕ, ТЕСНО СВЯЗАННОЙ С Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$

Доказывается анонсированная ранее теорема о структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр в рамках теории возмущений по постоянной Планка. При этом используется проунипотентный вариант одной группы, введенной Гротендиком и содержащей Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена главным образом доказательству анонсированной в [1] теоремы о структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр в рамках теории возмущений по постоянной Планка h. В качестве технического средства используется проунипотентный вариант одной группы, введенной Гротендиком [2] и представляющей огромный интерес ввиду ее тесной связи с Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$.

Напомним основные определения из [1]. Квазихопфова алгебра отличается от алгебры Хопфа тем, что аксиома коассоциативности заменена более слабым условием. Точнее, согласно определению из [1], квазихопфова алгебра над коммутативным кольцом k - это набор $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi)$, где A - ассоциативная k-алгебра с единицей, Δ - гомоморфизм $A \longrightarrow A\otimes A$, ε - гомоморфизм $A \longrightarrow k$ (предполагается, что $\Delta(1)=1$, $\varepsilon(1)=1$), а Φ - обратимый элемент $A\otimes A\otimes A$, причем

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Delta(a)) = \Phi\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta(a))\cdot\Phi^{-1},\quad a\in A, \tag{1.1}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi)\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Phi) = (1\otimes\Phi)\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Phi)\cdot(\Phi\otimes 1), \tag{1.2}$$

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\circ\Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id}\otimes\varepsilon)\cdot\Delta, \tag{1.3}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\Phi) = 1, \tag{1.4}$$

и выполнена аксиома, которая в хопфовом случае, т.е. при $\Phi=1$, сводится к существованию и биективности антипода. В рассматриваемой в настоящей работе ситуации, когда $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi)$ - деформация алгебры Хопфа, зависящая от „бесконечно малого" параметра h, эта аксиома выполнена автоматически, согласно теореме 1.6 из [1]. Как и в хопфовом случае, Δ называется коумножением, а ε - коединицей.

Ключевые слова: алгебры Хопфа, квантовые группы, конформная теория поля, группа Галуа поля рациональных чисел, группы кос, алгебры Ли.

В [1] обобщено на квазихопфов случай понятие квазитреугольной алгебры Хопфа, введенное в § 10 из [3] под влиянием квантового метода обратной задачи [4]. Именно квазитреугольная квазихопфова алгебра - это набор $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$, где $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi)$ - квазихопфова алгебра, а R - обратимый элемент $A\otimes A$ такой, что

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \quad a\in A, \tag{1.5}$$

$$(\Delta\otimes \mathrm{id})(R) = \Phi^{312}R^{13}(\Phi^{132})^{-1}R^{23}\Phi, \tag{1.6а}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1}R^{13}\Phi^{213}R^{12}\Phi^{-1}. \tag{1.6б}$$

Здесь $\Delta'=\sigma\circ\Delta$, где $\sigma: A\otimes A\longrightarrow A\otimes A$ переставляет тензорные сомножители. Если $R=\sum\limits_i a_i\otimes b_i$, то по определению $R^{12}=\sum\limits_i a_i\otimes b_i\otimes 1$, $R^{13}=\sum\limits_i a_i\otimes 1\otimes b_i$, $R^{23}=\sum\limits_i 1\otimes a_i\otimes b_i$. Поясним также, что если $\Phi=\sum\limits_j x_j\otimes y_j\otimes z_j$, то $\Phi^{312}=\sum\limits_j y_j\otimes z_j\otimes x_j$.

Смысл аксиом (1.1)-(1.6) в том, что представления квазитреугольной квазихопфовой алгебры A образуют квазитензорную категорию в смысле [5] (см. также § 3 из [1]). Это значит, что, во-первых, в категории представлений A имеется функтор тензорного произведения: если заданы представления A в k-модулях V_1 и V_2, то представление A в $V_1\otimes V_2$ определяется, как композиция $A\xrightarrow{\Delta}A\otimes A\longrightarrow \mathrm{End}_k(V_1\otimes V_2)$. Во-вторых, имеются функториальные изоморфизмы коммутативности $c: V_1\otimes V_2\xrightarrow{\sim}V_2\otimes V_1$ и ассоциативности $a: (V_1\otimes V_2)\otimes V_3\xrightarrow{\sim}V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$, где V_i - представления A. Именно a - это оператор в $V_1\otimes V_2\otimes V_3$, соответствующий Φ, а c - композиция оператора в $V_1\otimes V_2$, соответствующего R, и обычного изоморфизма $\sigma: V_1\otimes V_2\xrightarrow{\sim}V_2\otimes V_1$. В-третьих, имеем единичное представление k и изоморфизмы $V\otimes k\xrightarrow{\sim}V$, $k\otimes V\xrightarrow{\sim}V$ для любого представления V. Наконец, (1.2), (1.4), (1.6) обеспечивают коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}
((V_1\otimes V_2)\otimes V_3)\otimes V_4 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & (V_1\otimes V_2)\otimes(V_3\otimes V_4) \arrow[r, "\sim"] & V_1\otimes(V_2\otimes(V_3\otimes V_4)) \\
(V_1\otimes(V_2\otimes V_3))\otimes V_4 \arrow[rr, "\sim"] & & V_1\otimes((V_2\otimes V_3)\otimes V_4) \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{1.7}$$

$$\begin{tikzcd}
 & V_1\otimes V_2 \arrow[dl, "\wr"'] \arrow[dr, "\wr"] & \\
(V_1\otimes k)\otimes V_2 \arrow[rr, "\sim"] & & V_1\otimes(k\otimes V_2)
\end{tikzcd} \tag{1.8}$$

$$
\begin{array}{ccccc}
(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 & \xrightarrow{c} & V_3\otimes(V_1\otimes V_2) & \xleftarrow{a} & (V_3\otimes V_1)\otimes V_2 \\
a\downarrow & & & & \uparrow c\otimes\mathrm{id} \\
V_1\otimes(V_2\otimes V_3) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes c} & V_1\otimes(V_3\otimes V_2) & \xrightarrow{a^{-1}} & (V_1\otimes V_3)\otimes V_2
\end{array} \qquad (1.9а)
$$

$$
\begin{array}{ccccc}
V_1\otimes(V_2\otimes V_3) & \xrightarrow{c} & (V_2\otimes V_3)\otimes V_1 & \xrightarrow{a} & V_2\otimes(V_3\otimes V_1) \\
a^{-1}\downarrow & & & & \uparrow \mathrm{id}\otimes c \\
(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 & \xrightarrow{c\otimes\mathrm{id}} & (V_2\otimes V_1)\otimes V_3 & \xrightarrow{a} & V_2\otimes(V_1\otimes V_3)
\end{array} \qquad (1.9б)
$$

Отметим, что, вообще говоря, $R^{21}\neq R^{-1}$ и, следовательно, изоморфизм коммутативности не инволютивен (в этом отличие квазитензорных категорий от тензорных [6]).

Если $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ - квазитреугольная квазихопфова алгебра, а F - обратимый элемент $A\otimes A$ такой, что $(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(F)=1=(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(F)$ то, положив

$$\tilde{\Delta}(a) = F\cdot\Delta(a)\cdot F^{-1}, \qquad (1.10)$$

$$\tilde{\Phi} = F^{23}\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta)(F)\cdot\Phi\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id})(F^{-1})\cdot(F^{12})^{-1}, \qquad (1.11)$$

$$\tilde{R} = F^{21}\cdot R\cdot F^{-1}, \qquad (1.12)$$

получим новую квазитреугольную квазихопфову алгебру $(A,\tilde{\Delta},\varepsilon,\tilde{\Phi},\tilde{R})$, о которой говорят, что она получается из $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ *скручиванием посредством* F. Квазитензорные категории, соответствующие $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ и $(A,\tilde{\Delta},\varepsilon,\tilde{\Phi},R)$, эквивалентны. Поэтому естественно относиться к скручиванию, как к „калибровочному" преобразованию.

Мы будем изучать квазитреугольные квазихопфовы алгебры в рамках теории возмущений по h, ограничившись случаем характеристики 0. Точный смысл этим словам придает следующее определение (поясним, что QUE - сокращение от "quantized universal enveloping").

Определение. *Пусть* k *- поле характеристики* 0. *Квазитреугольная квазихопфова* QUE-*алгебра над* $k[[h]]$ *- это топологическая квазитреугольная квазихопфова алгебра* $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ *над* $k[[h]]$ *такая, что* A/hA *- универсальная обертывающая алгебра со стандартным коумножением, а* A, *как топологический* $k[[h]]$-*модуль, изоморфен* $V[[h]]$ *для некоторого векторного пространства* V *над* k.

Замечание. Так как A/hA - универсальная обертывающая алгебра, то из (1.4) и обратимости Φ следует, что $\Phi\equiv 1 \bmod h$. По аналогичной причине $R\equiv 1 \bmod h$, а при скручивании квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр $F\equiv 1 \bmod h$.

Под влиянием [7-9] в [1] предложен следующий метод построения квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр. Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли над $k[[h]]$, которая как $k[[h]]$-модуль изоморфна $V[[h]]$ для некоторого векторного пространства V над k (условие на $\mathfrak{g}$ означает, что $\mathfrak{g}$ - деформация алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над k, где

$\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$; поэтому такие алгебры $\mathfrak{g}$ мы будем называть *деформационными*). Пусть задан симметричный $\mathfrak{g}$-инвариантный тензор $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, где $\otimes$ – пополненное тензорное произведение. Положим $A=U\mathfrak{g}$, где под $U\mathfrak{g}$ понимается h-адическое пополнение униврсальной обертывающей алгебры. Определим обычным образом $\varepsilon: A\longrightarrow k[[h]]$, $\Delta: A\longrightarrow A\otimes A$ (где $\otimes$ – пополненное тензорное произведение) и положим $R=e^{ht/2}$. Тогда (1.3)-(1.5) выполнены и остается найти $\Phi\in A\otimes A\otimes A$, удовлетворяющее (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) (отметим, что (1.1) в рассматриваемой ситуации означает $\mathfrak{g}$-инвариантность Φ). Первым основным результатом настоящей статьи является

Т е о р е м а А. *Такое Φ существует и единственно с точностью до скручивания посредством симметричных $\mathfrak{g}$-инвариантных $F\in A\otimes A$.*

З а м е ч а н и я. 1) Если Δ – обычное коумножение в $A=U\mathfrak{g}$, $R=e^{ht/2}$, а $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{R}$ определяются формулами (1.10), (1.12), то равенства $\tilde{\Delta}=\Delta$, $\tilde{R}=R$ эквивалентны $\mathfrak{g}$-инвариантности и симметричности F (t коммутирует с $\mathfrak{g}$-инвариантными элементами $A\otimes A$, так как $t=(\Delta(C)-C\otimes 1-1\otimes C)/2$, где $C\in U\mathfrak{g}$ – элемент Казимира).

2) Одновременно с теоремой А доказывается, что если условие $R=e^{ht/2}$ заменить, на первый взгляд, более слабыми условиями симметричности и $\mathfrak{g}$-инвариантности R, то автоматически $R=e^{ht/2}$ для некоторого $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$.

В теореме А единственность доказывается просто (см. предложения 3.2 и 3.4). При $k=\mathbb{C}$ в [1] предложена явная, но трансцендентная конструкция Φ с помощью системы уравнений Книжника-Замолодчикова (сокращенно – системы KZ), возникшей в конформной теории поля [10]. Это Φ, обозначаемое далее Φ_{KZ}, выражается через $\tau=ht$ с помощью „$\mathbb{C}$-универсальной формулы", т.е. если записать Φ_{KZ} в виде $\Phi_{KZ} = \sum_{m,n,p} a^{i_1\ldots i_m j_1\ldots j_n \ell_1\ldots\ell_p}_{(m,n,p)} e_{i_1}\ldots e_{i_m} \otimes e_{j_1}\ldots e_{j_n} \otimes e_{\ell_1}\ldots e_{\ell_p}$, где e_i – базис $\mathfrak{g}$ как топологического $\mathbb{C}[[h]]$-модуля, а тензоры $a_{(m,n,p)}$ симметричны по каждой из групп индексов i,j,ℓ, то $a_{(m,n,p)}$ выражаются через структурные константы c^t_{rs} алгебры $\mathfrak{g}$ и координаты τ^{uv} тензора τ по правилам ацикличного тензорного исчисления с коэффициентами из $\mathbb{C}$, а (1.1), (1.2), (1.4) и (1.6) вытекают по правилам ацикличного тензорного исчисления из того, что c^t_{rs} – структурные константы алгебры Ли, а τ симметричен и инвариантен (ацикличность означает, например, запрет выражения $c^j_{ri}\, c^{\ell}_{sj}\, c^i_{t\ell}$, где i, j, ℓ образуют „цикл"). Среди коэффициентов упомянутой $\mathbb{C}$-универсальной формулы имеются (см. (2.15) и (2.18)) числа $\zeta(2m+1)/(2\pi i)^{2m+1}$, $m\in\mathbb{N}$, являющиеся мнимыми и, вероятно, трансцендентными. Поэтому при $k\not\supset\mathbb{C}$ существование в теореме А не вытекает из конструкции Φ_{KZ}. Оно доказывается в § 3 вместе со следующей теоремой.

Т е о р е м а А$'$. *Существует $\mathbb{Q}$-универсальная формула, выражающая Φ, о котором идет речь в теореме* А, *через $\tau=ht$. Она единственна с точностью до скручивания посредством симметричного $\mathbb{Q}$-универсального $F=F(\tau)$.*

Квазитреугольные квазихопфовы алгебры, доставляемые теоремой А, назовем стандартными.

Т е о р е м а Б. *Любую квазитреугольную квазихопфову* QUE-*алгебру можно подходящим скручиванием превратить в стандартную.*

$\mathbb{C}$-универсальная формула, выражающая Φ_{KZ} через $\tau=ht$, имеет вид $\Phi_{KZ}=\exp P_{KZ}(\tau^{12}, \tau^{23})$, где P_{KZ} - лиевский (т.е. коммутаторный) формальный ряд с коэффициентами из $\mathbb{C}$ (см. § 2). Теорема A допускает следующее усиление.

Т е о р е м а A″. *Существует лиевский формальный ряд P с коэффициентами из* $\mathbb{Q}$ *такой, что в качестве* Φ, *о котором идет речь в теореме* A, *можно взять* $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$.

Если Φ имеет вид $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$, где P - лиевский формальный ряд, то Φ, определяемое формулой (1.11), вообще говоря, не имеет такого вида. Однако на множестве лиевских рядов P над полем k таких, что $\Phi=\exp P(ht^{12}, ht^{23})$ и $R=e^{ht/2}$ удовлетворяют (1.2), (1.6), можно определить (см. § 4) естественное транзитивное действие некоторой группы, которую мы называем группой Гротендика-Тейхмюллера и обозначаем $\mathrm{GT}(k)$. Это действие лежит в основе доказательства теоремы A″. Определение $\mathrm{GT}(k)$ по существу заимствовано из [2], где, в частности, объяснено, как построить канонический гомоморфизм $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$, где $\bar{\mathbb{Q}}$ - алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{C}$, а ℓ - простое число.

Структура работы такова. § 2 посвящен Φ_{KZ}. В § 3 методами [1] доказываются теоремы A, A′ и Б. В § 4 определяется группа Гротендика-Тейхмюллера (в нескольких вариантах) и объясняется ее связь с $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. В § 5 доказывается теорема A″, а, изучение $\mathrm{GT}(k)$ сводится к изучению бесконечномерной градуированной алгебры Ли $\mathfrak{grt}_1(k)$. В § 6 собраны некоторые сведения об этой алгебре. § 4 не зависит от § 2,3, а § 5,6 - от § 3.

Автор благодарит А.А.Бейлинсона, Г.В.Белого, Ю.И.Манина и Г.Б.Шабата, обративших его внимание на работы [2,11-15].

§ 2. Конструкция Φ_{KZ}

Φ_{KZ} проще всего определить формулой $\Phi_{KZ}=G_2^{-1}G_1$, где G_1 и G_2 - решения дифференциального уравнения

$$G'(x) = \hbar\left(\frac{t^{12}}{x} + \frac{t^{23}}{x-1} \right)G(x), \qquad \hbar = h/2\pi i, \tag{2.1}$$

заданные при $0<x<1$ и обладающие асимптотиками $G_1(x)\sim x^{\hbar t^{12}}$ при $x\longrightarrow 0$, $G_2(x)\sim(1-x)^{\hbar t^{23}}$ при $x\longrightarrow 1$. Поясним, что $t^{12}=t\otimes 1\in(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, $t^{23}=1\otimes t\in(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, где $\mathfrak{g}$ - деформационная алгебра Ли над $\mathbb{C}[[h]]$, а тензор $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ симметричен и $\mathfrak{g}$-инвариантен. G в уравнении (2.1) должна быть аналитической функцией $(0,1)\longrightarrow(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, т.е. для любого n образ $G(x)$ в $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/h^n(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ должен иметь вид $\sum_{i=1}^{N} a_i(x)\cdot u_i$, где $u_i\in(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/h^n(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, a_i - аналитические функции $(0,1)\longrightarrow\mathbb{C}$, а N, вообще говоря, зависит от n. В важнейшем случае, когда $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0[[h]]$ (т.е. $\mathfrak{g}$ - тривиальная деформация

$\mathfrak{g}_0$), это означает, что $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)h^i$, где каждая g_i является аналитической функцией со значениями в некотором конечномерном подпространстве $V_i \subset (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$. Разумеется, $x^{\hbar t^{12}}$ следует понимать, как $\exp(\hbar \ln x \cdot t^{12}) = 1 + \hbar \ln x \cdot t^{12} + \ldots$ Запись $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ означает, что $G_1(x)x^{-\hbar t^{12}}$ аналитически продолжается в окрестность точки $x=0$ и обращается в 1 при $x=0$. Существование и единственность G_1 и G_2 доказываются без труда.

Система KZ имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, \quad i=1,2,\ldots,n, \tag{2.2}$$

где $W(z_1,\ldots,z_n) \in (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$, t^{ij} - образ t при (i,j)-м вложении $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \longrightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$. Для нас существенно, что, как указано в [10], система (2.2) самосогласована, т.е. кривизна соответствующей связности равна 0. Так как $\frac{\partial W}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial z_n} = 0$, то W зависит только от разностей $z_i - z_j$. Кроме того, $\sum_i z_i \frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{i<j} t^{ij} \cdot W$, так что (2.2) сводится к системе уравнений для функции от $n-2$ переменных. В частности, при $n=3$ решения (2.2) имеют вид $(z_3-z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{23})} \cdot G((z_2-z_1)/(z_3-z_1))$, где G удовлетворяет (2.1). Поэтому Φ_{KZ} можно определить из соотношения $W_1 = W_2 \cdot \Phi_{KZ}$, где W_1, W_2 - решения (2.2) при $n=3$ в области $\{(z_1,z_2,z_3) \in \mathbb{R}^3 | z_1 < z_2 < z_3\}$ с асимптотикой $W_1 \sim (z_2-z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3-z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ при $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1$, $W_2 \sim (z_3-z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3-z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ при $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1$.

Определение Φ_{KZ} через систему (2.2) удобно, в частности, для проверки (1.2) и (1.6) (равенство (1.1), эквивалентное $\mathfrak{g}$-инвариантности Φ_{KZ}, очевидно). Для доказательства (1.6) рассмотрим (2.2) при $n=4$ в области $\{(z_1,z_2,z_3,z_4) \in \mathbb{R}^4 | z_1 < z_2 < z_3 < z_4\}$ и выделим 5 зон: 1) $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$, 2) $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$, 3) $z_3 - z_2 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$, 4) $z_4 - z_3 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$, 5) $z_2 - z_1 \ll z_4 - z_1$, $z_4 - z_3 \ll z_4 - z_1$. Эти зоны соответствуют „вершинам" 5-угольника (1.7) по следующему правилу: если V_i, V_j находятся между какими-то соответствующими друг другу скобками, а V_k находится вне этих скобок, то $|z_i - z_j| \ll |z_i - z_k|$ (например, $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4$ соответствует второй зоне)).

Л е м м а. *Существуют единственные решения* $W_1,\ldots,W_5$ *системы* (2.2), *обладающие в соответствующих зонах асимптотиками*

$$W_1 \sim (z_2-z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3-z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{23})} (z_4-z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})},$$

$$W_2 \sim (z_3-z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3-z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13})} (z_4-z_1)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})},$$

$$W_3\sim(z_3-z_2)^{\hbar t^{23}}(z_4-z_2)^{\hbar(t^{24}+t^{34})}\ (z_4-z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})},$$

$$W_4\sim(z_4-z_3)^{\hbar t^{34}}(z_4-z_2)^{\hbar(t^{23}+t^{24})}\ (z_4-z_1)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})},$$

$$W_5\sim(z_2-z_1)^{\hbar t^{12}}\ (z_4-z_3)^{\hbar t^{34}}\ (z_4-z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}.$$

Поясним, что асимптотику, скажем, для W_5 следует понимать как равенство $W_5=f(u,v)(z_2-z_1)^{\hbar t^{12}}(z_4-z_3)^{\hbar t^{34}}(z_4-z_1)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}$, где $u=(z_2-z_1)/(z_4-z_1)$, $v=(z_4-z_3)/(z_4-z_1)$, f аналитична в окрестности $(0,0)$ и $f(0,0)=1$.

Доказательство. Рассмотрим, скажем, пятую зону. Сделаем подстановку $W=g(u,v)(z_4-z_1)^{\hbar T}$, где $T=t^{12}+t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24}+t^{34}$, $u=(z_2-z_1)/(z_4-z_1)$, $v=(z_4-z_3)/(z_4-z_1)$. Тогда для g получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial g}{\partial u} = h(\frac{A}{u} + R(u,v))\cdot g(u,v),\quad \frac{\partial g}{\partial v} = h(\frac{B}{v} + S(u,v))\cdot g(u,v), \tag{2.3}$$

где R и S - аналитические в окрестности $(0,0)$ функции со значениями в $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, а $A,B\in(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ не зависят от u, v (отметим, что $[A,B]=0$ в силу интегрируемости связности ∇, соответствующей (2.3)). Надо доказать существование и единственность решения системы (2.3) вида $\varphi(u,v)u^{hA}v^{hB}$, где $\varphi(u,v)$ аналитична в окрестности $(0,0)$ и $\varphi(0,0)=1$. Иначе говоря, надо доказать существование и единственность аналитической функции $\varphi(u,v)$ такой, что $\varphi(0,0)=1$, $\varphi^{-1}\cdot\nabla_u\cdot\varphi=\partial/\partial u-hAu^{-1}$, $\varphi^{-1}\cdot\nabla_v\cdot\varphi = =\partial/\partial v-hBv^{-1}$, где $\nabla_u=\partial/\partial u-h(Au^{-1}+R(u,v))$, $\nabla_v=\partial/\partial v-h(Bv^{-1}+S(u,v))$. Это доказывается методом последовательных приближений. ●

Легко видеть, что $W_1,\dots,W_5$ аналитически продолжаются во всю область $z_1<z_2<z_3<z_4$. Формула (1.2) вытекает из равенств $W_1=W_2\cdot(\Phi_{KZ}\otimes 1)$, $W_2=W_3\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Phi_{KZ})$, $W_3=W_4\cdot(1\otimes\Phi_{KZ})$, $W_1=W_5\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Phi_{KZ})$, $W_5=W_4\cdot(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\Phi_{KZ})$. Покажем, как доказываются первые два равенства.

Положим $V_1=W_1\cdot(z_4-z_1)^{-\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}$, $V_2=W_2\cdot(\Phi_{KZ}\otimes 1)\times(z_4-z_1)^{-\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}= =W_2\cdot(z_4-z_1)^{-\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}\cdot(\Phi_{KZ}\otimes 1)$ и докажем, что $V_1=V_2$. Нетрудно показать, что V_1 и V_2 аналитичны при $z_1<z_2<z_3$, $z_4\in\mathbb{RP}^1\setminus[z_1,z_3]$ (z_4 может равняться и ∞!). V_1 и V_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \hbar\sum_{j\neq i}\frac{t^{ij}}{z_i-z_j}\cdot V,\qquad i=2,3, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \hbar\sum_{j\neq 1}\frac{t^{1j}}{z_1-z_j}\cdot V - \hbar V\cdot\frac{t^{14}+t^{24}+t^{34}}{z_1-z_4}, \tag{2.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_4} = \hbar\sum_{j\neq 4}\frac{[t^{i4},V]}{z_4-z_j}. \tag{2.6}$$

Из (2.4), (2.5) и асимптотик для V_1, V_2 следует, что V_1 и V_2 совпадают при $z_4=\infty$.

Отсюда и из (2.6) следует, что $V_1=V_2$.

Положим теперь $U_1=W_2\cdot(z_3-z_2)^{-\hbar t^{23}}$, $U_2=W_3\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Phi_{KZ})\times(z_3-z_2)^{-\hbar t^{23}}=$ $W_3\cdot(z_3-z_2)^{-\hbar t^{23}}\cdot(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Phi_{KZ})$ и докажем, что $U_1=U_2$. Нетрудно показать, что U_1 и U_2 аналитичны в области $z_1<z_2<z_4$, $z_1<z_3<z_4$ (z_2 может равняться z_3!). U_1 и U_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = \hbar\sum_{j\neq i}\frac{t^{ij}}{z_i-z_j}\cdot U,\qquad i=1,4, \tag{2.7}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_2} = \hbar\sum_{j\neq 2,3}\frac{t^{2j}}{z_2-z_j}\cdot U+\hbar\,\frac{[t^{23},U]}{z_2-z_3}, \tag{2.8}$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_3} = \hbar\sum_{j\neq 2,3}\frac{t^{3j}}{z_3-z_j}\cdot U-\hbar\,\frac{[t^{23},U]}{z_2-z_3}. \tag{2.9}$$

Легко видеть, что U_1 и U_2 совпадают при $z_2=z_3$. Отсюда и из (2.8) следует, что $U_1=U_2$.

Итак, (1.2) доказано. Замена x на $1-x$ в уравнении (2.1) показывает, что Φ_{KZ} удовлетворяет равенству

$$\Phi^{321}=\Phi^{-1}. \tag{2.10}$$

Поэтому (1.6б) следует из (1.6а): достаточно к обеим частям (1.6а) применить оператор, переставляющий первый тензорный сомножитель с третьим, и воспользоваться тем, что $R^{21}=R$, $\Delta'=\Delta$. Доказательство (1.6а) содержится в § 3 из [1]. Оно использует 6 решений системы (2.2) при $n=3$ в комплексной области, имеющих в соответствующих зонах стандартные асимптотики. Эти решения соответствуют „вершинам" 6-угольника (1.9а).

Рассмотрим теперь вместо (2.1) уравнение

$$G'(x)=\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}\right)G(x), \tag{2.11}$$

где A и B – некоммутирующие символы, а G – формальный ряд по A, B, коэффициенты которого – аналитические функции от x. Рассмотрим, как и выше, решения G_1 и G_2 со стандартными асимптотиками при $x=0$ и $x=1$. Положим $\varphi_{KZ}(A,B)=G_2^{-1}G_1$. Алгебра некоммутативных формальных рядов $\mathbb{C}\langle\langle A,B\rangle\rangle$ является топологической алгеброй Хопфа с коумножением $\Delta(A)=A\otimes1+1\otimes A$, $\Delta(B)=B\otimes1+1\otimes B$. Ясно, что $\Delta(\varphi_{KZ})=\varphi_{KZ}\otimes\varphi_{KZ}$. Поэтому $\ln\varphi_{KZ}(A,B)$ – *лиевский* формальный ряд, т.е. элемент пополненной свободной алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с образующими A, B (см. [16], гл. II, § 3, следствие 2, теорема 1). Аналогично (2.10) доказывается, что φ_{KZ} удовлетворяет равенству

$$\varphi(B,A)=\varphi(A,B)^{-1}. \tag{2.12}$$

Чтобы написать аналоги (1.2) и (1.6) для φ_{KZ}, заметим, следуя [7], что интегрируемость связности, соответствующей (2.2), вытекает из соотношений $t^{ij}=t^{ji}$,

$[t^{ij},t^{k\ell}]=0$ при $i\neq j\neq k\neq \ell$, $[t^{ij}+t^{ik},t^{jk}]=0$ при $i\neq j\neq k$. Введем теперь, следуя [17], алгебру Ли $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$, являющуюся фактором пополненной свободной алгебры Ли над $\mathbb{C}$ с образующими $\tilde{X}^{ij}$, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$, $i\neq j$, по идеалу, топологически порожденному элементами трех типов: 1) $\tilde{X}^{ij}-\tilde{X}^{ji}$; 2) $[\tilde{X}^{ij},X^{k\ell}]$, $i\neq j\neq k\neq \ell$; 3) $[\tilde{X}^{ij}+X^{ik},\tilde{X}^{jk}]$, $i\neq j\neq k$. Образ $\tilde{X}^{ij}$в $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ обозначим X^{ij}. Заменив теперь в (2.2) ht^{ij} на X^{ij}, получим, что рассуждения, доказывающие (1.2) и (1.6) для $\Phi=\Phi_{KZ}$, одновременно доказывают, что φ_{KZ} удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(X^{12},X^{23}+X^{24})\cdot\varphi(X^{13}+X^{23},X^{34})=\varphi(X^{23},X^{34})\times\varphi(X^{12}+X^{13},\ X^{24}+X^{34})\cdot\varphi(X^{12},X^{23}),\qquad(2.13)$$

$$\exp\left((X^{13}+X^{23})/2\right)=\varphi(X^{13},X^{12})\cdot\exp(X^{13}/2)\cdot\varphi(X^{13},X^{23})^{-1}\times$$
$$\times\exp(X^{23}/2)\cdot\varphi(X^{12},X^{23}),\qquad(2.14\text{a})$$

$$\exp\left((X^{12}+X^{13})/2\right)=\varphi(X^{23},X^{13})^{-1}\cdot\exp(X^{13}/2)\cdot\varphi(X^{12},X^{13})\times$$
$$\times\exp(X^{12}/2)\cdot\varphi(X^{12},\ X^{23})^{-1},\qquad(2.14)$$

где обе части (2.13) принадлежат $\exp\mathfrak{a}_4^{\mathbb{C}}$, а обе части (2.14а) и (2.14б) принадлежат $\exp\mathfrak{a}_3^{\mathbb{C}}$. Здесь $\exp\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}=\{e^x|x\in\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}\}$, где e^x рассматривается как элемент пополненной универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$. Иначе говоря, $\exp\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ - группа Ли, соответствующая $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$.

Если временно допустить, что $[A,B]=0$, то (2.11) обладает решением $x^{A/2\pi i}(1-x)^{B/2\pi i}$, имеющим стандартные асимптотики и при $x=0$, и при $x=1$. Поэтому $\ln\varphi_{KZ}\in\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ - коммутант пополненной свободной алгебры Ли с образующими A,B. Найдем образ $\ln\varphi_{KZ}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Так как $\mathfrak{p}$ - топологически свободная алгебра Ли с образующими $U_{k\ell}=(\mathrm{ad}\,B)^{\ell}(\mathrm{ad}\,A)^{k}[A,B]$ (см., например, § 2.4.2 из [18]), то образы $U_{k\ell}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ (обозначим их $\bar{U}_{k\ell}$) образуют топологический базис в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Отметим, что $\bar{U}_{k\ell}$ равен также образу $(\mathrm{ad}\,A)^{k}(\mathrm{ad}\,B)^{\ell}[A,B]$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Коэффициенты разложения образа $\ln\varphi_{KZ}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ по базису $\bar{U}_{k\ell}$ обозначим $c_{k\ell}$. Покажем, что

$$1+\sum_{k,\ell}c_{k\ell}\,u^{k+1}v^{\ell+1}=\exp\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\zeta(n)}{n\cdot(2\pi i)^n}\,(u^n+v^n-(u+v)^n).\qquad(2.15)$$

Для этого запишем наши стандартные решения G_1 и G_2 уравнения (2.11) в виде $G_j(x)=x^{\bar{A}}(1-x)^{\bar{B}}V_j(x)$, где $\bar{A}=A/2\pi i$, $\bar{B}=B/2\pi i$. Функции V_j непрерывно продолжаются на $[0,1]$ и удовлетворяют уравнению

$$V'(x)=Q(x)V(x),\qquad(2.16)$$

$$Q(x)\overset{\mathrm{def}}{=}e^{-\ln(1-x)\cdot\mathrm{ad}\,\bar{B}}\cdot\frac{e^{-\ln x\cdot\mathrm{ad}\,\bar{A}}-1}{x-1}\,\bar{B}\in\mathfrak{p}.$$

При этом $V_1(0)=1$, $V_2(1)=1$. Поэтому $\varphi_{KZ}=V_2^{-1}V_1=V(1)V(0)^{-1}$, где V – любое решение (2.16). Значит, образ $\ln \varphi_{KZ}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$ равен $\int_0^1 \bar{Q}(x)dx$, где $\bar{Q}(x)$ – образ $Q(x)$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p},\mathfrak{p}]$. Отсюда

$$c_{k\ell} = \frac{1}{(2\pi i)^{k+\ell+2}(k+1)!\,\ell!}\int_0^1 \left(\ln\frac{1}{x}\right)^{k+1}\left(\ln\frac{1}{1-x}\right)^{\ell}\frac{dx}{x-1}. \qquad (2.17)$$

Считая временно, что $u,v\in\mathbb{C}$, $\operatorname{Im} v<0$, $\operatorname{Im} u<2\pi$, получим, что левая часть (2.15) равна $1+\bar{v}\int_0^1 (1-x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1}\,dx = -\bar{v}\int_0^1 (x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1}\,dx = \Gamma(1-\bar{u})\,\Gamma(1-\bar{v})/\Gamma(1-\bar{u}-\bar{v})$, где $\bar{u}=u/2\pi i$, $\bar{v}=v/2\pi i$. Воспользовавшись формулой $\ln\Gamma(1-z)=\gamma z+\sum_{n=2}^{\infty}(\zeta(n)/n)\cdot z^n$, вытекающей из разложения Г-функции в бесконечное произведение ([19], гл. 12), получим (2.15).

Из (2.15), в частности, следует, что

$$c_{k,0} = c_{0,k} = -\zeta(k+2)/(2\pi i)^{k+2}. \qquad (2.18)$$

Можно доказать (2.18) и несколько иначе: $c_{k,0}$ считается с помощью (2.17), формулы $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\ldots$ и замены $x=e^{-y}$, а $c_{0,k}$ – с помощью формулы $c_{\ell k}=c_{k\ell}$, вытекающей из (2.12).

З а м е ч а н и е. Согласно введению к [11], близкие вычисления ранее проделал З. Войтковяк. Они послужили П. Делиню толчком для написания [11].

§ 3. Доказательство теорем А, А′ и Б.

В этом параграфе мы исследуем квазитреугольные квазихопфовы QUE-алгебры над $k[[h]]$, где k - поле характеристики 0. Напомним (см. предложение 3.5 из [1]), что 1) любую такую алгебру можно скручиванием привести к симметричному виду (т.е. добиться, чтобы $R^{21}=R$); 2) скручивание посредством F сохраняет симметричный вид тогда и только тогда, когда $F^{21}=F$; 3) если $R^{21}=R$, то $\Delta'=\Delta$ и выполнено (2.10). Напомним также (см. § 2), что если $R^{21}=R$, то (1.6б) следует из (1.6а) и (2.10).

Пусть $\mathfrak{g}$ - алгебра Ли над k, $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ симметричен и $\mathfrak{g}$-инвариантен. Положим $A=(U\mathfrak{g})[[h]]$, определим обычным образом $\Delta:\Delta \longrightarrow A\otimes A$, $\varepsilon: A \longrightarrow k[[h]]$ и будем искать $\mathfrak{g}$-инвариантные элементы $R\in A\otimes A$, $\Phi\in A\otimes A\otimes A$ такие, что $R^{21}=R$, $R\equiv 1+ht/2 \mod h^2$, $\Phi\equiv 1 \mod h$, и выполнены уравнения (1.2), (1.4), (1.6а), (2.10) (мы не требуем, чтобы $R=e^{ht/2}$!).

П р е д л о ж е н и е 3.1. *Такие R и Φ существуют.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть уже построены $\mathfrak{g}$-инвариантные $R_n\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, $\Phi_n\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ такие, что $R_n^{21}=R_n$, $R_n\equiv 1+ht/2 \mod h^2$, $\Phi_n\equiv 1 \mod h$ и R_n,Φ_n удовлетворяют по модулю h^n уравнениям (1.2),(1.4),(1.6а),(2.10) (при $n=2$ можно положить $R_2\equiv 1+ht/2$, $\Phi_2=1$). Из доказательства предложения 3.10 работы [1] следует, что существует $\mathfrak{g}$-инвариантное $\bar{\Phi}_n\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, удовлетворяющее (1.2), (1.4), (2.10) по модулю h^{n+1} и такое, что $\bar{\Phi}_n\equiv\Phi_n \mod h^n$. Так как R_n и Φ_n

удовлетворяют (1.6a) по модулю h^n, то

$$(\Delta\otimes\mathrm{id})(R_n) \equiv \Phi_n^{312}R_n^{13}(\Phi_n^{132})^{-1}R_n^{23}\Phi_n+h^n\psi \bmod h^{n+1}, \tag{3.1a}$$

где $\psi\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным. Применив к обеим частям (3.1a) оператор, переставляющий первый и третий тензорные сомножители, получим

$$(\mathrm{id}\otimes\Delta)(R_n) \equiv (\bar\Phi_n^{231})^{-1}R_n^{13}\bar\Phi_n^{213}R_n^{12}\bar\Phi_n^{-1}+h^n\psi^{321} \bmod h^{n+1}. \tag{3.1б}$$

Будем искать R_{n+1}, Φ_{n+1} в виде $R_{n+1}=R_n+h^n r$, $\Phi_{n+1}=\Phi_n+h^n\varphi$, где $r\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, $\varphi\in\Lambda^3\mathfrak{g}\subset U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$. Элементы r и φ должны быть $\mathfrak{g}$-инвариантными и удовлетворять уравнениям

$$r^{21} = r, \tag{3.2}$$

$$r^{13} + r^{23} - (\Delta\otimes\,\mathrm{id})(r) + 3\varphi = \psi. \tag{3.3}$$

Для существования таких r и φ необходимо, чтобы

$$\psi^{234} - (\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})\,(\psi) + (\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})\,(\psi) - \psi^{124} = 0, \tag{3.4}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\psi) - \psi^{123} - \psi^{124} = (\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\psi^{321}) - \psi^{431} - \psi^{432}, \tag{3.5}$$

$$\alpha^{321} = -\alpha, \tag{3.6}$$

где $\alpha = \psi-\psi^{213}$. Покажем, что условия (3.4)-(3.6) и достаточны для существования r и φ. Действительно, (3.4) означает, что ψ - двумерный коцикл комплекса $C^*(\mathfrak{g})\otimes U\mathfrak{g}$, где

$$C^n(\mathfrak{g}) = (U\mathfrak{g})^{\otimes n},\quad d(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = 1\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n + \\ +\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes\Delta(a_i)\otimes a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n+(-1)^{n+1}a_1\otimes\ldots \\ \ldots\otimes a_n\otimes 1. \tag{3.7}$$

Поэтому из предложения 2.2 работы [1] следует, что $\alpha\in\Lambda^2\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, а $\psi-\alpha/2$ является кограницей, т.е.

$$\psi - \alpha/2 = \bar r^{13} + \bar r^{23} - (\Delta\otimes\mathrm{id})(\bar r). \tag{3.8}$$

При этом $\bar r$ можно выбрать $\mathfrak{g}$-инвариантным, для этого достаточно, чтобы при обычном отождествлении $U\mathfrak{g}$ с $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ (см. [16], гл. II, § 1, предложение 9) $\bar r$ переходил в элемент $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}\otimes\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$, образ которого в $\mathfrak{g}\otimes\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ равен 0. Так как $\alpha\in\Lambda^2\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, то из (3.6) следует, что $\alpha\in\Lambda^3\mathfrak{g}$. Положим $\varphi = \alpha/6$. Тогда (3.2) и (3.3) превращаются в следующие условия на $s = r-\bar r$:

$$s - s^{21} = \bar r^{21} - \bar r,\quad s\in\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}. \tag{3.9}$$

Для существования s, удовлетворяющего (3.9), необходимо и достаточно, чтобы $\bar r^{21}-\bar r\in(\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})\oplus(U\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})$, т.е. чтобы

$$(f\otimes f)(\bar r^{21}-\bar r) = 0, \tag{3.10}$$

где $f\colon U\mathfrak{g}\longrightarrow U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, $f(a)=a\otimes 1+1\otimes a-\Delta(a)$. Если (3.10) выполнено, то s можно выбрать $\mathfrak{g}$-инвариантным (достаточно, чтобы образ $s+\bar r$ в $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}\otimes\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ не содержал компоненты из $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$). Остается заметить, что (3.10) следует из (3.5), (3.8) и того, что $\alpha\in\Lambda^3\mathfrak{g}$.

Докажем теперь (3.4)-(3.6). Преобразовав с помощью (3.1а) обе части равенства $\Phi_n^{123}\cdot(\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\Delta\otimes\mathrm{id})(R_n)=(\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\Delta\otimes\mathrm{id})(R_n)\cdot\Phi_n^{123}$ и воспользовавшись (1.2),(1.5), получим (3.4). Выразим теперь $(\Delta\otimes\Delta)(R_n)$ через R_n^{13}, R_n^{14}, R_n^{23}, R_n^{24} двумя способами (можно применить сначала (3.1а), а потом (3.1б) или сначала (3.1б), а потом (3.1а)). Сравнив два выражения для $(\Delta\otimes\Delta)(R_n)$ и воспользовавшись (1.2), (1.5), получим (3.5). Аналогично доказательству формулы (3.12) работы [1], являющейся обобщением соотношения Янга-Бакстера, из (3.1а) выводится сравнение

$$R_n^{12}\Phi_n^{312}R_n^{13}(\Phi_n^{132})^{-1}R_n^{23}\Phi_n + h^n\alpha \equiv \Phi_n^{321}R_n^{23}(\Phi_n^{231})^{-1}R_n^{13}\Phi_n^{213}R_n^{12} \mod h^{n+1}. \tag{3.11}$$

Применив к обеим частям (3.11) оператор, переставляющий первый тензорный сомножитель с третьим, и воспользовавшись тем, что $R_n^{21}=R_n, \Phi_n^{321}\equiv\Phi_n^{-1}\mathrm{mod}\ h^{n+1}$, получим (3.6). •

Доказательство предложения 3.1 доставляет вполне конкретные Φ и R, выражающиеся через $\tau=ht$ с помощью $\mathbb{Q}$-универсальных формул $\Phi=\mathcal{M}(\tau), R=\mathcal{N}(\tau)$. Об этих формулах нам достаточно знать, что $\mathcal{M}(\tau)=1+O(\tau)$, $\mathcal{N}(\tau)=1+\tau/2+o(\tau)$, где $o(\tau)$ (соответственно $O(\tau)$) обозначает члены, содержащие τ в степени, большей 1 (соответственно большей или равной 1).

Предложение 3.2. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– алгебра Ли над* k, *а* $R\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ *и* $\Phi\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ *обратимы,* $\mathfrak{g}$*-инвариантны и удовлетворяют* (1.2), (1.4), (1.6). *Тогда скручиванием посредством некоторого* $\mathfrak{g}$*-инвариантного* $F\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ *можно превратить* Φ *и* R *в* $\mathcal{M}(h\theta)$ *и* $\mathcal{N}(h\theta)$, *где* θ *– некоторый* $\mathfrak{g}$*-инвариантный элемент* $(\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g})[[h]]$. *При этом* θ *определен однозначно, а* F *– с точностью до умножения на элементы вида* $(u^{-1}\otimes u^{-1})\Delta(u)$, *где* u *принадлежит центру* $(U\mathfrak{g})[[h]]$, $u\equiv1 \mod h$, $\varepsilon(u)=1$.

Доказательство. $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ можно привести к симметричному виду скручиванием посредством $\mathfrak{g}$-инвариантного элемента $(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (см. доказательство предложения 3.5 из [1]). Поэтому можно считать, что $R^{21}=R$ (тогда $\Phi^{321}=\Phi^{-1}$, а F должен быть симметричным). Затем все сводится к следующей лемме.

Лемма. *Пусть* (Φ_1,R_1) *и* (Φ_2,R_2) *удовлетворяют условиям предложения, причем* $R_1^{21}=R_1$, $R_2^{21}=R_2$, $\Phi_1\equiv\Phi_2 \mod h^n$, $R_1\equiv R_2 \mod h^n$. *Пусть* φ *и* r *– редукции* $\mathrm{mod}\ h$ *элементов* $h^{-n}(\Phi_1-\Phi_2)$ *и соответственно* $h^{-n}(R_1-R_2)$. *Тогда* r *является* $\mathfrak{g}$*-инвариантным элементом* $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$, *а* φ *можно представить в виде*

$$\varphi = f^{23} - (\Delta\otimes\mathrm{id})(f) + (\mathrm{id}\otimes\Delta)(f) - f^{12}, \tag{3.12}$$

где f *– симметричный* $\mathfrak{g}$*-инвариантный элемент* $U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(f)=0=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(f)$. *При этом* f *определен однозначно с точностью до замены*

$$\tilde{f} = f + \Delta(v) - v\otimes1 - 1\otimes v, \tag{3.13}$$

где v *принадлежит центру* $U\mathfrak{g}$, $\varepsilon(v)=0$.

Доказательство. Так как R_1 и R_2 удовлетворяют (1.6а), а Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют (2.10), то $(\Delta\otimes\mathrm{id})(r)-r^{13}-r^{23}=\mathrm{Alt}\ \varphi/2$. Левая часть этого равенства симметрична по первым двум тензорным сомножителям, а правая кососимметрична.

Поэтому обе части равны 0, т.е. $\mathrm{Alt}\ \varphi = 0$, $r\in\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$. Так как $r\in\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, $r^{21}=r$, то $r\in\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. Так как Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют (1.2),(1.4),(2.10), то

$$\varphi^{234} - (\Delta\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\varphi) + (\mathrm{id}\otimes\Delta\otimes\mathrm{id})(\varphi) - (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\Delta)(\varphi) + \varphi^{123}=0 \tag{3.14}$$

$$(\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id})(\varphi) = 0, \tag{3.15}$$

$$\varphi^{321}= -\varphi. \tag{3.16}$$

Применив к (3.14) отображения $\varepsilon\otimes\varepsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}$, $\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\varepsilon\otimes\varepsilon$ и воспользовавшись (3.15), получим

$$(\varepsilon\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})(\varphi) = 0 = (\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(\varphi). \tag{3.17}$$

(3.14) означает, что φ - трехмерный коцикл комплекса (3.7). Согласно предложению 3.11 из [1], если такой коцикл является $\mathfrak{g}$-инвариантным, удовлетворяет (3.15)-(3.17) и условию $\mathrm{Alt}\ \varphi = 0$, то его можно представить в виде (3.12), причем это представление единственно с точностью до (3.13). •

Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ имеют прежний смысл. Аналогично предложению 3.2 доказывается следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Пусть* $(\overline{\mathcal{M}}(\tau),\overline{\mathcal{N}}(\tau))$ *- произвольное k-универсальное решение уравнений* (1.2),(1.4),(1.6) *такое, что* $\overline{\mathcal{N}}(\tau)$ *симметрично,* $\overline{\mathcal{N}}(\tau)=1+\tau/2+o(\tau)$, $\overline{\mathcal{M}}(\tau)=1+O(\tau)$. *Тогда скручиванием посредством симметричного k-универсального* $F(\tau)$ *можно превратить* $(\overline{\mathcal{M}}(\tau),\overline{\mathcal{N}}(\tau))$ *в* $(\mathcal{M}(\tilde\tau),\mathcal{N}(\tilde\tau))$, *где* $\tilde\tau$ *выражается через* τ *с помощью k-универсальной формулы вида* $\tilde\tau = \tau+O(\tau)$. *При этом* $\tilde\tau$ *определяется по* $(\overline{\mathcal{M}},\overline{\mathcal{N}})$ *однозначно, а* $F(\tau)$ *- с точностью до умножения на* $(u^{-1}\otimes u^{-1})\cdot\Delta(u)$, *где* u *выражается через* τ *с помощью k-универсальной формулы вида* $u = 1+O(\tau)$. •

П р е д л о ж е н и е 3.4. *Пусть* $(\overline{\mathcal{M}}(\tau),\overline{\mathcal{N}}(\tau))$ *означает то же, что в предложении* 3.3. *Тогда* $\overline{\mathcal{N}}(\tau)=e^{\tilde\tau/2}$, *где* $\tilde\tau$ *выражается через* τ *посредством k-универсальной формулы вида* $\tilde\tau = \tau+o(\tau)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $R=e^{ht}$, где $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ симметричен и $\mathfrak{g}$-инвариантен, а $F\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ тоже симметричен и $\mathfrak{g}$-инвариантен, то в формуле (1.12) $\tilde R=R$, так как $[t,F]=0$ (достаточно воспользоваться формулой $t=(\Delta(C)-C\otimes1-1\otimes C)/2$, где $C\in U\mathfrak{g}$ - элемент Казимира, соответствующий t). Справедлив и k-универсальный вариант этого утверждения: $F(\tau)e^{\tau/2}F(\tau)^{-1}=e^{\tau/2}$ для любого k-универсального $F(\tau)$. Поэтому, применив предложение 3.3 в случае, когда $\overline{\mathcal{N}}(\tau)=e^{\tau/2}$, а $\overline{\mathcal{M}}(\tau)$ определяется с помощью системы KZ (см. § 2), получим, что $\mathcal{N}(\tilde\tau)=e^{\tau/2}$ для некоторого $\tilde\tau$ вида $\tau+o(\tau)$. Остается теперь применить предложение 3.3 к произвольной паре $(\overline{\mathcal{M}}(\tau),\overline{\mathcal{N}}(\tau))$. •

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы A′. В процессе доказательства предложения 3.1 построены $\mathbb{Q}$-универсальные $\Phi=\mathcal{M}(\tau)$ и $R=\mathcal{N}(\tau)$, удовлетворяющие (1.1)-(1.6), условию $R^{21}=R$, и такие, что $\mathcal{N}(\tau)=1+\tau/2+o(\tau)$, $\mathcal{M}(\tau)=1+O(\tau)$. Согласно предложению 3.4, найдется $\mathbb{Q}$-универсальное $\tilde\tau$ вида $\tau+o(\tau)$ такое, что $\mathcal{N}(\tilde\tau)=e^{\tau/2}$. Тогда $\Phi=\mathcal{M}(\tilde\tau)$, $R=e^{\tau/2}$ удовлетворяют (1.1)-(1.6). Единственность в теореме A′ следует из предложения 3.3. •

Из теоремы A′ следует утверждение о существовании в теореме A. Единственность вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.5. *Пусть* $\mathfrak{g}$ *– деформационная алгебра Ли над* $k[[h]]$ *(см. § 1), а* $R\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ *и* $\Phi\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ *обратимы,* $\mathfrak{g}$*-инвариантны и удовлетворяют* (1.2), (1.4), (1.6). *Тогда скручиванием посредством некоторого* $\mathfrak{g}$*-инвариантного* $F\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$ *можно превратить* Φ *и* R *в* $\mathcal{M}(h\theta)$ *и* $e^{h\theta/2}$*, где* θ *является* $\mathfrak{g}$*-инвариантным элементом* $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. *При этом* F *определен однозначно с точностью до умножения на элементы вида* $(u^{-1}\otimes u^{-1})\times\Delta(u)$*, где* u *принадлежит центру* $U\mathfrak{g}$, $u\equiv 1 \bmod h$, $\varepsilon(u)=1$.

Доказательство в целом такое же, как в рассмотренном выше (см. предложение 3.2) в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_0[[h]]$, где $\mathfrak{g}_0$ – алгебра Ли над k. Отличие в следующем. Пусть $R^{21}=R$ и $\Phi\equiv\mathcal{M}(h\theta_n) \bmod h^n$, $R\equiv\exp(h\theta_n/2) \bmod h^n$ для некоторого $\mathfrak{g}$-инвариантного $\theta_n\in\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. Пусть r и φ – классы вычетов mod h элементов $h^{-n}(R-\exp(h\theta_n/2))$ и $h^{-n}(\Phi-\mathcal{M}(h\theta))$ соответственно. Тогда, как и при доказательстве предложения 3.2, показывается, что r – инвариантный элемент $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}_0$, где $\mathfrak{g}_0=\mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$, а φ можно представить в виде (3.12), где f – симметричный инвариантный элемент $U\mathfrak{g}_0\otimes U\mathfrak{g}_0$, $(\varepsilon\otimes\mathrm{id})(f)=(\mathrm{id}\otimes\varepsilon)(f)=0$. Но чтобы построить $\mathfrak{g}$-инвариантные симметричные элементы $F_n\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, $\theta_{n+1}\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ такие, что $\tilde{\Phi}\equiv\mathcal{M}(h\theta_{n+1}) \bmod h^{n+1}$, $\tilde{R}\equiv\exp(h\theta_{n+1}/2) \bmod h^{n+1}$, где $\tilde{\Phi}$ и $\tilde{R}$ получаются скручиванием Φ и R посредством F_n, надо еще доказать, что $r\in\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}_0$ поднимается до инвариантного элемента $\underline{r}\in\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$, а $f\in\mathrm{Sym}^2(U\mathfrak{g}_0)$ можно выбрать так, чтобы его можно было поднять до инвариантного элемента $\underline{f}\in\mathrm{Sym}^2(U\mathfrak{g})$. В качестве $\underline{r}$ можно взять $\pi(h^{-n}(\ln R-\theta/2))$, где $\pi: U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ – проектор, определяемый с помощью отождествления $U\mathfrak{g}$ с $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}$ (мы вынуждены использовать π, так как еще не доказано, что $\ln R\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$). Покажем, что $\underline{f}$ существует, если f строить, как при доказательстве предложения 3.11 из [1]. Действительно, если обычным образом отождествить $U\mathfrak{g}_0$ с $\mathrm{Sym}^*\mathfrak{g}_0$, то $U\mathfrak{g}_0\otimes U\mathfrak{g}_0$ отождествится с $\mathrm{Sym}^*(\mathfrak{g}_0\otimes\mathfrak{g}_0)=\bigoplus_m \mathfrak{g}_0^{\otimes m}\otimes_{S_m}(\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$, $(U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3}$ – с $\bigoplus_m \mathfrak{g}_0^m\otimes_{S_m}(\mathbb{Q}^3)^{\otimes m}$, а f, построенное в [1], равно $L_0(\varphi)$, где $L_0\colon (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \longrightarrow (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 2}$ определяется с помощью некоторых S_m-эквивариантных операторов $\delta_m\colon (\mathbb{Q}^3)^{\otimes m} \longrightarrow (\mathbb{Q}^2)^{\otimes m}$. Поэтому можно положить $\underline{f} = \underline{L}(\underline{\varphi})$, где $\underline{\varphi} = h^{-n}(\Phi-\mathcal{M}(h\theta))$, а $L_0\colon (U\mathfrak{g}_0)^{\otimes 3} \longrightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes 2}$ определяется с помощью тех же δ_m.

Аналогичная проблема возникает при доказательстве единственности F с точностью до умножения на $(u^{-1}\otimes u^{-1})\Delta(u)$, и точно так же она решается. ●

Следствие. *В ситуации предложения* 3.5 $R^{21}R=e^{h\theta}$*, где* θ *является* $\mathfrak{g}$*-инвариантным элементом* $\mathrm{Sym}^2\mathfrak{g}$. *В частности, если* $R^{21}=R$*, то* $R=e^{h\theta/2}$.

Замечания. 1) Следствие означает, что если A – универсальная обертывающая алгебра с обычными Δ и ε, то из (1.1)-(1.6) следует равенство $(\Delta\otimes\mathrm{id})(\ln(R^{21}R))=\ln(R^{31}R^{13})+\ln(R^{32}R^{23})$. Автору не удалось вывести это равенство непосредственно из (1.1)-(1.6).

2) Аналогично предложению 3.5 доказывается его аналог для кограничных квазихопфовых QUE-алгебр в смысле § 3 из [1].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы Б. Пусть $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ - квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$. Положим $\bar{R}=R\cdot(R^{21}R)^{-1/2}$. Согласно предложению 3.3 из [1], $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,\bar{R})$ - кограничная квазихопфова QUE-алгебра. Поэтому в силу предложения 3.13 из [1] подходящим скручиванием можно превратить (A,Δ,ε) в $U\mathfrak{g}$ с обычными коумножением и коединицей, где $\mathfrak{g}$ - деформационная алгебра Ли. Остается воспользоваться предложением 3.5. ●

З а м е ч а н и я. 1) Можно доказать теорему Б, не используя предложение 3.5, а рассуждая, как при доказательстве предложения 3.13 из [1].

2) Нетрудно описать категорию квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр (предложение 3.14 из [1] и его доказательство остаются в силе в квазитреугольном случае).

§ 4. Группа Гротендика - Тейхмюллера

Пусть задана квазитензорная категория (см. § 1), т.е. категория C, функтор $\otimes$, изоморфизмы коммутативности и ассоциативности, а также единичный объект k и изоморфизмы $V\otimes k \xrightarrow{\sim} V$, $k\otimes V \xrightarrow{\sim} V$ для всех объектов V из C (при этом диаграммы (1.7)-(1.9) должны быть коммутативными). Попытаемся изменить изоморфизмы коммутативности и ассоциативности, не меняя остальные структуры, входящие в определение квазитензорной категории. Изменение изоморфизма ассоциативности $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$ сводится к его умножению на автоморфизм $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$. Заметим, что на $(V\otimes V)\otimes V$, где V - объект C, действует группа кос B_3: образующей $\sigma_1\in B_3$ соответствует $c\otimes\mathrm{id}$, где c - изоморфизм коммутативности $V\otimes V \xrightarrow{\sim} V\otimes V$, а образующей $\sigma_2\in B_3$ соответствует $a^{-1}(\mathrm{id}\otimes c)a$, где a - изоморфизм ассоциативности $(V\otimes V)\otimes V \xrightarrow{\sim} V\otimes(V\otimes V)$. Точно так же каждому $\alpha\in B_3$ сопоставляется изоморфизм $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_{i_1}\otimes V_{i_2})\otimes V_{i_3}$, где (i_1, i_2, i_3) - перестановка, соответствующая α^{-1}. Поэтому на $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3$ действует группа крашеных кос $K_3=\mathrm{Ker}(B_3 \longrightarrow S_3)$. Итак, выбор $\varphi\in K_3$ определяет новый изоморфизм ассоциативности. Аналогично выбор $\psi\in K_2$ определяет новый изоморфизм коммутативности. Любое $\psi\in K_2$ имеет вид $\psi = \sigma^{2m}$, где σ - образующая B_2, $m\in\mathbb{Z}$. Поэтому изменение изоморфизма коммутативности сводится к возведению его в степень $\lambda = 2m+1$. Любое $\varphi\in K_3$ имеет вид $\varphi = f(\sigma_1^2,\sigma_2^2)\cdot(\sigma_1\sigma_2)^{3n}$, где $n\in\mathbb{Z}$, а $f(X,Y)$ - элемент свободной группы с образующими X,Y (отметим, что $(\sigma_1\sigma_2)^3=(\sigma_2\sigma_1)^3$ порождает центр B_3). Для новых изоморфизмов коммутативности и ассоциативности диаграммы вида (1.8) по-прежнему коммутативны, а требование коммутативности (1.7) и (1.9) приводит к условиям на f,λ,n. Коммутативность (1.9а) приводит к условию $n=0$ и соотношению

$$f(X_1,X_2)X_1^m f(X_3,X_1)X_3^m f(X_3,X_2)^{-1}X_2^m = 1 \text{ при } X_1X_2X_3=1,\ m = \frac{\lambda-1}{2}. \tag{4.1}$$

Коммутативность (1.9б) приводит к тому же условию $n=0$ и соотношению

$$f(X_2,X_1)^{-1}X_1^m f(X_3,X_1)X_3^m f(X_3,X_2)^{-1}X_2^m = 1 \text{ при } X_1X_2X_3=1,\ m = \frac{\lambda-1}{2}. \tag{4.2}$$

(4.1) и (4.2) эквивалентны соотношениям

$$f(Y,X) = f(X,Y)^{-1}, \tag{4.3}$$

$$f(X_3,X_1)X_3^m f(X_2,X_3)X_2^m f(X_1,X_2)X_1^m = 1 \text{ при } X_1X_2X_3=1,\ m = \frac{\lambda-1}{2}. \tag{4.4}$$

Наконец, коммутативность (1.7) приводит к следующему условию на $\varphi\in K_3$:

$$\partial_3(\varphi)\cdot\partial_1(\varphi) = \partial_0(\varphi)\cdot\partial_2(\varphi)\cdot\partial_4(\varphi). \tag{4.5}$$

Здесь $\partial_0(\varphi)$ (соответственно $\partial_4(\varphi)$) получается из косы φ добавлением еще одной нити слева (соответственно справа) от имеющихся трех, а $\partial_i(\varphi)$ при $1\le i\le 3$ получаются из φ заменой i-й нити косы φ двумя нитями, одна из которых чуть левее другой (отметим, что K_n образуют косимплициальную группу, где гомоморфизмами граней являются $\partial_i: K_n \longrightarrow K_{n+1}$, а гомоморфизмы вырождения $K_{n+1} \longrightarrow K_n$ получаются удалением одной из $n+1$ нитей). Известно [20], что K_n порождается элементами x_{ij}, $1\le i<j\le n$, где

$$x_{ij} = (\sigma_{j-2}\ldots\sigma_i)^{-1}\,\sigma_{j-2}^2(\sigma_{j-1}\ldots\sigma_i) = (\sigma_{j-1}\ldots\sigma_{i+1})\sigma_i^2(\sigma_{j-1}\ldots\sigma_{i+1})^{-1}, \tag{4.6}$$

а определяющие соотношения между x_{ij} имеют вид

$$(a_{ijk},x_{ij}) = (a_{ijk},x_{ik}) = (a_{ijk},x_{jk}) = 1, \text{ где } i<j<k,\ a_{ijk}=x_{ij}x_{ik}x_{jk}, \tag{4.7}$$

$$(x_{ij},x_{k\ell}) = (x_{i\ell},x_{jk}) = 1 \text{ при } i<j<k<\ell, \tag{4.8}$$

$$(x_{ik},x_{ij}^{-1}\,x_{j\ell}\,x_{ij}) = 1 \text{ при } i<j<k<\ell. \tag{4.9}$$

Здесь (u,v) обозначает $uvu^{-1}v^{-1}$. В терминах x_{ij} (4.5) означает, что

$$f(x_{12},x_{23}x_{24})f(x_{13}x_{23},x_{34})=f(x_{23},x_{34})f(x_{12}x_{13},x_{24}x_{34})f(x_{12},x_{23}). \tag{4.10}$$

Итак, каждой паре $(\lambda,f),\lambda\in 1+2\mathbb{Z}$, удовлетворяющей (4.3), (4.4), (4.10), соответствует „естественный" способ построения по квазитензорной категории C новой квазитензорной категории C' за счет изменения только изоморфизмов коммутативности и ассоциативности („естественность" означает, что если $F: C_1 \longrightarrow C_2$ - тензорный функтор в смысле определния 1.8 из [6], то F - тензорный функтор из C_1' в C_2'). Нетрудно показать, что это соответствие биективно. Интерпретация пар (λ,f), удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), как способов изменения изоморфизмов коммутативности и ассоциативности, позволяет ввести на множестве таких пар структуру полугруппы $(\lambda_1,f_1)\cdot(\lambda_2,f_2)=(\lambda,f)$, где

$$\lambda = \lambda_1\lambda_2,\ f(X,Y)=f_1(f_2(X,Y)X^{\lambda_2}f_2(X,Y)^{-1},Y^{\lambda_2})\cdot f_2(X,Y). \tag{4.11}$$

Пусть теперь $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ удовлетворяет (1.1)-(1.6). Тогда A-модули образуют квазитензорную категорию (см. § 1). Если изменить изоморфизмы коммутативности и ассоциативности с помощью пары (λ,f), удовлетворяющей (4.3), (4.4), (4.10), то полученная квазитензорная категория соответствует $(A,\Delta,\varepsilon,\tilde\Phi,\tilde R)$, где

$$\tilde R = R\cdot(R^{21}\cdot R)^m = (R\cdot R^{21})^m\cdot R,\ m = (\lambda-1)/2, \tag{4.12a}$$

$$\tilde{\Phi} = \Phi\cdot f(R^{21}R^{12},\Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi) = f(\Phi R^{21}R^{12}\Phi^{-1},\ R^{32}R^{23})\cdot\Phi. \tag{4.12б}$$

Формулы (4.12) определяют действие полугруппы пар (λ,f), удовлетворяющих (4.3),(4.4),(4.10), на множестве наборов $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$, удовлетворяющих (1.1)-(1.6). К сожалению, эта полугруппа состоит только из единичного элемента $(\lambda=1,\ f=1)$ и инволюции $(\lambda=-1,\ f=1)$, переводящей $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ в $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,(R^{21})^{-1})$. Это вытекает из следующего предложения, так как в силу (4.10) $f(X,Y)$ принадлежит *коммутанту* свободной группы с образующими X,Y.

П р е д л о ж е н и е 4.1. *Уравнениям* (4.3),(4.4), *где* $f(X,Y)$ *принадлежит свободной группе с образующими* X *и* Y, *удовлетворяют только* $\lambda=\pm1$, $f(X,Y)=Y^rX^{-r}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если (λ,f) удовлетворяет уравнениям (4.3),(4.4), то им удовлетворяет и $(\lambda,\tilde{f})$, где $\tilde{f}(X,Y)=Y^{-s}f(X,Y)X^{s}$. Из (4.3) следует, что при подходящем s либо $\tilde{f}=1$, либо несократимая запись $\tilde{f}(X,Y)$ имеет вид $X^{\ell}\ldots Y^{-\ell}$, $\ell\neq0$. Так как $\tilde{f}$ удовлетворяет (4.4), то второй случай невозможен, а в первом случае $\lambda=\pm1$. ●

Заметим теперь, что если k - поле характеристики 0, то формулы (4.3), (4.4), (4.10), (4.11) имеют смысл, и если считать, что $\lambda\in k$, а $f(X,Y)$ принадлежит k-проунипотентному пополнению свободной группы с образующими X,Y, т.е. $f(X,Y)$ - формальное выражение вида $\exp F(\ln X,\ \ln Y)$, где F - лиевский формальный ряд над k. Тогда обе части (4.10) принадлежат k-проунипотентному пополнению K_4, т.е. имеют вид e^{v}, где v принадлежит фактору алгебры лиевских формальных рядов от переменных ξ_{ij}, $1\le i<j\le4$, по идеалу, соответствующему соотношениям (4.7)-(4.9) для $x_{ij}=\exp\xi_{ij}$.

Обозначим через $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ полугруппу пар (λ,f), удовлетворяющих (4.3),(4.4), (4.10), где $\lambda\in k$, а f принадлежит k-проунипотентному пополнению свободной группы. Группу обратимых элементов $\mathrm{GT}(k)$ обозначим $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ и назовем *k-проунипотентным вариантом группы Гротендика - Тейхмюллера*. Легко видеть, что $\mathrm{GT}(k)=\{(\lambda,f)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)\,|\,\lambda\neq0\}$. Оказывается (см. § 5,6), что группа $\mathrm{GT}(k)$ достаточно велика: она бесконечномерна, а гомоморфизм $\mathrm{GT}(k)\longrightarrow k^{*}$, переводящий (λ,f) в λ, сюръективен.

Если $(\lambda,f)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$, а $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ - квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$, то формулы (4.12) имеют смысл. Итак, $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ действует на множестве квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр. Скручивание (см.(1.10)-(1.12)) коммутирует с действием $\underline{\mathrm{GT}}(k)$. Пусть теперь A - это $U\mathfrak{g}$ с обычным коумножением, $R = e^{ht/2}$, $\Phi=\exp P(ht^{12},ht^{23})$, где $\mathfrak{g}$ - деформационная алгебра Ли над $k[[h]]$, $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ симметричен и $\mathfrak{g}$-инвариантен, а P - лиевский формальный ряд над k. Тогда $\tilde{R}$ и $\tilde{\Phi}$, определяемые формулами (4.12), имеют вид $\tilde{R}=e^{\lambda ht/2}$, $\tilde{\Phi}=\exp\tilde{P}(ht^{12},ht^{23})$, где $\tilde{P}$ - лиевский формальный ряд над k.

Интерпретируем элементы $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ как эндоморфизмы некоторого пополнения $B_n(k)$ группы B_n. Пусть λ,f удовлетворяют (4.3),(4.4),(4.10), причем $\lambda\in1+2\mathbb{Z}$, а $f(X,Y)$ принадлежит свободной группе с образующими X,Y (забудем, что таких пар (λ,f) всего две). Пусть V - объект квазитензорной категории C, $V^{\otimes2}=V\otimes V$, $V^{\otimes3}=V^{\otimes2}\otimes V$ и т.д. На $V^{\otimes n}$

действует B_n. Если изменить в C изоморфизмы коммутативности и ассоциативности с помощью (λ, f), то возникнет новое действие B_n на $V^{\otimes n}$. Оно получается из старого с помощью композиции с эндоморфизмом B_n, переводящим $\sigma_1 \longmapsto \sigma_1^{\lambda}$, $\sigma_i \longmapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1}\sigma_i^{\lambda} \times$ $\times f(y_i, \sigma_i^2)$ при $i>1$, где $y_i=\sigma_{i-1}\ldots\sigma_1\cdot\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}$(в обозначениях (4.6) $y_i=x_{1i}x_{2i}\ldots x_{i-1,i}$). Пусть теперь $K_n(k)$ - это k-проунипотентное пополнение K_n, а $B_n(k)$ - фактор полупрямого произведения B_n и $K_n(k)$ (поясним, что автоморфизмы $\mathrm{Ad}g: K_n \longrightarrow K_n$, $g\in B_n$, продолжаются на $K_n(k)$) по подгруппе элементов вида $x\cdot x^{-1}$, $x\in K_n$, где x рассматривается как элемент B_n, а x^{-1} - как элемент $K_n(k)$. Формулы

$$\sigma_1 \longmapsto \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_i \longmapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1}\sigma_i^{(\lambda)} f(y_i, \sigma_i^2), \quad 1 < i \le n, \tag{4.13}$$

где $\sigma_i^{(\lambda)}=\sigma_i\cdot(\sigma_i^2)^{(\lambda-1)/2}$, $y_i=\sigma_{i-1}\ldots\sigma_1\cdot\sigma_1\ldots\sigma_{i-1}$, определяют правое действие $\underline{\mathrm{GT}}(k)$ на $B_n(k)$, являющееся точным при $n\ge 3$. Эндоморфизмы (4.13) согласованы с вложениями $B_n(k) \longrightarrow B_{n+1}(k)$, переводящими σ_i в σ_i, и индуцируют тождественные автоморфизмы групп $S_n=B_n(k)/K_n(k)$. Автор не знает, любой ли набор автоморфизмов $\gamma_n\in\mathrm{Aut}\, B_n(k)$, обладающий этими свойствами, происходит из элемента $\mathrm{GT}(k)$ (возможно, методы [15] позволят это выяснить). Во всяком случае, эндоморфизмы $B_3(k)$, переводящие σ_1 в $\sigma_1^{(\lambda)}$ и индуцирующие тождественный автоморфизм S_3, имеют вид (4.13) или, что эквивалентно, вид

$$\sigma_1 \longmapsto \sigma_1^{(\lambda)}, \ \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \longmapsto \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \cdot [(\sigma_1\sigma_2)^3]^{(\lambda-1)/2} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \tag{4.14}$$

где f удовлетворяет (4.3) и (4.4). Обратно, из (4.3),(4.4) следует, что (4.14) определяет эндоморфизм $B_3(k)$.

Объясним теперь, следуя [2], как строится канонический гомоморфизм $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$, где $\bar{\mathbb{Q}}$ - алгебраическое замыкание $\mathbb{Q}$ в $\mathbb{C}$ (в дальнейшем эта конструкция не используется). Обозначим через $\widehat{\underline{\mathrm{GT}}}$ (соответственно $\underline{\mathrm{GT}}_\ell$) полугруппу пар (λ, f), удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), где f принадлежит проконечному пополнению (соотв. про-ℓ-пополнению) свободной группы, а $\lambda\in 1+2\hat{\mathbb{Z}}$ (соотв. $\lambda\in 1+2\mathbb{Z}_\ell$). Здесь $\hat{\mathbb{Z}} =$ $= \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Группы обратимых элементов в $\widehat{\underline{\mathrm{GT}}}$ и $\underline{\mathrm{GT}}_\ell$ обозначим $\widehat{\mathrm{GT}}$ и GT_ℓ. Имеем естественные гомоморфизмы $\widehat{\mathrm{GT}} \longrightarrow \mathrm{GT}_\ell$ и $\mathrm{GT}_\ell \hookrightarrow \mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$. Остается построить гомоморфизм $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$. Сначала напомним принадлежащую Г. В. Белому [21] конструкцию гомоморфизма $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{Aut}\,\hat{\Gamma}$, где Γ - фактор B_3 по центру, а $\hat{\Gamma}$ - проконечное пополнение Γ. Имеется канонический изоморфизм $\Gamma \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, x)$, где M - стэк, являющийся фактором $\mathbb{CP}^1-\{0,1,\infty\}$ по группе S_3 проективных преобразований, переставляющих $0,1,\infty$, а x - образ точки $\mathbb{CP}^1$, находящейся на действительной оси вблизи 0. Поэтому $\hat{\Gamma}=\mathrm{Gal}(F/E)$, где E - подполе S_3-инвариантов в $\bar{\mathbb{Q}}(z)$ (S_3 действует на z, как указано выше), а F - наибольшее алгебраическое расширение $\bar{\mathbb{Q}}(z)$ в $L =$ $=\bigcup_n \bar{\mathbb{Q}}((z^{1/n}))$, неразветвленное вне $0,1,\infty$. $\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на L, оставляя E и F инвариантными. Поэтому $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ действует на $\mathrm{Gal}\,(F/E)=\hat{\Gamma}$. Подгруппа $H\subset\Gamma$, топологически порожденная образом $\sigma_1\in B_3$, инвариантна относительно $\mathrm{Gal}\,(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, а действие Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ на фактор-группе S_3 группы $\hat{\Gamma}$ тождественно. Полугруппа эндоморфизмов $\varphi : \hat{\Gamma} \longrightarrow \hat{\Gamma}$ таких, что $\varphi(H)\subset H$, а действие φ на S_3 тождественно, антиизоморфна полугруппе пар (λ, f), удовлетворяющих (4.3) и (4.4), где $\lambda\in 1+2\hat{\mathbb{Z}}$, а f принадлежит проконечному пополнению свободной группы: паре (λ, f) соответствует (см. (4.14)) эндоморфизм $\varphi: \hat{\Gamma} \longrightarrow \hat{\Gamma}$ такой, что $\varphi(\bar{\sigma}_1)=\bar{\sigma}_1^{\lambda}$, $\bar{\varphi}(\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1)=\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2\bar{\sigma}_1 \times$ $\times f(\bar{\sigma}_1^2, \bar{\sigma}_2^2)$, где $\bar{\sigma}_i$ - образ σ_i в $\hat{\Gamma}$. Чтобы получить изоморфизм между группами обратимых элементов в этих полугруппах, скомпонуем построенный антигомоморфизм с отображением $y \longmapsto y^{-1}$.

Остается показать, что пары (λ, f), соответствующие элементам Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, удовлетворяют (4.10). Это можно извлечь из § 2 работы Гротендика [2]. В [2] предложено для любых g и ν рассмотреть „группоид Тейхмюллера" $T_{g,\nu}$, т.е. фундаментальный группоид стэка модулей $M_{g,\nu}$ компактных римановых поверхностей X рода g с ν отмеченными точками $x_1, \dots, x_\nu$. Фундаментальный группоид отличается от фундаментальной группы тем, что выбирается не одна, а несколько отмеченных точек. В данном случае удобно выбрать отмеченные точки „на бесконечности" (см. § 15 из [11]) в соответствии со способами „максимального вырождения" набора $(X, x_1, \dots, x_\nu)$. Поскольку вырождение набора $(X, x_1, \dots, x_\nu)$ приводит к уменьшению g и ν, группоиды $T_{g,\nu}$ при разных g и ν связаны некоторыми гомоморфизмами. Совокупность всех $T_{g,\nu}$ и всех таких гомоморфизмов названа в [2] башней Тейхмюллера. В [2] замечено, что имеется естественный гомоморфизм Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow G$, где G - группа автоморфизмов проконечного аналога башни Тейхмюллера ($T_{g,\nu}$ заменяется своим проконечным пополнением $\hat{T}_{g,\nu}$). В [2] сформулировано как правдоподобная гипотеза утверждение о том, что $\hat{T}_{0,4}$ и $\hat{T}_{1,1}$ в определенном смысле порождают всю башню $\{\hat{T}_{g,\nu}\}$, а все соотношения между образующими этой башни происходят из $\hat{T}_{0,4}$, $\hat{T}_{1,1}$ $\hat{T}_{0,5}$ и $\hat{T}_{1,2}$. Эта гипотеза, по-видимому, доказана в приложении B к физической работе [22]. Во всяком случае, легко убедиться, что $\hat{T}_{0,4}$ порождает подбашню $\{\hat{T}_{0,\nu}\}$, а все соотношения в $\{\hat{T}_{0,\nu}\}$ происходят из $\hat{T}_{0,4}$ и $\hat{T}_{0,5}$. Оказывается, $\widehat{\mathrm{GT}}$ - группа автоморфизмов башни $\{\hat{T}_{0,\nu}\}$. Действительно, такой автоморфизм однозначно определяется своим действием на $\hat{T}_{0,4}$, т.е. на $\hat{\Gamma}$. Это действие описывается парой (λ, f), удовлетворяющей (4.3) и (4.4), а (4.10) необходимо и достаточно, чтобы автоморфизм $\hat{T}_{0,4}$ продолжался до автоморфизма $\hat{T}_{0,5}$. Из гипотезы Гротендика следует, что группа автоморфизмов башни $\{\hat{T}_{g,\nu}\}$, согласованных с естественным гомоморфизмом $\hat{T}_{0,4} \longrightarrow \hat{T}_{1,1}$ (четверке точек на $\mathbb{P}^1$ сопоставляется двулистное накрытие $\mathbb{P}^1$, разветвленное в этих точках), тоже равна $\widehat{\mathrm{GT}}$: если автоморфизм $\hat{T}_{0,4}$ продолжается до автоморфизма $\hat{T}_{0,5}$, то он продолжается и до автоморфизма $\hat{T}_{1,2}$, ибо, как отмечено в [2], $M_{1,2}$ почти не отличается от $M_{0,5}$.

Гомоморфизм Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \widehat{\mathrm{GT}}$ инъективен по теореме Г.В.Белого [21]. Изучению ядра и образа гомоморфизма Gal $(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \longrightarrow \mathrm{GT}_\ell$ посвящен ряд работ (см. [11-14] и цитированную там литературу)).

§ 5. Доказательство теоремы A″

Пусть k – поле характеристики 0, $\mathrm{fr}_k(A,B)$ – алгебра лиевских формальных рядов над k от переменных A и B (fr – сокращение от free), $\mathrm{Fr}_k(A,B) = \exp \mathrm{fr}_k(A,B)$, а $M_1(k)$ – множество $\varphi\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$, удовлетворяющих (2.13) и (2.14), где

$$X^{ij} = X^{ji},\ [X^{ij},X^{r\ell}] = 0 \quad \text{при} \quad i\neq j\neq r\neq \ell, \qquad [X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] = 0 \quad \text{при} \quad i\neq j\neq r. \tag{5.1}$$

Пусть $\mathfrak{a}_n^k$ – пополнение (по естественной градуировке) алгебры Ли над k с образующими X^{ij}, $1\le i\le n$, $1\le j\le n$, $i\neq j$, и определяющими соотношениями (5.1). При $n\ge 3$ алгебры $\mathfrak{a}_n^k$ не свободны, но сводятся к свободным: $\mathfrak{a}_n^k$ – полупрямое произведение $\mathfrak{a}_{n-1}^k$ и топологически свободной алгебры, порожденной X_{in}, $1\le i\le n-1$ (последняя является идеалом в $\mathfrak{a}_n^k$). При $n=3$ есть более удобная реализация: $\mathfrak{a}_3^k$ – прямая сумма своего центра, порожденного элементом $X^{12}+X^{13}+X^{23}$, и топологически свободной алгебры, порожденной X^{12} и X^{23}. Поэтому (2.14а) эквивалентно двум равенствам, одно из которых получается подстановкой $X^{12}=A$, $X^{23}=B$, $X^{13}=-A-B$, а второе – подстановкой $X^{12}=X^{23}=0$. Второе равенство тавтологично, а первое имеет вид

$$e^{A/2}\varphi(C,A)e^{C/2}\varphi(C,B)^{-1}e^{B/2}\varphi(A,B) = 1, \quad \text{где} \quad A+B+C=0. \tag{5.2а}$$

Аналогично (2.14б) эквивалентно равенству

$$\varphi(B,A)^{-1}e^{A/2}\varphi(C,A)e^{C/2}\varphi(C,B)^{-1}e^{B/2} = 1, \quad \text{где} \quad A+B+C=0, \tag{5.2б}$$

получаемому подстановкой $X^{12}=C$, $X^{23}=B$, $X^{13}=A$. Из (5.2а) и (5.2б) следует (2.12). Если (2.12) выполнено, то (5.2а) и (5.2б) эквивалентны равенству

$$e^{A/2}\varphi(C,A)e^{C/2}\varphi(B,C)e^{B/2}\varphi(A,B) = 1, \quad \text{где} \quad A+B+C=0. \tag{5.3}$$

Итак, $M_1(k)$ – это множество $\varphi\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$, удовлетворяющих (2.12), (5.3) и (2.13). Пусть $M_\mu(k)$ – множество $\varphi\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$, удовлетворяющих (2.12), (2.13) и уравнению, получаемому из (5.3) заменой $e^{A/2}$, $e^{B/2}$, $e^{C/2}$ на $e^{\mu A/2}$, $e^{\mu B/2}$, $e^{\mu C/2}$. Положим $\underline{M}(k)=\{(\mu,\varphi)\,|\,\mu\in k,\ \varphi\in M_\mu(k)\}$, $M(k)=\{(\mu,\varphi)\in\underline{M}(k)\,|\,\mu\neq 0\}$. На $\underline{M}(k)$ действует $\underline{\mathrm{GT}}(k)$: элемент $(\lambda,f)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$ переводит $(\mu,\varphi)\in\underline{M}(k)$ в $(\lambda\mu,\bar\varphi)$, где $\bar\varphi(A,B)=f(\varphi(A,B)e^A\varphi(A,B)^{-1}, e^B)\cdot\varphi(A,B)$ (ср. с (4.12)).

П р е д л о ж е н и е 5.1. *Действие* $\mathrm{GT}(k)$ *на* $M(k)$ *свободно и транзитивно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $(\mu,\varphi)\in M(k)$, $(\bar\mu,\bar\varphi)\in M(k)$, то существует ровно одно f такое, что $\bar\varphi(A,B)=f(\varphi(A,B)e^A\varphi(A,B)^{-1},e^B)\cdot\varphi(A,B)$. Надо показать, что $(\lambda,f)\in\mathrm{GT}(k)$, где $\lambda=\bar\mu/\mu$. Докажем (4.10). Пусть G_n – полупрямое произведение S_n и $\exp\mathfrak{a}_n^k$. Имеется гомоморфизм $B_n\longrightarrow G_n$, переводящий σ_i в $\varphi(X^{1i}+\ldots+X^{i-1,i},X^{i,i+1})^{-1}\sigma^{i,i+1}\exp(\mu X^{i,i+1}/2)\times\varphi(X^{1i}+\ldots+X^{i-1,i},X^{i,i+1})$, где $\sigma^{ij}\in S_n$ переставляет i и j. Он индуцирует гомоморфизм $K_n\longrightarrow\exp\mathfrak{a}_n^k$ и, значит, гомоморфизм $\alpha_n\colon K_n(k)\longrightarrow\exp\mathfrak{a}_n^k$, где $K_n(k)$ – это k-проунипотентное пополнение K_n. Нетрудно показать, что левая и правая части (4.10) имеют одинаковые образы в

$\exp a_4^k$. Остается доказать, что α_n - изоморфизм. Алгебра $\mathrm{Lie}\ K_n(k)$ топологически порождена элементами ξ_{ij}, $1\le i<j\le n$, определяющие соотношения между которыми получатся, если в (4.7)-(4.9) подставить $x_{ij}=\exp\xi_{ij}$. Главные части этих соотношений такие же, как в (5.1), а $(\alpha_n)_*(\xi_{ij})=\mu X^{ij}$ + {младшие члены}, где $(\alpha_n)_*$: $\mathrm{Lie}\ K_n(k)\longrightarrow a_n^k$ индуцирован гомоморфизмом α_n. Поэтому α_n - изоморфизм, т.е. (4.10) доказано. (4.3) очевидно. Для доказательства равенства (4.4) можно интерпретировать его в терминах K_3 и рассуждать, как при доказательстве (4.10), или, что эквивалентно, сделать подстановку

$$X_1=e^A,\ \ X_2=e^{-A/2}\varphi(B,A)e^B\varphi(B,A)^{-1}e^{A/2},\ \ X_3=\varphi(C,A)e^C\varphi(C,A)^{-1}, \tag{5.4}$$

где $A+B+C=0$. ●

Отождествив $M_1(k)$ с фактором $M(k)$ по естественному действию k^* ($c\in k^*$ переводит (μ,φ) в $(c\mu,\tilde\varphi)$, где $\tilde\varphi(A,B)=\varphi(cA,cB)$), получим действие $\mathrm{GT}(k)$ на $M_1(k)$. Предложение 5.1 означает, что подгруппа $\mathrm{GT}_1(k)=\{(\lambda,f)\in\mathrm{GT}(k)\mid\lambda=1\}$ действует на $M_1(k)$ свободно и транзитивно, причем если $M_1(k)\ne\emptyset$, то последовательность $1\longrightarrow\mathrm{GT}_1(k)\longrightarrow\mathrm{GT}(k)\xrightarrow{\nu}k^*\longrightarrow1$, где $\nu(\lambda,f)=\lambda$, точна и каждому $\varphi\in M_1(k)$ соответствует гомоморфизм $\theta_\varphi\colon k^*\longrightarrow\mathrm{GT}(k)$ такой, что $\nu\circ\theta_\varphi=\mathrm{id}$, а $\theta_\varphi(k^*)$ - стационарная подгруппа φ в $\mathrm{GT}(k)$.

Алгебры Ли проалгебраических групп $\mathrm{GT}(k)$ и $\mathrm{GT}_1(k)$ обозначим $\mathfrak{gt}(k)$ и $\mathfrak{gt}_1(k)$. Подставив в (4.3), (4.4), (4.10) $f(X,Y)=\exp\varepsilon\psi(\ln X,\ \ln Y)$, $\lambda=1+\varepsilon s$ и линеаризовав по ε, получим, что $\mathfrak{gt}(k)$ состоит из пар (s,ψ), $s\in k$, $\psi\in\mathfrak{fr}_k(\alpha,\beta)$ таких, что

$$\psi(\alpha,\beta)=-\psi(\beta,\alpha), \tag{5.5}$$

$$\psi(\alpha,\beta)+\psi(\beta,\gamma)+\psi(\gamma,\alpha)+\tfrac{s}{2}(\alpha+\beta+\gamma)=0,\quad \text{где}\quad e^\alpha e^\beta e^\gamma=1, \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}\psi(\xi_{12},\ \xi_{23}*\xi_{24})+\psi(\xi_{13}*\xi_{23},\ \xi_{34})&=\psi(\xi_{23},\ \xi_{34})+\\ +\psi(\xi_{12}*\xi_{13},\ \xi_{24}*\xi_{34})&+\psi(\xi_{12},\ \xi_{23}).\end{aligned} \tag{5.7}$$

Здесь $u*v=\ln(e^ue^v)$, а ξ_{ij} удовлетворяют соотношениям, получаемым из (4.7)-(4.9) подстановкой $x_{ij}=\exp\xi_{ij}$. Коммутатор в $\mathfrak{gt}(k)$ имеет вид $[(s_1,\psi_1),\ (s_2,\psi_2)]=(0,\psi)$, где $\psi=[\psi_1,\psi_2]+s_2D(\psi_1)-s_1D(\psi_2)+D_{\psi_2}(\psi_1)-D_{\psi_1}(\psi_2)$, а D и D_ψ - дифференцирования $\mathfrak{fr}_k(\alpha,\beta)$ такие, что $D(\alpha)=\alpha$, $D(\beta)=\beta$, $D_\psi(\alpha)=[\psi,\alpha]$, $D_\psi(\beta)=0$.

Если $M_1(k)\ne\emptyset$, то последовательность

$$0\longrightarrow\mathfrak{gt}_1(k)\longrightarrow\mathfrak{gt}(k)\xrightarrow{\nu_*}k\longrightarrow0,\qquad \nu_*(s,\psi)=s \tag{5.8}$$

точна, а каждому $\psi\in M_1(k)$ соответствует ее расщепление, определяемое алгеброй Ли стационарной подгруппы φ в $\mathrm{GT}(k)$.

П р е д л о ж е н и е 5.2. *Построенное отображение* $M_1(k)\longrightarrow$ {*расщепления последовательности* (5.8)} *биективно. В частности, из точности* (5.8) *следует, что* $M_1(k)\ne\emptyset$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Наше отображение переводит $\varphi\in M_1(k)$ в расщепление, определяемое элементом $(1,\psi)\in\mathfrak{gt}(k)$; где ψ находится из условия

$$\varphi(A,B)^{-1}\cdot\ \frac{d}{dt}\ \varphi(tA,tB)|_{t=1} = \psi(A,\varphi(A,B)^{-1}B\varphi(A,B)). \tag{5.9}$$

Если ψ задано, то существует ровно одно $\varphi\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$, удовлетворяющее (5.9). В силу (5.5) равенство (5.9) остается в силе при замене $\varphi(A,B)$ на $\varphi(B,A)^{-1}$. Поэтому $\varphi(A,B)=\varphi(B,A)^{-1}$. Докажем (5.3). Левую часть (5.3) обозначим $Q(A,B)$. Тогда

$$Q(A,B)^{-1}\ \frac{d}{dt}\ Q(tA,tB)|_{t=1} = \psi(\bar{A},\bar{B}) + \psi(\bar{B},\bar{C}) + \psi(\bar{C},\bar{A}) + \frac{\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}}{2}, \tag{5.10}$$

где $\bar{A} = Q\ (A,B)^{-1}AQ\ (A,B)$, $\bar{B} = \varphi\ (A,B)^{-1}B\varphi\ (A,B)$, $\bar{C} = \varphi\ (A,B)^{-1}\ e^{-B/2}\ \times$ $\times\ \varphi(B,C)^{-1}C\varphi(B,C)e^{B/2}\varphi(A,B)$. Пусть уже доказано, что $Q(A,B)\equiv 1 \mod \deg n$ (т.е. $Q(A,B)=1$ + члены степени n и выше). Если $Q(A,B)\equiv 1+\bar{q}(A,B) \mod \deg(n+1)$, где q однороден степени n, то левая часть (5.10) сравнима с $n\cdot q(A,B) \mod \deg(n+1)$. Так как $e^{\bar{B}}e^{\bar{C}}=e^{-A/2}Q(A,C)e^{-A/2}Q(A.B)$, то обозначив через α,β,γ классы вычетов $A,\bar{B}-q(A,B),\bar{C}-q(A,C) \mod \deg(n+1)$, будем иметь $e^{\alpha}e^{\beta}e^{\gamma}=1$. Поэтому выполнено (5.6), где $s=1$. Отсюда правая часть (5.10) сравнима с $q(A,B)+q(A,C) \mod \deg(n+1)$. Из определения Q следует, что $q(A,C)=q(B,A)$. Итак, $q(B,A)=(n-1)\cdot q(A,B)$. Поэтому $q=0$ (при $n=2$ это следует из того, что $q(A,B)$ – *лиевский* многочлен и, следовательно, пропорционален $[A,B]$).

Остается доказать(2.13). Левую часть (2.13) обозначим f, а правую g. Пусть уже доказано, что $f\equiv g \mod \deg n$. Для доказательства сравнения $f\equiv g \mod \deg(n+1)$ достаточно показать, что $f(X^{12},X^{13},\dots,)^{-1}\cdot\ \frac{d}{dt}\ f(tX^{12},tX^{13},\dots)|_{t=1}\equiv$ $\equiv g(X^{12},X^{13},\dots)^{-1}\cdot\ \frac{d}{dt}\ g(tX^{12},tX^{13},\dots)|_{t=1} \mod \deg(n+1)$, т.е.

$$\psi(\alpha,\beta) + \psi(\gamma,\delta)\equiv\psi(\lambda,\delta) + \psi(\mu,\nu) + \psi(\alpha,\lambda) \mod \deg\ (n+1), \tag{5.11}$$

где

$$\alpha=X^{12},\quad \beta=f^{-1}\cdot(X^{23}+X^{24})\cdot f, \gamma = X^{13}+X^{23},\quad \delta = \varphi(X^{13}+X^{23},X^{34})^{-1}\cdot X^{34}\ \times$$
$$\times\ \varphi(X^{13}+X^{23},X^{34}),\quad \lambda = \varphi(X^{12},X^{23})^{-1}X^{23}\varphi(X^{12},X^{23}),\quad \mu=\varphi(X^{12},X^{23})^{-1}\ \times$$
$$\times(X^{12}+X^{13})\varphi(X^{12},X^{23}),\quad \nu=\varphi(X^{12},X^{23})^{-1}\varphi(X^{12}+X^{13},X^{24}+X^{34})^{-1}(X^{24}\ +$$
$$+\ X^{34})\varphi(X^{12}+X^{13},\ X^{24}+X^{34})\varphi(X^{12},X^{23}).$$

С помощью (2.12), (5.3) и сравнения $f\equiv g \mod \deg n$ строится (см. доказательство предложения 5.1) гомоморфизм $h:K_4(k)\longrightarrow \exp\ (\mathfrak{a}_4^k/I)$, где $I=\{a\in\mathfrak{a}_4^k|a\equiv 0 \mod \deg\ (n+1)\}$. Положив в (5.7) $\xi_{ij}=\ln\ h(x_{ij})$, где x_{ij} определены формулой (4.6), получим (5.11).●

Предложение 5.3. $M_1(k)\neq\varnothing$.

Доказательство. Так как $M_1(\mathbb{C})\neq\varnothing$ (см. § 2), то последовательность (5.8) точна при $k=\mathbb{C}$. Отсюда следует точность (5.8) при $k=\mathbb{Q}$. Поэтому $M_1(\mathbb{Q})\neq\varnothing$ (см. предложение 5.2) и тем более $M_1(k)\neq\varnothing$. Другой вариант доказательства: так как композиция гомоморфизма $\mathrm{Gal}\ (\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$ (см. § 4) и гомоморфизма $\nu:\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)\longrightarrow\mathbb{Q}_\ell^*$ – это гомоморфизм $f:\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell^*$, определяемый из соотношения $\sigma^{-1}(\zeta)=\zeta^{f(\sigma)}$, где $\zeta^{\ell^n}=1$, $\sigma\in\mathrm{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, то образ ν бесконечен, последовательность (5.8) точна при $k=\mathbb{Q}_\ell$

и т. д. ●

Итак, теорема A″ (см. § 1) доказана.

П р е д л о ж е н и е 5.4. *Множество* $M_1^+(k)=\{\varphi\in M_1(k)\,|\,\forall(-A,-B)=\varphi(A,B)\}$ *непусто. На нем действует группа* $\mathrm{GT}^+(k)=\{(\lambda,f)\in\mathrm{GT}(k)\,|\,f(X^{-1},Y^{-1})=f(X,Y)\}$, *причем действие на* $M_1^+(k)$ *подгруппы* $\mathrm{GT}^+(k)\cap\mathrm{GT}_1(k)$ *свободно и транзитивно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. $M_1^+(k)$ - множество σ-инвариантных элементов $M_1(k)$, где $\sigma\in\mathrm{GT}(k)$ - инволюция, соответствующая $\lambda=-1$, $f=1$. Так как (5.8) обладает σ-инвариантным расщеплением, то $M_1^+(k)\neq\varnothing$. Остальное очевидно. ●

З а м е ч а н и е. $\varphi_{KZ}(-A,-B)\neq\varphi_{KZ}(A,B)$ (см. (2.15), (2.17) или (2.18)).

Приведенное выше доказательство предложения 5.3 неконструктивно. Наша ближайшая цель - доказать предложение 5.8, показывающее, что при построении элементов $M_1(k)$ с помощью последовательных приближений никаких проблем не возникает. Для этого введем следующую модификацию $\mathrm{GRT}(k)$ группы $\mathrm{GT}(k)$. Обозначим через $\mathrm{GRT}_1(k)$ множество $g\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$ таких, что

$$g(B,A) = g(A,B)^{-1}, \tag{5.12}$$

$$g(C,A)g(B,C)g(A,B)=1 \text{ при } A+B+C=0, \tag{5.13}$$

$$A+g(A,B)^{-1}Bg(A,B)+g(A,C)^{-1}Cg(A,C)=0 \quad \text{при} \quad A+B+C=0, \tag{5.14}$$

$$g(X^{12},X^{23}+X^{24})\ g(X^{13}+X^{23},X^{34}) = g(X^{23},X^{34})\ g(X^{12}+X^{13},X^{24}+X^{34})\ g(X^{12},X^{2} \tag{5.15}$$

где X^{ij} удовлетворяют (5.1). $\mathrm{GRT}(k)$ - группа с операцией

$$(g_1\circ g_2)(A,B) = g_1(g_2(A,B)Ag_2(A,B)^{-1},B)\cdot g_2(A,B). \tag{5.16}$$

На $\mathrm{GRT}_1(k)$ действует k^* по формуле $\tilde g(A,B)=g(c^{-1}A,c^{-1}B)$, $c\in k^*$. Полупрямое произведение k^* и $\mathrm{GRT}_1(k)$ обозначим $\mathrm{GRT}(k)$. Алгебра Ли $\mathfrak{grt}_1(k)$ группы $\mathrm{GRT}_1(k)$ состоит из рядов $\psi\in\mathrm{fr}_k(A,B)$ таких, что

$$\psi(B,A) = -\psi(A,B), \tag{5.17}$$

$$\psi(C,A) + \psi(B,C) + \psi(A,B) = 0 \quad \text{при } A + B + C = 0, \tag{5.18}$$

$$[B,\psi(A,B)] + [C,\psi(A,C)] = 0 \qquad \text{при } A + B + C = 0, \tag{5.19}$$

$$\psi(X^{12},X^{23}+X^{24}) + \psi(X^{13}+X^{23},X^{34}) = \psi(X^{23},X^{34}) +$$

$$+ \psi(X^{12}+X^{13},X^{24} + X^{34}) + \Psi(X^{12},X^{23}), \tag{5.20}$$

где X^{ij} удовлетворяют (5.1). Коммутатор $\langle,\rangle$ в $\mathfrak{grt}_1(k)$ имеет вид

$$\langle\psi_1,\psi_2\rangle = [\psi_1,\psi_2] + D_{\psi_2}(\psi_1)-D_{\psi_1}(\psi_2), \tag{5.21}$$

где $[\psi_1,\psi_2]$ - коммутатор в $\mathrm{fr}_k(A,B)$, а D_ψ - дифференцирование $\mathrm{fr}_k(A,B)$ такое, что $D_\psi(A)=[\psi,A]$, $D_\psi(B)=0$. Алгебра $\mathfrak{grt}_1(k)$ градуирована, а алгебра Ли $\mathfrak{grt}(k)$ группы $\mathrm{GRT}(k)$ является полупрямой суммой одномерной алгебры k и $\mathfrak{grt}_1(k)$, где k действует на $\mathfrak{grt}_1(k)$ следующим образом: $1\in k$ переводит однородный элемент $\psi\in\mathfrak{grt}_1(k)$

степени n в $-n\psi$.

Замечания. 1) В $\mathfrak{g}t_1(k)$ имеется фильтрация, n-й член которой - это $\{(0,\psi)\in\mathfrak{g}t_1(k)\,|\,\psi\equiv 0 \mod \deg n\}$. По ней строится пополненная градуированная алгебра Ли $\widehat{\mathrm{gr}}\ \mathfrak{g}t_1(k)$. Будет показано (см. предложение 5.6), что $\mathrm{gr}\widehat{\ }\mathfrak{g}t_1(k)=\mathfrak{g}rt_1(k)$. Этим и мотивированы обозначения $\mathfrak{g}rt$, GRT. Включение $\widehat{\mathrm{gr}}\ \mathfrak{g}t_1(k)\subset\mathfrak{g}rt_1(k)$ доказать нетрудно: (5.19) следует из того, что $\psi(\alpha,\beta)-e^{-\beta}\psi(\alpha,\beta)e^{\beta} + e^{\gamma}\psi(\alpha,\gamma)e^{-\gamma}- \psi(\alpha,\gamma)=0$, где $(0,\psi)\in\mathfrak{g}t_1(k)$, $e^{\alpha}e^{\beta}e^{\gamma}=1$. Это в свою очередь вытекает из аналогичного утверждения о $\mathrm{GT}_1(k)$: если $(1,f)\in\mathrm{GT}_1(k)$, то $X_1\cdot f(X_1,X_2)^{-1}X_2f(X_1,X_2)\cdot f(X_1,X_3)^{-1}X_3f(X_1,X_3) = =X_1f(X_2,X_1) \times X_2f(X_3,X_2)X_3f(X_1,X_3)=f(\tilde{X}_2,X_1)f(X_3,\tilde{X}_2)f(X_1,X_3)=1$ при $X_1X_2X_3=1$, где $\tilde{X}_2=X_1X_2X_1^{-1}=X_3^{-1}X_2X_3$. Впрочем, (5.19) можно и не проверять (см. предложение 5.7).

2) Связь между $\mathrm{GT}_1(k)$ и $\mathrm{GRT}_1(k)$ можно объяснить также следующим образом: если $\{g_\varepsilon\}$ - семейство элементов $\mathrm{Fr}_k(A,B)$ такое, что $(1,f_\varepsilon)\in\mathrm{GT}_1(k)$ при $\varepsilon\neq o$, где $f_\varepsilon(X,Y)=g_\varepsilon(\varepsilon^{-1}\ln X,\ \varepsilon^{-1}\ln Y)$, то $g_0\in\mathrm{GRT}_1(k)$.

3) $\mathrm{GRT}_1(k)$, как и $\mathrm{GT}(k)$, обладает категорной интерпретацией. Пусть C - тензорная категория и заданы автоморфизмы $\tau_{V,W}\in\mathrm{Aut}(V\otimes W)$, функториальные по $V,W\in C$, причем $c_{V,W}\tau_{V,W}=\tau_{V,W}c_{V,W}$, $\ln\tau_{U\otimes V,W}=\mathrm{id}_U\otimes\ln\tau_{V,W} + (c_{U,V}^{-1}\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}_V\otimes\ln\tau_{U,W})(c_{U,V}\otimes\mathrm{id})$, где c - изоморфизм коммутативности (следовало бы, конечно, сформулировать условия на C и τ, достаточные, чтобы последнее равенство имело смысл; типичный пример: C - категория h-адически полных $U\mathfrak{g}$-модулей, а $\tau_{V,W}$ - оператор в $V\otimes W$, соответствующий $e^{ht}\in U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g}$ и t означают то же, что в § 1). Пусть имеют смысл выражения вида $g(\ln\tau_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W,\ \mathrm{id}_U\otimes\ln\tau_{V,W})$, где $g(A,B)\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$. Тогда если $g\in\mathrm{GRT}_1(k)$, то, взяв $g(\ln\tau_{U,V}\otimes\mathrm{id}_W,\ \mathrm{id}_U\otimes\ln\tau_{V,W})$ в качестве нового изоморфизма ассоциативности $(U\otimes V)\otimes W\xrightarrow{\sim}U\otimes(V\otimes W)$ и не изменив c и τ, мы придем к структуре того же типа, что исходная.

Формула $\tilde{\varphi}(A,B)=\varphi(g(A,B)Ag(A,B)^{-1},B)\cdot g(A,B)$, где $\varphi\in M_\mu(k)$, $g\in\mathrm{GRT}_1(k)$, определяет правое действие $\mathrm{GRT}_1(k)$ на $M_\mu(k)$. Тем самым $\mathrm{GRT}_1(k)$ действует справа на $\underline{M}(k)=\{(\mu,\varphi)\,|\,\varphi\in M_\mu(k)\}$. Формулы $\tilde{\varphi}(A,B)=\varphi(c^{-1}A,\ c^{-1}B)$, $\tilde{\mu}=c^{-1}\mu$, где $c\in k^*$, определяют действие k^* на $\underline{M}(k)$. В итоге получаем правое действие $\mathrm{GRT}(k)$ на $\underline{M}(k)$. Оно коммутирует с левым действием $\mathrm{GT}(k)$.

Предложение 5.5. *Действие* $\mathrm{GRT}(k)$ *на* $M(k)$ *свободно и транзитивно. То же верно для действия* $\mathrm{GRT}_1(k)$ *на* $M_1(k)$.

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение. Если $\varphi,\tilde{\varphi}\in M_1(k)$, то существует ровно одно $g\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$ такое, что $\tilde{\varphi}(A,B)=\varphi(g(A,B)Ag(A,B)^{-1},B)\cdot g(A,B)$, а именно

$$g(A,B) = \chi(\tilde{\varphi}(A,B)A\tilde{\varphi}(A,B)^{-1},B)\cdot\tilde{\varphi}(A,B), \tag{5.22}$$

где $\chi\in\mathrm{Fr}_k(A,B)$ обратно φ относительно операции (5.16), т.е. $\chi(\varphi(A,B)A\varphi(A,B)^{-1},B)\cdot\varphi(A,B)=1$. Рассуждая, как при доказательстве предложения 5.1, получим, что $(0,f)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$, где $f(X,Y)=\chi(\ln X,\ln Y)$. (5.22) означает, что g -

результат действия $(0,f)$ на φ и, значит, $g\in M_0(k)$, т.е. g удовлетворяет (5.12), (5.13). (5.15). Воспользуемся теперь равенством

$$\ln X_1+X_1^{1/2}f(X_1,X_2)^{-1}\ln X_2\cdot f(X_1,X_2)X_1^{-1/2}+f(X_1,X_3)^{-1}\times\ln X_3\cdot f(X_1,X_3)=0, \qquad (5.23)$$

где $X_1X_2X_3=1$, доказываемым подстановкой (5.4). Сделав в (5.23) подстановку типа (5.4) с заменой φ на $\overline{\varphi}$ и воспользовавшись (5.22), получим (5.14). ●

Из предложений 5.1 и 5.5 вытекает

Предложение 5.6. *Каждое* $\varphi\in M(k)$ *определяет изоморфизм* $s_\varphi:\mathrm{GRT}(k)\xrightarrow{\sim}\mathrm{GT}(k)$, *характеризуемый тем, что любое* $\gamma\in\mathrm{GRT}(k)$ *действует на* φ *справа так же, как* $s_\varphi(\gamma)$ *слева. Диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GRT}(k) \arrow[rr, "s_\varphi"] \arrow[dr] & & \mathrm{GT}(k) \arrow[dl] \\ & k^* & \end{tikzcd}$$

коммутативна, так что $s_\varphi(\mathrm{GRT}_1(k))=\mathrm{GT}_1(k)$. *Расщепление последовательности* (5.8), *соответствующее* $\varphi\in M_1(k)$, *определяется гомоморфизмом* $s_\varphi\circ i:k^*\longrightarrow\mathrm{GT}(k)$, *где* i – *каноническое вложение* $k^*\longrightarrow\mathrm{GRT}(k)$. $\widehat{gr}$ $\mathfrak{gt}_1(k)=\mathfrak{grt}_1(k)$, *причем если* $\varphi\in M_1(k)$, *то* s_φ *индуцирует тождественное отображение* $\mathfrak{grt}_1(k)\xrightarrow{\widehat{gr}}\mathfrak{gt}_1(k)$.

Предложение 5.7. *Из* (5.17), (5.18) *и* (5.20) *следует* (5.19).

Доказательство. Левую часть (5.19) обозначим $s(B,C)$. Тогда $s(B,C)=s(C,B)$. Кроме того,

$$s(Y_1,Y_2)-s(Y_1,Y_2+Y_3)+s(Y_1+Y_2,Y_3)-s(Y_2,Y_3)=0, \qquad (5.24)$$

где Y_i – образующие свободной алгебры Ли. Действительно, обозначим левую часть (5.24) через $u(Y_1,Y_2,Y_3)$. Тогда из (5.17) и (5.18) следует, что $u(X^{14},X^{24},X^{34})=$ $[X^{14}+X^{24}+X^{34},\mu^{1234}]-[X^{14}+X^{24},\mu^{1243}]+[X^{14},\mu^{1423}]$, где $\mu^{1234}=$\{левая часть (5.20)\} – \{правая часть (5.20)\}. Поэтому из (5.17), (5.18) и (5.20) следует (5.24). Остается доказать, что если симметричный лиевский многочлен $s(B,C)$ удовлетворяет (5.24), то $s=0$. Хорошо известно, что если $s(x,y)$ – обычный (коммутативный) многочлен от двух групп переменных $x=(x^{(1)},\dots,x^{(n)})$ и $y=(y^{(1)},\dots,y^{(n)})$ такой, что $s(y,x)=s(x,y)$ и выполнено (5.24), то s имеет вид $f(x+y)-f(x)-f(y)$. В этом можно убедиться (см. доказательство предложения 2.2 из [1]), представив пространство однородных многочленов $s(x,y)$ степени m в виде $V_m\otimes_{S_m}W_m$, где V_m – пространство многочленов от $x_1=(x_1^{(1)},\dots,x_1^{(n)}),\dots,$ $x_m=(x_m^{(1)},\dots,x_m^{(n)})$, линейных по каждому x_i, а W_m -некоторый S_m-модуль. Эти же рассуждения проходят и в лиевском случае (в качестве V_m надо взять пространство лиевских многочленов от m переменных, линейных по каждому переменному), но теперь $f(x)$ – *лиевский* многочлен от x, т.е. $f(x)=cx$, $c\in k$. Поэтому $s=0$. ●

Положим $\mathrm{fr}_k^{(r)}(A,B)=\mathrm{fr}_k(A,B)/I_r$, где $I_r=\{u\in\mathrm{fr}_k(A,B)\,|\,u\equiv0 \bmod \deg r\}$. Пусть $\mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B)=\exp\,\mathrm{fr}_k^{(r)}(A,B)$, а $M_1^{(r)}(k)$ – множество $\varphi\in\mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B)$, удовлетворяющих

(2.12), (5.3) и (2.13) mod deg r.

Предложение 5.8. *Отображение* $M_1^{(r+1)}(k)\longrightarrow M_1^{(r)}(k)$ *сюръективно.*

Доказательство. Аналогично $\mathrm{GRT}_1(k)$ рассмотрим группу $\mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$, состоящую из элементов $g\in\mathrm{Fr}_k^{(r)}(A,B)$, удовлетворяющих (5.12)-(5.15) mod deg n. Аналогично предложению 5.5 доказывается, что $\mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$ действует на $M_1^{(r)}(k)$ свободно и транзитивно. Остается доказать сюръективность гомоморфизма $\mathrm{GRT}_1^{(r+1)}(k)\longrightarrow\mathrm{GRT}_1^{(r)}(k)$. Так как обе группы унипотентны и, значит, связны, то достаточно доказать сюръективность гомоморфизма $\mathfrak{grt}_1^{(r+1)}(k)\longrightarrow\mathfrak{grt}_1^{(r)}(k)$. Действительно, из предложения 5.7 следует, что $\mathfrak{grt}_1^{(r)}(k)$ - это сумма однородных компонент $\mathfrak{grt}_1(k)$ степени меньшей, чем r. ●

Замечания. 1) Любое $\varphi\in M_1^{(r)}(k)$ такое, что $\varphi(-A,-B)=\varphi(A,B)$, можно поднять до $\bar\varphi\in M_1^{(r+1)}(k)$ такого, что $\bar\varphi(-A,-B)=\bar\varphi(A,B)$: достаточно положить $\bar\varphi(A,B)=(\tilde\varphi(A,B)+\tilde\varphi(-A,-B))/2$, где $\tilde\varphi$ - любой прообраз φ в $M_1^{(r+1)}(k)$.

2) Доказательство предложения 5.8 использует предложение 5.3. Стандартными методами теории деформаций можно, не используя предложение 5.3, показать, что препятствие к существованию у $\varphi\in M_1^{(r)}(k)$ прообраза в $M_1^{(r+1)}(k)$ принадлежит r-й компоненте группы 4-мерных когомологий следующего комплекса $\underline{L}^*$. Сначала рассмотрим комплекс L^*, где L^n - алгебраическая прямая сумма однородных компонент $\mathfrak{a}_n^k$, а дифференциал в L^* таков, что для любой k-алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и любого симметричного инвариантного $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ гомоморфизмы $\mathfrak{a}_n^k\longrightarrow(U\mathfrak{g})^{\otimes n}$, переводящие X^{ij} в t^{ij}, определяют морфизм из L^* в комплекс $C^*(\mathfrak{g})$ (см. 3.7)). $C^*(\mathfrak{g})$ содержит подкомплекс Харрисона-Барра $\underline{C}^*(\mathfrak{g})$ ($\oplus C^n(\mathfrak{g})$ - это свободная супералгебра Ли, порожденная векторным пространством $U\mathfrak{g}$, элементы которого считаются нечетными, а $\underset{n}{\oplus}C^n(\mathfrak{g})$ - свободная ассоциативная алгебра). В [23] построен проектор $e_n\in\mathbb{Q}[S_n]$ такой, что $\underline{C}^n(\mathfrak{g})=e_n\cdot C^n(\mathfrak{g})$, а именно $e_n=(n!)^{-1}\sum\limits_{\sigma}\varepsilon(\sigma)c_\sigma\cdot\sigma$, где $\sigma\in S_n$, $\varepsilon(\sigma)$ - знак σ, $c_\sigma=(-1)^a a!(n-1-a)!$, $a=\mathrm{Card}\ \{k|\sigma^{-1}(k)>\sigma^{-1}(k+1)\}$. Искомый комплекс $\underline{L}^*$ определяется формулой $\underline{L}^n=e_n\cdot L^n$. Автор не знает, равны ли 0 его 4-мерные когомологии H^4. Легко видеть, что $H^n=\underline{L}^n=0$ при $n<2$, $\dim H^2=\dim\underline{L}^2=1$, а H^3 - алгебраическая прямая сумма однородных компонент $\mathfrak{grt}_1(k)$.

Предложение 5.9. *Из* (5.12), (5.13) *и* (5.15) *следует* (5.14). *Иначе говоря,* $\mathrm{GRT}_1(k)=M_0(k)$.

Доказательство. Достаточно показать, что если $\varphi\in M_0(k)$, $\varphi\equiv1$ mod deg n, то результат действия на φ некоторого $g\in\mathrm{GRT}_1(k)$, где $g\equiv1$ mod deg n, сравним с 1 mod deg $(n+1)$. Действительно, пусть ψ - компонента степени n ряда $\ln\varphi\in\mathfrak{fr}_k(A,B)$. Тогда ψ удовлетворяет (5.17), (5.18), (5.20), а значит, и (5.19), т.е. $\psi\in\mathfrak{grt}_1(k)$. Поэтому можно положить $g=\mathrm{Exp}(-\psi)$, где Exp - экспоненциальное отображение $\mathfrak{grt}_1(k)\longrightarrow\mathrm{GRT}_1(k)$, соответствующее операции (5.16). ●

Замечания. 1) Воспользовавшись предложением 5.9 или методом его доказательства, легко получить доказательство предложения 5.5, которое проще приведенного выше, но использует предложение 5.7.

2) Вот схема другого доказательства предложения 5.2. Обозначим через $\mathrm{Spl}(k)$ множество гомоморфизмов $k \longrightarrow \mathfrak{gt}(k)$, расщепляющих (5.8). Положим $\mathrm{GT}_0(k)=\{(\lambda,f)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)\,|\,\lambda=0\}$, $\underline{\mathrm{GT}}_0'(k)=\{(0,f)\in\mathrm{GT}(k)\,|\,f$ удовлетворяет (5.23)$\}$. В процессе доказательства предложения 5.5 построено отображение $M_1(k) \longrightarrow \mathrm{GT}_0'(k)$. Нетрудно показать, что оно биективно. С другой стороны, элементу $\mathrm{Spl}(k)$ или, что то же самое, элементу $\mathfrak{gt}(k)$ вида $(1,\psi)$ соответствует однопараметрическая подгруппа $\gamma: k^* \longrightarrow \mathrm{GT}(k)$. A priori γ - формальное отображение (т.е. $\gamma(\lambda)$ выражается через формальные ряды по $\lambda-1$), но фактически γ регулярно и, более того, продолжается до регулярного (т.е. полиномиального) отображения $\underline{\gamma}: k^* \longrightarrow \underline{\mathrm{GT}}(k)$. Это следует из того, что $\gamma(\lambda)=(\lambda,f_\lambda)$, где $\lambda \dfrac{d}{d\lambda} f_\lambda(X,Y)=\psi(\lambda f_\lambda(X,Y)\cdot\ln X \cdot f_{\lambda\succ}(X,Y)^{-1},\ \lambda \ln Y)\times$ $\times f_{\lambda\succ}(X,Y)$. Положим $f=f_0$. Тогда $(0,f)\in\mathrm{GT}_0'(k)$. Действительно, так как $(\lambda,f_\lambda)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$ и $(-1,1)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$, то $(-\lambda,f_\lambda)=(-1,1)\cdot(\lambda,f_\lambda)\in\underline{\mathrm{GT}}(k)$ и, чтобы доказать (5.23), достаточно из равенства (4.4) для (λ,f_λ) вычесть (4.4) для $(-\lambda,f_\lambda)$, разделить на λ и устремить λ к 0. Композиция построенных отображений $\mathrm{Spl}(k) \longrightarrow \mathrm{GT}_0'(k) \longrightarrow M_1(k)$ обратна отображению $M_1(k) \longrightarrow \mathrm{Spl}(k)$, о котором идет речь в предложении 5.2.

3) На самом деле $\mathrm{GT}_0(k)=\mathrm{GT}_0'(k)$. Действительно, выберем $\varphi\in M_1(k)$, и пусть g - результат действия $(0,f)\in\mathrm{GT}_0(k)$ на φ. Тогда $g\in M_0(k)$. Поэтому $g\in\mathrm{GRT}_1(k)$ (см. предложение 5.9). Если $\tilde\varphi$ - результат правого действия g^{-1} на φ, то при левом действии $(0,f)$ на $\tilde\varphi$ получается 1, т.е. $(0,f)$ - это образ $\tilde\varphi$ при каноническом отображении $M_1(k) \longrightarrow \mathrm{GT}_0'(k)$.

4) Вот еще одно доказательство теоремы Б. Зафиксируем $\varphi\in M_1(k)$, и пусть $(0,f)$ - соответствующий элемент $\mathrm{GT}_0'(k)$. Пусть $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$ - квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$. Подействовав элементом $(0,f)\in\mathrm{GT}_0'(k)$ на $(A,\Delta,\varepsilon,\Phi,R)$(см. (4.12)), получим треугольную квазихопфову QUE-алгебру $(A,\Delta,\varepsilon,\bar\Phi,\bar R)$ (треугольность - это квазитреугольность плюс равенство $\bar R^{21}=\bar R^{-1}$). Согласно предложениям 3.6 и 3.7 из [1], можно подходящим скручиванием добиться, чтобы $\bar R=1$, $\bar\Phi=1$, причем тогда (A,Δ,ε) - универсальная обертывающая некоторой деформационной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ над $k[[h]]$. В этой ситуации положим $t=2h^{-1}\cdot\ln R$ и покажем, что t - симметричный $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, а $\Phi=\varphi(ht^{12},ht^{23})$. Так как $\bar R=1$, то $R^{21}=R$, т.е. $t^{21}=t$. Из (1.5) следует $\mathfrak{g}$-инвариантность t. Подставив в (5.23) $X_1=(\Delta\otimes\mathrm{id})(R^{21}R)^{-1}$, $X_2=(R^{12})^{-1}(\Phi^{213})^{-1}\times R^{31}R^{13}\Phi^{213}R^{12}$, $X_3=\Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi$ и воспользовавшись тем, что $X_1^{-1}\cdot R^{21}R^{12}$ коммутирует с X_1, X_2, X_3, получим, что $(\Delta\otimes\mathrm{id})(\ln\ (R^{21}R))=\bar\Phi^{-1}\cdot\ln(R^{32}R^{23})\cdot\bar\Phi+(R^{12})^{-1}(\bar\Phi^{213})^{-1}\cdot\ln(R^{31}R^{13})\cdot\bar\Phi^{213}\times R^{12}$, т.е. $(\Delta\otimes\mathrm{id})(t)=t^{13}+t^{23}$. Поэтому $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$. Имеем $\varphi(\chi(A,B)A\chi(A,B)^{-1},B)\cdot\chi(A,B)=1$, где $\chi(A,B)=f(e^A,e^B)$ (см. доказательство предложения 5.5). Положив $A=h\cdot\Phi t^{12}\Phi^{-1}$, $B=ht^{23}$, получим $\varphi(h\cdot\Phi t^{12}\bar\Phi^{-1},ht^{23})\cdot\bar\Phi\Phi^{-1}=1$, т.е. $\Phi=\varphi(ht^{12},ht^{23})$.

§ 6. Об алгебре $\mathfrak{grt}_1(k)$

Напомним, что $\mathrm{fr}_k(A,B)$ обозначает множество лиевских формальных рядов $\psi(A,B)$ с коэффициентами из k, а $\mathfrak{grt}_1(k)$ - это множество $\psi\in\mathrm{fr}_k(A,B)$, удовлетворяющих (5.17)-(5.20). Согласно предложению 5.7, из (5.17), (5.18), (5.20) следует (5.19). Кроме того, из (5.17) и (5.19) следует (5.18): действительно, из (5.17) и (5.19) легко вывести, что левая часть (5.18) коммутирует с A и B. $\mathfrak{grt}_1(k)$ - алгебра Ли с коммутатором (5.21). Множество всех $\psi\in\mathrm{fr}_k(A,B)$, удовлетворяющих (5.17), (5.19) и, следовательно, (5.18), тоже образует алгебру Ли с коммутатором (5.21). Эту алгебру обозначим $\mathrm{Ih}(k)$ в честь Ихары. Алгебры $\mathfrak{grt}_1(k)$ и $\mathrm{Ih}(k)$ градуированы: $\mathfrak{grt}_1(k)=\hat{\oplus}_n\mathfrak{grt}_1^n(k)$, $\mathrm{Ih}(k)=\hat{\oplus}_n\mathrm{Ih}^n(k)$, где $\hat{\oplus}$ обозначает пополненную прямую сумму. Так как $\mathrm{Ih}^1(k)$ порождается центральным элементом $A-B$, то изучение $\mathrm{Ih}(k)$ сводится к изучению подалгебры $\underline{\mathrm{Ih}}(k)=\hat{\oplus}_{n>1}\mathrm{Ih}^n(k)$. Отметим, что $\mathfrak{grt}_1(k)\subset\underline{\mathrm{Ih}}(k)$ (достаточно подставить в (5.20) $X^{12}=A$, $X^{13}=X^{14}=X^{23}=X^{24}=X^{34}=0$).

Ихара [13,14] использует следующую реализацию $\mathrm{Ih}(k)$. Он называет непрерывное дифференцирование $\partial:\mathrm{fr}_k(A,B)\longrightarrow\mathrm{fr}_k(A,B)$ *специальным*, если $\partial(A)=[R_1,A]$, $\partial(B)=[R_2,B]$, $\partial(C)=[R_3,C]$ для некоторых R_1,R_2, $R_3\in\mathrm{fr}_k(A,B)$, где $C=-A-B$. Специальные дифференцирования образуют алгебру Ли $\mathrm{SDer}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$. На $\mathrm{fr}_k(A,B)$ действует группа S_3, переставляя A,B,C. Поэтому S_3 действует на $\mathrm{SDer}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$ и на множестве внутренних дифференцирований $\mathrm{Int}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$. Оказывается, подалгебра S_3-инвариантов алгебры $\mathrm{SDer}\ \mathrm{fr}_k(A,B)/\mathrm{Int}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$ канонически изоморфна $\underline{\mathrm{Ih}}(k)$: элементу $\psi\in\underline{\mathrm{Ih}}(k)$ соответствует класс дифференцирования $\partial_\psi:\mathrm{fr}_k(A,B)\longrightarrow\mathrm{fr}_k(A,B)$ такого, что $\partial_\psi(A)=0$, $\partial_\psi(B)=[\psi,B]$. Действительно, $\mathrm{SDer}\ \mathrm{fr}_k(A,B)/\mathrm{Int}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$ можно отождествить с алгеброй дифференцирований $\partial:\mathrm{fr}_k(A,B)\longrightarrow\mathrm{fr}_k(A,B)$ таких, что $\partial(A)=0$, $\partial(B)=[\psi,B]$, $\partial(C)=[\chi,C]$ для некоторых $\psi,\chi\in\mathrm{fr}_k(A,B)$ и $\partial(B)\equiv0 \bmod \deg 3$. Такое ∂ определяется заданием $\psi,\chi\in\mathrm{fr}_k(A,B)$ таких, что $[\psi(A,B),B]+[\chi(A,B),C]=0$, $\psi\equiv0 \bmod \deg 2$, $\chi\equiv0 \bmod \deg 2$. Инвариантность ∂ относительно перестановки B и C означает, что $\chi(A,B)=\psi(A,C)$. Инвариантность ∂ по модулю $\mathrm{Int}\ \mathrm{fr}_k(A,B)$ относительно перестановки A и B означает, что $\psi(B,A)=-\psi(A,B)$. Наконец, $\partial_{<\psi_1,\psi_2>}=[\partial_{\psi_1},\partial_{\psi_2}]$: действительно, в (5.21) $D_\psi=\mathrm{ad}\,\psi-\partial_\psi$ и, следовательно, $<\psi_1,\psi_2>=$ $=\partial_{\psi_1}(\psi_2)-\partial_{\psi_2}(\psi_1)-[\psi_1,\psi_2]$.

З а м е ч а н и е. Если по правому действию (4.13) группы $GT_1(k)$ на пополненной свободной группе с образующими σ_1^2 и σ_2^2 построить обычным образом левое действие, а затем перейти от групп к алгебрам Ли и от фильтрованных алгебр к градуированным, то получится действие $\mathfrak{grt}_1(k)$ на $\mathrm{fr}_k(A,B)$, заданное формулой $\psi\longmapsto\partial_\psi$.

Перейдем к „гамильтоновой" интерпретации $\mathrm{Ih}(k)$. Для любой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ фактор $\mathfrak{a}\otimes\mathfrak{a}$ по подпространству, порожденному элементами вида $x\otimes y-y\otimes x$ и $[x,y]\otimes z-x\otimes[y,z]$, где $x,y,z\in\mathfrak{a}$. Образ $x\otimes y$ в $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ будем обозначать (x,y). Равенства $(x,y)=(y,x)$ и $([x,y],z)=(x,[y,z])$ позволяют рассматривать (x,y) как инвариантное скалярное произведение со значениями в $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ (любое k-значное инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{a}$ получается из него композицией с некоторым линейным функционалом $\mathcal{F}(\mathfrak{a}) \longrightarrow k$). Если $\mathfrak{a}$ - свободная алгебра Ли с образующими $Y_1,\dots,Y_m$, то вместо $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ будем писать $\mathcal{F}(Y_1,\dots,Y_m)$. Элемент $f\in\mathcal{F}(A,B)$ можно рассматривать как формулу, определяющую для каждой метризованной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (т.е. конечномерной алгебры Ли с невырожденным инвариантным скалярным произведением) функцию $f_{\mathfrak{g}}\colon \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \longrightarrow k$. Например, $f=([A,B],[A,B])\in\mathcal{F}(A,B)$ определяет функцию $f_{\mathfrak{g}}(x,y)=([x,y],[x,y])$. Нетрудно показать, что если $f\neq0$, то $f_{\mathfrak{g}}\neq0$ для некоторой метризованной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (в качестве $\mathfrak{g}$ можно взять $\mathfrak{gl}(n)$, где n достаточно велико). Если $\mathfrak{g}$ - метризованная алгебра Ли, то $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ отождествляется с $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ и, следовательно, в пространстве функций на $\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ имеется естественная скобка Пуассона („скобка Кириллова"). Если $f,\varphi\in\mathcal{F}(A,B)$, то $\{f_{\mathfrak{g}},\varphi_{\mathfrak{g}}\}=\psi_{\mathfrak{g}}$ для некоторого $\psi\in\mathcal{F}(A,B)$, не зависящего от $\mathfrak{g}$ и обозначаемого $\{f,\varphi\}$. Итак, $\mathcal{F}(A,B)$ - алгебра Ли относительно скобки Пуассона. Рассмотренное выше действие S_3 на $\mathrm{fr}_k(A,B)$ индуцирует действие S_3 на $\mathcal{F}(A,B)$.

П р е д л о ж е н и е 6.1. 1) *Действие S_3 на $\mathcal{F}(A,B)$ сохраняет скобку Пуассона.*

2) *Подалгебра S_3-инвариантов алгебры $\mathcal{F}(A,B)$ изоморфна $\bigoplus\limits_n \mathrm{Ih}^n(k)$, где $\oplus$ - алгебраическая прямая сумма.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Достаточно показать, что для любой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ действие S_3 на пуассоновой алгебре $\mathfrak{g}$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$, получающееся при отождествлении $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ с $\{(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\in\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^* \mid \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\}$ посредством проекции $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) \longmapsto (\lambda_1,\lambda_2)$, сохраняет скобку Пуассона. Это следует из того, что рассматриваемую пуассонову алгебру можно представить, как фактор пуассоновой алгебры $\mathfrak{g}$-инвариантных функций на $\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*\times\mathfrak{g}^*$ по идеалу функций, обращающихся в 0 при $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$ (пуассоновость этого идеала известна из теории гамильтоновой редукции).

2) Если $f\in\mathcal{F}(Y_1,\dots,Y_m)$, то обозначим через $\partial f/\partial Y_i$ лиевский многочлен от $Y_1,\dots,Y_m$ такой, что линейная по Z часть выражения $f(Y_1,\dots,Y_{i-1},Y_i+Z,Y_{i+1},\dots,Y_m)$ равна $(\partial f/\partial Y_i,Z)$. Из $\mathfrak{g}$-инвариантности $f_{\mathfrak{g}}$ для любой метризованной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ следует, что $\sum\limits_{i=1}^{m} [Y_i,\partial f/\partial Y_i]=0$.

Л е м м а. *Если $\sum\limits_{i=1}^{m} [Y_i,P_i]=0$, где P_i - лиевские многочлены от $Y_1,\dots,Y_m$, то существует ровно одно $f\in\mathcal{F}(Y_1,\dots,Y_m)$ такое, что $\partial f/\partial Y_i=P_i$ для всех i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обычная связь между полиномиальными и симметричными полилинейными функциями позволяет ограничиться случаем, когда P_1 не содержат Y_1, а $P_2,\dots,P_m$ и f линейны по Y_1. В этом случае если f существует, то $f=(Y_1,P_1)$. Обратно, если $f=(Y_1,P_1)$, то $\partial f/\partial Y_i=P_i$ для всех i. Действительно, положим $Q_i=P_i-\partial f/\partial Y_i$. Тогда $Q_1=0$, $\sum\limits_i [Y_i,Q_i]=0$. При $i>1$ запишем Q_i в виде

$R_i(\mathrm{ad}\,Y_2,\ldots,\mathrm{ad}\,Y_m)Y_1$, где R_i – ассоциативный многочлен. Тогда $\sum_{i=2}^{m} u_iR_i(u_2,\ldots,u_m)=0$, откуда $R_2=\ldots=R_m=0$. ●

Пусть $\psi\in\bigoplus_n \mathrm{Ih}^n(k)$. Тогда из леммы следует существование и единственность $f\in\mathcal{F}(A,B)$ такого, что $\partial f/\partial A=\psi(A,-A-B),\partial f/\partial B=\psi(B,-A-B)$. Ясно, что $f(B,A)=f(A,B)$. Кроме того, $f(A,B)=f(-A-B,B)$ (обе части этого равенства имеют одинаковые частные производные). Отсюда следует S_3-инвариантность f. Обратно, если $f\in\mathcal{F}(A,B)$ инвариантно относительно S_3, то, определив $\psi(A,B)$ из соотношения $\psi(A,-A-B)=\partial f/\partial A$, получим, что $\psi\in\mathrm{Ih}(k)$.

Для доказательства того, что скобка Пуассона в $\mathcal{F}(A,B)$ соответствует коммутатору в $\mathrm{Ih}(k)$, воспользуемся вложением $\mathrm{Ih}(k)\longrightarrow \mathrm{Der}\ \mathfrak{fr}_k(A,B)$, переводящим ψ в $\delta_\psi=\sigma\partial_\psi\sigma$, где $\partial_\psi\in\mathrm{Der}\ \mathfrak{fr}_k(A,B)$имеет прежний смысл, а σ – автоморфизм $\mathfrak{fr}_k(A,B)$ такой, что $\sigma(A)=-A-B$, $\sigma(B)=B$. Имеем $\delta_\psi(A)=[\psi(-A,-B,A),A]$, $\delta_\psi(B)=[\psi(-A,-B,B),B]$. Если ψ соответствует $f\in\mathcal{F}(A,B)$, то $\delta_\psi(A)=[A,\partial f/\partial f/\partial A]$, $\delta_\psi(B)=[B,\partial f/\partial B]$. Эти формулы можно рассматривать как уравнение Гамильтона, соответствующее f. Остается воспользоваться связью между скобкой Пуассона гамильтонианов и коммутатором соответствующих векторных полей. ●

З а м е ч а н и я. 1) Элемент $f\in\mathcal{F}(A,B)$, соответствующий $\psi\in\mathfrak{grt}_1^n(k)\subset\mathrm{Ih}(k)$ (см. доказательство предложения 6.1), допускает следующую интерпретацию. Пусть $\varphi\in M_1(k)$, а $\tilde\varphi$ получается из φ действием $\mathrm{Exp}(\psi)$, где Exp – экспоненциальное отображение $\mathfrak{grt}_1(k)\longrightarrow \mathrm{GRT}_1(k)$. Если $\mathfrak{g}$ – метризованная алгебра Ли над k, а $t\in\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$ соответствует скалярному произведению в $\mathfrak{g}$, то $\Phi=\varphi(ht^{12},ht^{23})$ и $\tilde\Phi=\tilde\varphi(ht^{12},ht^{23})$ связаны преобразованием (1.11) для некоторого $F\in(U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ (см. теорему А). Нетрудно показать, что F можно выбрать так, чтобы 1) $F\equiv1 \mod h^n$, 2) $h^{-n}(F-1) \mod h\in L_{n+1}$, где L_{n+1} – множество элементов $U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}$, являющихся многочленами степени не выше $n+1$ от элементов $\mathfrak{g}\otimes1$ и $1\otimes\mathfrak{g}$, 3) образ $h^{-n}(F-1) \mod h$ в $L_{n+1}/L_n=\mathrm{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g})= =\mathrm{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g}^*\otimes\mathfrak{g}^*)$, рассматриваемый как функция на $\mathfrak{g}\otimes\mathfrak{g}$, равнялся $-f_{\mathfrak{g}}$.

2) Делинь заметил, что, рнассуждая, как при доказательстве предложения 6.1, можно для любого n получить S_n-эквивариантный изоморфизм между фактором алгебры специальных дифференцирований $\mathfrak{fr}_k(A_1,\ldots,A_n)$ по идеалу внутренних дифференцирований и фактором $\mathcal{F}(A_1,\ldots,A_n)$ по подпространству, порожденному (A_i,A_i), $1\le i\le n+1$, где $A_{n+1} = -A_1 - \ldots - A_n$. Именно элементу $f\in\mathfrak{fr}_k(A_1,\ldots,A_n)$ соответствует дифференцирование $A_i \longmapsto [A_i,\ \partial f/\partial A_i]$, $1\le i\le n$.

П р е д л о ж е н и е 6.2. (Делинь-Ихара [13]). $\dim\ \mathrm{Ih}^n(k)=\alpha_n-\beta_{n+1}$, *где* $\alpha_n = (3n)^{-1}\cdot \{\sum_{d|n}(1 - a(d/3))\mu(d)2^{n/d}-\varepsilon_n\}$, $\beta_n = (6n)^{-1}\{\sum_{d|n}(1 + 3a(d/2) + 2a(d/3))\mu(d)2^{n/d}+2\varepsilon_n\}$, μ *– функция Мебиуса,* $a(x)=1$ *при* $x\in\mathbb{Z}$, $a(x)=0$ *при* $x\notin\mathbb{Z}$, $\varepsilon_n=-1$, *если* n *имеет вид* 3^m, $\varepsilon_n=2$ *при* $n=2\cdot3^m$, $\varepsilon_n=0$ *в остальных случаях.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V – двумерное векторное пространство с базисом A,B. На V действует S_3, переставляя A,B и $C=-A-B$. Пусть $L_n(V)$ – однородная компонента степени n свободной алгебры Ли, порожденной V, т.е. $L_n(V)=\mathrm{fr}^n_k(A,B)$. Формула $\psi \longmapsto A\otimes\psi(-A-B,A)+B\otimes\psi(-A,-B,B)$ определяет изоморфизм $\mathrm{Ih}^n(k) \xrightarrow{\sim}$ $\xrightarrow{\sim}(V\otimes L_n(V))^{S_3}\cap\mathrm{Ker} f$, где f - коммутаторное отображение $V\otimes L_n(V)\longrightarrow L_{n+1}(V)$. Так как f сюръективно, то $\dim \mathrm{Ih}^*(k)=\dim(V\otimes L_n(V))^{S_3} - \dim(L_{n+1}(V))^{S_3}$. Остается воспользоваться формулой для характера представления $\mathrm{GL}(V)$ в $L_n(V)$ ([16], гл. II, § 3, формула (16)). ●

Вот значения чисел $a_n=\dim \underline{\mathrm{Ih}}^n(k)$ при $n\le 13$: $a_1=a_2=a_4=a_6=0$, $a_3=a_5=a_8=1$, $a_7=a_{10}=2, a_9=4$, $a_{11}=9$, $a_{12}=7$, $a_{13}=21$. Базис в $\bigoplus_{n\le 7}\underline{\mathrm{Ih}}^n(k)$ образуют элементы $\mathrm{Ih}(k)$, соответствующие (см. предложение 6.1) элементам $f_1, f_2, f_3, f_4\in\mathcal{F}(A,B)$, где

$$f_1 = ([A,B],[A,B]), \tag{6.1}$$

$$f_2=(x,x)+(x,y)+(y,y), \text{ где } x = [A,[A,B]],\ y = [B,[A,B]], \tag{6.2}$$

$$f_3=(z,z), \text{ где } z = [A,[A,[A,B]]]+[A,[B,[A,B]]]+[B,[B,[A,B]]], \tag{6.3}$$

$$f_4 = ([A,u],[B,u]],u), \text{ где } u = [A,B]. \tag{6.4}$$

В процессе доказательства предложения 1 из [14] Ихара получил следующий результат.

Предложение 6.3. *Для любого нечетного $n\ge 3$ существует $\psi\in\mathfrak{grt}^n_1(k)$ такое, что* $\psi(A,B) \equiv \sum_{m=1}^{n-1} C^m_n(\mathrm{ad}\ A)^{m-1}(\mathrm{ad}\ B)^{n-m-1}[A,B] \bmod [\mathfrak{p}_k,\mathfrak{p}_k]$, *где $\mathfrak{p}_k$ - коммутант* $\mathrm{fr}_k(A,B)$.

Доказательство Ихары использует $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. Вот другое доказательство. Можно считать, что $k=\mathbb{C}$. Положим $\overline{\varphi}(A,B)=\varphi(-A,-B)$. Согласно предложению 5.5, $\overline{\varphi}$ получается из φ действием некоторого $g\in\mathrm{GRT}_1(\mathbb{C})$. Пусть $\tilde{\psi}$ - однородная компонента степени n образа g при логарифмическом отображении $\mathrm{GRT}_1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{grt}_1(\mathbb{C})$. Из (2.15) легко вывести, что $(n(2\pi i)^n/2\zeta(n))\cdot\tilde{\psi}$ является искомым. ●

Нетрудно показать, что если ψ_1, $\psi_2\in\mathfrak{p}_k$, то правая часть (5.21) принадлежит $[\mathfrak{p}_k,\mathfrak{p}_k]$. Поэтому из предложения 6.3 следует, что $\mathfrak{grt}_1(k)$ имеет по крайней мере одну образующую степени n для каждого нечетного $n\ge 3$.

Вопросы. *Верно ли, что $\mathfrak{grt}_1(k)$ имеет ровно одну образующую степени n для каждого нечетного $n\ge 3$ и не имеет образующих других степеней? Свободна ли алгебра $\bigoplus_n \mathfrak{grt}^n_1(k)$?*

Замечания. 1) Положительный ответ на первый вопрос эквивалентен конъюнкции гипотезы Делиня из введения к [14] и гипотезы о плотности по Зарисскому образа $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ в $\mathrm{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$.

2) При $n=1,2,4,6$ имеем $\mathfrak{grt}^n_1(k)=\underline{\mathrm{Ih}}(k)=0$. Так как $\dim \mathrm{Ih}^3(k)=\dim \mathrm{Ih}^5(k)=1$, то из предложения 6.3 следует, что $\mathfrak{grt}^n_1(k)=\underline{\mathrm{Ih}}^n(k)$ при $n=3,5$. Так как $\dim \mathrm{Ih}^8(k)=1$, а $[\mathrm{Ih}^3(k), \mathrm{Ih}^5(k)]\ne 0$ (см. [14]), то $\mathfrak{grt}^8_1(k)=\mathrm{Ih}^8(k)=[\mathfrak{grt}^3_1(k),\mathfrak{grt}^5_1(k)]$. Можно показать, что $\dim \mathfrak{grt}^7_1(k) = 1<\dim \mathrm{Ih}^7(k)$ и $\mathfrak{grt}^7_1(k)$ порождается элементом, соответствующим $8f_3-f_4\in\mathcal{F}(A,B)$, где f_3 и f_4 определяются формулами (6.3), (6.4).

Список литературы

[1] Дринфельд В.Г. Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, N 6. С.114-149.

[2] Grothendieck A. Esquisse d'un programme. Preprint. Paris: 1984. 57 p.

[3] Drinfeld V.G. Quantum groups//Proc.Internat. Congress of Math.(Berkeley, 1986). Vol.1. Providence: AMS, 1987. P.798-820.

[4] Faddeev L.D. Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory // Recent advances in field theory and statistical mechanics (Lectures in Les Houches, 1982). Amstemdam: Elsevier, 1984. P.563-608.

[5] Решетихин Н.Ю. Квазитреугольные алгебры Хопфа, решения уравнения Янга-Бакстера и инварианты связок // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, N 2. С.169-188.

[6] Deligne P., Milne J. Tannakian categories // Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. Lecture Notes in Math. Vol.900. Berlin: Springer, 1982. P.101-228. (Рус.пер.: Делинь П., Милн Дж.С.Категории Таннаки // Ходжевы циклы и мотивы. М.: Мир, 1985. С.94-201).

[7] Kohno T. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations// Ann.Inst.Fourier de Grenoble. 1987. Vol.37, N 4. P.139-160.

[8] Kohno T. Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups. Preprint. Nagoya: Nagoya University, 1988. 70 p.

[9] Tsuchiya A., Kanie Y. Vertex operators in two dimensional conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid groups // Conformal field theory and solvable lattice models. Advanced Studies in Pure Mathematics 16. Tokyo: Kinokuniya, 1988. P.297-372.

[10] Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B. Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions // Nucl.Phys. 1984. Vol.B247. P.83-103.

[11] Deligne P. Le groupe fondamentale de la droite projective moins 3 points // Galois groups over $\mathbb{Q}$. Mathematical Science Research Institute Publications 16. Berlin: Springer, 1989. P.79-298.

[12] Anderson G., Ihara Y. Pro-ℓ branched coverings of $\mathbb{P}^1$ and higher circular ℓ-units // Ann. of Math. 1988. Vol.128, N 2. P.271-293.

[13] Ihara Y. Some problems on three point ramifications and associated large Galois representations // Advanced Studies in Pure Mathematics 12. Tokyo: Kinokuniya, 1987. P.173-188.

[14] Ihara Y. The Galois representations arising from $\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree. // Galois groups over Q.Mathematical Science, Research Institite Publications 16.Berlin: Springer,1989. P.299-313.

[15] I h a r a Y. Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations. Preprint UTYO-MATH 88-18. Tokyo: Tokyo University, 1 9 8 8. 30 p.

[16] Б у р б а к и Н. Группы и алгебры Ли. Гл.1-3. М.:Мир, 1 9 7 6. 496 с.

[17] Kohno T. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures // Invent. math. 1 9 8 5. Vol.82. P.57-75.

[18] Б а х т у р и н Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1 9 8 5. 448 с.

[19] У и т т е к е р Е.Т., В а т с о н Г.Н. Курс современного анализа. Часть II. М.: Изд-во физ.-мат.лит., 1 9 6 3. 516 с.

[20] A r t i n E. Theory of braids // Ann. of Math. 1 9 4 7. Vol.48. P.101-126.

[21] Б е л ы й Г.В. О расширениях Галуа максимального кругового поля// Изв. АН СССР. Сер.мат. 1 9 7 9. Т.43, N 2. С.267-276.

[22] M o o r e G., S e i b e r g N. Classical and quantum conformal field theory. Preprint IASSNS-HEP-88/39. // Comm. Math.,Phys. 1 9 8 9. Vol.123. P.177-254.

[23] B a r r M. Harrison cohomology, Hochschild homology and triples // J.Algebra. 1 9 6 3. Vol.8. P.314-323.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР
310164, Харьков, пр.Ленина, 47

Поступило 12 декабря 1989 г.