S. Z. Levendorskii, Twisted function algebras on a compact quantum group and their representations,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 2, 180–198

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 2

СКРУЧЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ФУНКЦИЙ НА КОМПАКТНОЙ КВАНТОВОЙ ГРУППЕ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

С. З. Левендорский

В работе описываются неприводимые представления скрученных алгебр функций на компактных квантовых группах и изучается их связь с симплектическими листами соответствующих групп Пуассона–Ли. Показано, что неприводимые представления параметризуются неприводимыми представлениями квантовых торов.

Введение

0.1. Пусть G — связная односвязная простая комплексная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли, $\mathfrak{h}, \mathfrak{b}_+, \mathfrak{b}_-$ — фиксированные картановская и борелевские подалгебры $\mathfrak{g}$, $\Delta = \Delta_+ \cup \Delta_-$ — соответствующее разложение системы корней. Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$ — базис Вейля в $\mathfrak{g}$, и пусть $K \subset G$ и $\mathfrak{h}_R \subset \mathfrak{g}$ — максимальная компактная подгруппа и вещественная форма картановской подалгебры, соответствующие антилинейной картановской инволюции $\omega_0 : X_\alpha \mapsto -X_{-\alpha}$.

Известно, ([1], § 6,8), что для любой структуры группы Пуассона — Ли на K существует тензор $u \in \Lambda^2\mathfrak{h}_R$ такой, что соответствующая скобка при помощи внутреннего автоморфизма K и умножения скобки на число приводится либо к скобке, определяемой тензором u, либо к скобке, определяемой тензором

$$r_u = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\in\Delta_+} (X_\alpha \otimes X_{-\alpha} - X_{-\alpha} \otimes X_\alpha) + iu, \tag{0.1}$$

и наоборот, все такие скобки определяют на K структуры групп Пуассона-Ли. Обозначим эти группы $K(u), K(r_u)$. С помощью процедуры квантования В. Г. Дринфельда [1] по группе $K(r)(r = u, r = r_u)$ можно построить некоторую алгебру с инволюцией $\mathbb{C}[\underset{\sim}{K}(r)]_h$, $h > 0$, которую называют квантовой алгеброй регулярных функций на компактной группе K (см. [2-4], где это сделано в случае $r = r_0$). О других способах построения квантовых групп см. обзор [5] и работу [6].

0.2. В настоящей работе описываются симплектические листы группы $K(r_u)$ и неприводимые $*$-представления алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u} = \mathbb{C}[K(r_u)]_h$, $u \neq 0, h > 0$; эти описания в случае $u = 0$ получены в [3, 4, 7] и [3, 4] соответственно (случай $K = \mathrm{SU}(2)$, когда $\Lambda^2\mathfrak{h}_R = 0$, исследован ранее в [2]). В частности, в [4] для произвольной K установлено взаимно–однозначное соответствие между неприводимыми $*$-представлениями и симплектическими листами.

Ключевые слова: квантовая группа, группа Пуассона–Ли, неприводимое представление, симплектический лист, квантовый тор.

Мы показываем, что при переходе к случаю $u \neq 0$ существенно изменяется структура симплектических листов (например, лист группы $K(r_u), u \neq 0$, может „склеиваться" из серии листов группы $K(r_0)$), а неприводимые $*$-представления параметризуются неприводимыми $*$-представлениями так называемых квантовых торов (о них см., например, [8]) — эффект, не имеющий места в случае $u = 0$. В ситуации общего положения нет естественной параметризации неприводимых $*$-представлений симплектическими листами, но есть взаимно-однозначное соответствие между ядрами неприводимых $*$-представлений и замыканиями симплектических листов (в ситуации общего положения, но не всегда). Подробнее см. конец § 5.

0.3. В этом и следующем пунктах мы сформулируем основные результаты работы и сравним их с основными результатами работы [4].

Теорема 0.1 ([4], *теорема* 2.2). *Пусть* W *— группа Вейля группы* K, $K = \bigcup_{w\in W} K_w$ *— разложение Брюа* (см. [9]).
Тогда

а) *каждый симплектический лист из* $K(r_0)$ *целиком лежит в некотором классе Брюа* K_w*;*

б) *любой симплектический лист* $\Sigma \subset K_w$ *имеет вид* $t \cdot \Sigma_w$*, где* t *— элемент максимального тора* $T \subset K$*, а* $\Sigma_w \subset K_w$ *— симплектический лист, содержащий представитель элемента* w (*определенный как в* [9]).

Кроме того, в [4] дано описание листа Σ_w.

В § 1 будет показано, что симплектические листы $\Sigma(r_u)$ группы $K(r_u)$ получаются из симплектических листов $\Sigma = \Sigma(r_0)$ домножением на некоторые подгруппы максимального тора T. Чтобы их определить, отождествим с помощью Киллинга $\mathfrak{h}_R$ с $\mathfrak{h}_R^*$, определим по тензору $u \in \Lambda^2\mathfrak{h}_R$ оператор u в $\mathfrak{h}_R$ и построим для $w \in W$ подгруппу $T'_w = \exp(i(u - w^{-1}uw)\mathfrak{h}_R) \subset T$.

Следующая теорема будет доказана в § 1.

Теорема 0.2. а) *Каждый симплектический лист* $\Sigma(r_u)$ *лежит в некотором классе Брюа* K_w;

б) *если* $\Sigma(r_u) \subset K_w$*, то* $\Sigma(r_u)$ *проходит через точку вида* tw*, где* $t \in T$*, и имеет вид* $\Sigma(r_u) = T'_w \cdot t \cdot \Sigma_w$.

Заметим, что если ранг n алгебры Ли $\mathfrak{g}$ четен, то в ситуации общего положения $T'_w = T$ и $\Sigma(r_u) = K_w$, а если ранг нечетен, то в ситуации общего положения T'_w плотна в T и $\Sigma(r_u)$ плотен в K_w.

0.4. Из результатов работы [4] вытекает следующая теорема.

Теорема 0.3. *Каждое неприводимое $*$-представление алгебры* $\mathbb{C}[K]_h$ *в гильбертовом пространстве однозначно определяет пару* $(w,t) \in W \times T$*, и наоборот, по каждой паре* (w,t) *можно построить неприводимое $*$-представление алгебры* $\mathbb{C}[K]_h$ *в гильбертовом пространстве.*

Итак, если $u = 0$, то симплектические листы и неприводимые $*$-представления параметризуются точками множества $W \times T$. Прежде чем перейти к случаю $u \neq 0$, заметим, что точки тора T параметризуют неприводимые $*$-представления χ коммутативной алгебры $\mathbb{C}(T)$ (и параметризуются ими), поэтому мы могли бы параметризовать неприводимые $*$-представления алгебры $\mathbb{C}[K]_h$ парами (w, χ). В случае $u \neq 0$ неприводимые $*$-представления параметризуются парами (w, χ), где

$w \in W$, а χ — неприводимое $*$-представление (некоммутативной, если $u \neq w^{-1}uw$) $*$-алгебры — квантового тора [8], зависящего от h, u, w.

Прежде чем построить эту алгебру, напомним определение квантового тора. Пусть P — абелева группа и функция $\varkappa : P \times P \to R$ линейна по каждому аргументу и антисимметрична. Положим $\sigma(\lambda, \mu) = \exp(i\varkappa(\lambda, \mu))$ и обозначим через $A(P, \sigma)$ $*$-алгебру, порожденную образующими $U_\lambda, \lambda \in P$, и соотношениями $U_{-\lambda} = U_\lambda^*$,

$$U_\lambda^* U_\lambda = U_\lambda U_\lambda^* = I, \qquad U_\lambda U_\mu = \sigma(\lambda, \mu) U_{\lambda+\mu}.$$

Мы применяем это определение с P-множеством целочисленных весов алгебры $\mathfrak{g}$ и $\varkappa = h\theta_{u,w}$, где $\theta_{u,w}(\lambda, \mu) = ((u - w^{-1}uw)\lambda, \mu)$ (как и в п. 0.3, мы отождествляем $\mathfrak{h}$ и $\mathfrak{h}^*$).

Из теорем § 3, 4 следует

Теорема 0.4. *Каждое неприводимое $*$-представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ в гильбертовом пространстве однозначно определяет пару (w, χ), где $w \in W$, а χ — неприводимое $*$-представление алгебры $A(P, \sigma_{h,u,w})$ в (другом) гильбертовом пространстве, и наоборот, по любой такой паре (w, χ) можно построить неприводимое $*$-представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$.*

В § 3,4 приведены процедуры построения пары (w, χ) по π и представления π по паре (w, χ).

0.5. Итак, соответствие „симплектический лист — $*$-представление алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$“ определяется соответствиями „симплектический лист, лежащий в K_w — $*$-представление алгебры $A(P, \sigma_{h,u,w})$“. Если $u \neq 0, w \neq e$, то в ситуации общего положения пополнения этих алгебр не являются C^*-алгебрами типа 1 (см. § 5), и эти соответствия не являются взаимно-однозначными (кроме того, для алгебр не типа 1 трудно получить хорошее описание множества неприводимых $*$-представлений — см. [10]). В этом случае естественно рассматривать соответствие „ядро неприводимого $*$-представления — замыкание симплектического листа“, но даже оно не всегда взаимно-однозначно (см. конец § 5).

0.6. План работы: в § 1 исследуется структура симплектических листов с помощью теоремы из [11], в § 2 строится алгебра $\mathbb{C}[K]_{h,u}$, в § 3, 4 исследование неприводимых $*$-представлений алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ сводится к исследованию неприводимых $*$-представлений квантовых торов, в § 5 исследуются последние и рассматривается связь между представлениями и листами. В § 3 и начале § 4 исследование идет по аналогии с [4]; в дальнейшем существенна специфика квантовых торов.

0.7. Автор выражает глубокую благодарность В. Г. Дринфельду за предложение рассмотреть алгебру $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ и обсуждение результатов, а Я. С. Сойбельману — за многочисленные консультации.

§ 1. Симплектические листы группы Пуассона-Ли $\mathbb{C}[K]_{h,u}$

1.1. Сначала заметим, что симплектические листы не изменятся при замене тензора r_u на тензор $2ir_u$. Далее, обозначим через $\mathfrak{g}_1 (\subset \mathfrak{g}^R)$ алгебру Ли группы K и через $2i\tilde{r}_u : \mathfrak{g}_1^* \to \mathfrak{g}_1$ — оператор, определенный тензором $2ir_u$. Тензор $2ir_u$ определяет на алгебре регулярных функций $\mathbb{C}[K]$ скобку Пуассона

$$\{l_1(\rho_1(g)v_1), \quad l_2(\rho_2(g)v_2)\} = \langle l_1 \otimes l_2, [\rho_1(g) \otimes \rho_2(g), \quad (\rho_1 \otimes \rho_2)(2ir_u)] v_1 \otimes v_2 \rangle,$$

где $l_j(\rho_j(g)v_j)$ — матричные элементы представлений ρ_j; в свою очередь скобка Пуассона индуцирует в двойственном векторном пространстве $\mathfrak{g}_1^*$ структуру алгебры Ли (см., например, [7]):

$$[x,y]_u = \mathrm{ad}^*_{2i\tilde{r}_u y}x - \mathrm{ad}^*_{2i\tilde{r}_u x}y. \tag{1.1}$$

В п.1.2 будет построена подалгебра Ли $\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{g}_{2,u} \subset \mathfrak{g}^R$ такая, что

а) $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g}_1 \otimes \mathfrak{g}_2$ как векторные пространства;

б) $\mathfrak{g}_2$ изоморфна алгебре Ли $\mathfrak{g}_1^*$ со скобкой (1.1);

в) $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ — изотропные подпространства относительно невырожденной билинейной формы $\mathrm{Im}Q$, где Q — форма Киллинга на $\mathfrak{g}$.

Если выполнены условия а)–в), то говорят, что $(\mathfrak{g}^R, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ — тройка Манина [1]. По тройке Манина мы можем построить так называемую двойную группу Ли $G^R = KB_u$, где $B_u \subset G^R$ — подгруппа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}_{2,u}$.

Теперь симплектический лист $\Sigma_x(r_u)$ группы $K(r_u)$, проходящий через точку x, может быть определен с помощью известной формулы Семенова–Тян–Шанского $\Sigma_x(r_u) = B_u x B_u \cap K$; мы будем применять ее в виде

$$\Sigma_x(r_u) = \{x' \in K | y, y' \in B_u : yx = x'y'\}. \tag{1.2}$$

1.2. Пусть $\alpha_j, 1 \leqslant j \leqslant n = \mathrm{rang}\mathfrak{g}$ — простые корни и $H_j = [X_{\alpha_j}, X_{-\alpha_j}]$. Положим $V_{\alpha 1} = X_\alpha - X_{-\alpha}$, $V_{\alpha 2} = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Тогда $\{V_{\alpha 1}, V_{\alpha 2}, iH_j\}_{\alpha\in\Delta_+, 1\leqslant j\leqslant n}$ — базис в $\mathfrak{g}_1$, и если

$$u = \sum_{1\leqslant r<s\leqslant n} u_{rs} H_r \wedge H_s,$$

то

$$2ir_u = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+} V_{\alpha 1}\wedge V_{\alpha 2} + 2\sum_{1\leqslant p<s\leqslant n} u_{ps}(iH_p)\wedge(iH_s). \tag{1.3}$$

Форма Киллинга определяет изоморфизм $\mathcal{I} : \mathfrak{h}_R \to \mathfrak{h}_R$, а тензор $u \in \Lambda^2\mathfrak{h}_R$ — оператор $\tilde{u} : \mathfrak{h}_R^* \to \mathfrak{h}_R$. Положим $\mathfrak{h}_{R,u} = (I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})\mathfrak{h}_R, \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_{R,u} \oplus \mathfrak{n}_+$, где $\mathfrak{n}_+$ — нильпотентная подалгебра, и покажем, что тройка $(\mathfrak{g}^R, \mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2)$ удовлетворяет условиям а)–в), п.1.1.

Условие а) выполнено, так как $\mathfrak{g}^R = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{h}_R \oplus \mathfrak{n}_+, \mathfrak{g}_1 \supset i\mathfrak{h}_R$, и $i\mathfrak{h}_R \oplus \mathfrak{h}_R = i\mathfrak{h}_R \oplus \mathfrak{h}_{R,u}$; проверим условие в). $\mathfrak{g}_1$ изотропно, так как $Q(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) < 0$, а изотропность $\mathfrak{g}_2$ будет доказана вместе с изотропностью $\mathfrak{h}_{R,u}$, поскольку

$$Q(X_\alpha, X_{-\beta}) = \delta_{\alpha\beta}, \quad Q(X_\alpha, \mathfrak{h}) = 0, \tag{1.4}$$

и, следовательно, для любых $x_1, x_2 \in \mathfrak{h}_{R,u}, n_1, n_2 \in \mathfrak{n}_+$

$$Q(x_1 + n_1, x_2 + n_2) = Q(x_1, x_2) + Q(x_1, n_2) + Q(x_2, n_1) + Q(n_1, n_2) = 0.$$

Пусть $x_j \in \mathfrak{h}_R$ и $y_j = (I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})x_j \in \mathfrak{h}_{R,u}, j = 1,2$. Так как $\Im Q(\mathfrak{h}_R, \mathfrak{h}_R) = 0$ и $u \in \Lambda^2\mathfrak{h}_R$, имеем

$$\begin{aligned}\Im Q(y_1, y_2) &= \Im Q(x_1, 2i\tilde{u}\mathcal{I}x_2) + \Im Q(2i\tilde{u}\mathcal{I}x_1, x_2) = \\ &= 2Q(x_1, \tilde{u}\mathcal{I}x_2) + 2Q(\tilde{u}\mathcal{I}x_1, x_2) = 0.\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathfrak{h}_{R,u}$ и $\mathfrak{g}_2$ изотропны и условия а), в) выполнены.

В силу условий а), в) мы можем отождествить $\mathfrak{g}_2$ и $\mathfrak{g}_1^*$ как векторные пространства при помощи формы $\Im Q$, поэтому условие б) будет проверено, если мы покажем, что при таком отождествлении скобка (1.1) на $\mathfrak{g}_1^*$ совпадает с исходной скобкой на $\mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{g}^R$. При указанном отождествлении $\forall z \in \mathfrak{g}_1, \forall x, y \in \mathfrak{g}_2$.

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{ad}^*_{2i\tilde{r}_u y} x, z\rangle &= \Im Q(x, [2i\tilde{r}_u y, z]) = \\ &= -\Im Q([2i\tilde{r}_u y, x], z),\end{aligned}$$

и так как $\Im Q(\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_1) = 0$, то

$$\mathrm{ad}^*_{2i\tilde{r}_u y} x = [2i\tilde{r}_u y, x] \mod \mathfrak{g}_1. \tag{1.5}$$

Заменим операторы в правой части (1.1) с помощью (1.5):

$$[x, y]_u = [2i\tilde{r}_u, y, x] - [2i\tilde{r}_u x, y] \qquad \mod \mathfrak{g}_1. \tag{1.1'}$$

Мы должны доказать равенство

$$\Im Q([x, y], z) = \Im Q([x, y]_u, z) \quad \forall x, y \in \mathfrak{g}_2, \quad \forall z \in \mathfrak{g}_1;$$

в силу изотропности $\mathfrak{g}_1$ и $(1.1)'$ достаточно показать, что $\forall x, y \in \mathfrak{g}_2$

$$[x, y] = [2i\tilde{r}_u y, x] - [2i\tilde{r}_u x, y] \qquad \mod \mathfrak{g}_1. \tag{1.6}$$

Проверку (1.6) достаточно сделать для векторов любого базиса подпространства $\mathfrak{g}_2$; наиболее удобен ввиду (1.3) базис, биортогональный относительно $\Im Q$ базису $\{V_{\alpha 1}, V_{\alpha 2}, iH_j\}$ в $\mathfrak{g}_1$. Чтобы его построить, обозначим через $\omega_j, 1 \leqslant j \leqslant n$, фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и положим $\omega_{j,u} = (\mathcal{I}^{-1} + 2i\tilde{u})\omega_j$. Из определения оператора $\mathcal{I}$ и (1.4) следует, что

$$\begin{aligned}\Im Q(\mathcal{I}^{-1}\omega_j, iH_k) = \delta_{jk}, \quad \Im Q(\mathcal{I}^{-1}\omega_j, V_{\alpha 1}) = 0,\\ \Im Q(\mathcal{I}^{-1}\omega_j, V_{\alpha 2}) = 0, \quad \Im Q(i\mathfrak{h}_R, \mathfrak{g}_1) = 0,\end{aligned}$$

поэтому $\{-ix_\alpha, X_\alpha, \omega_{j,u}\}_{\alpha \in \Delta_+, 1 \leqslant j \leqslant n}$ — искомый биортогональный базис в $\mathfrak{g}_1$. Для векторов этого базиса (1.6) проверяется непосредственно; используется (1.3).

Итак, мы проверили все условия а)–в), п.1.1.

1.3. Доказательство теоремы 0.2. Пусть W — группа Вейля пространства $\mathfrak{g}^*$ и T — максимальный тор в K. Отождествим, как в [9], элементы группы W с элементами группы K и построим симплектический лист $\Sigma_{tw}(r_u), t \in T, w \in W$.

Пусть $A, A_R, T, A_{R,u}, N^+, B_u$ — подгруппы Ли группы G^R с алгебрами ли $\mathfrak{h}, \mathfrak{h}_R, i\mathfrak{h}_{R,u}, \mathfrak{n}_+, \mathfrak{g}_{2,u}$ — подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{g}^R$. Общий вид элемента группы B_u есть $n_+ \exp((I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})H)$, где $n_+ \in N^+, H \in \mathfrak{h}_R$, поэтому мы можем применить формулу (1.2) для построения $\Sigma_{tw}(r_u)$ так:

$$\begin{aligned} n_+ \exp((I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})H)tw &= n_+ \exp(2i\tilde{u}\mathcal{I}H)tw \exp(\mathcal{I}^{-1}w\mathcal{I}H) = \\ &= n_+ \exp(2i\tilde{u}\mathcal{I}H)tw \exp(-2i\tilde{u}w\mathcal{I}H)\exp((I + 2i\tilde{u})\mathcal{I}^{-1}w\mathcal{I}H) = \\ &= n_+ \exp(2i\tilde{u}\mathcal{I}H)\exp(-\mathcal{I}^{-1}w^{-1}\mathcal{I}\cdot 2i\tilde{u}w\mathcal{I}H)tw \exp((I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})\mathcal{I}^{-1}w\mathcal{I}H) = \\ &= \exp(i(\tilde{u} - \mathcal{I}^{-1}w^{-1}\mathcal{I}\tilde{u}w)2\mathcal{J}H) + n'_+ w \exp((I + 2i\tilde{u}\mathcal{I})\mathcal{I}^{-1}w\mathcal{I}H),\end{aligned}$$

где при фиксированном H n'_+ пробегает всю подгруппу N^+ вместе с n_+, поскольку $\exp(i(\tilde{u} - \mathcal{I}^{-1}w^{-1}\mathcal{I}\tilde{u})w)2\mathcal{I}H) \in T$. Далее, когда H пробегает $\mathfrak{h}_R$, элемент $\exp(i(\tilde{u} - \mathcal{I}^{-1}w^{-1}\mathcal{I}\tilde{u})2\mathcal{I}H)$ пробегает подгруппу T'_w, введенную в теореме 0.2, поэтому из (1.2) следует, что равенство

$$\Sigma_{tw}(r_u) = T'_w \cdot t \cdot \Sigma_w(r_0) \tag{1.7}$$

будет доказано вместе с равенством

$$N^{+}w = \Sigma_w(r_0)N^{+}. \tag{1.8}$$

Но $N^{+}a = aN^{+}$ $\forall a \in A$,$A_R w = wA_R$, откуда $\Sigma_w N^{+} A_R = N^{+} A_R w = N^{+} w A_R$, и так как $KN_{+} \cap A_R = \{e\}$, то (1.8) доказано.

Далее, в силу теоремы 0.1 $K = \cup_{w\in W} \cup_{t\in T}\, t \cdot \Sigma_w(r_0)$, поэтому из (1.7) следует, что

$$K \subset \cup_{w\in W} \cup_{t\in T}\, \Sigma_{tw}(r_u),$$

и так как через каждую точку группы Пуассона–Ли проходит ровно один симплектический лист, то все симплектические листы группы $K(r_u)$ имеют вид (1.7). Теорема 0.2 доказана.

§ 2. Определение скрученной алгебры регулярных функций на компактной квантовой группе

2.1. Через $U_h(\mathfrak{g})$ обозначается (см. [1,12]) алгебра над кольцом $C[[h]]$ формальных степенных рядов, порожденная в h-адическом смысле (т.е. как алгебра, полная в h-адической топологии) образующими $\{H_j, X_j^{+}, X_j^{-}\}_{j=1}^{n}$ и соотношениями

$$[H_j, H_k] = 0, \qquad [H_k, X_j^{\pm}] = \pm(\alpha_k, \alpha_j)X_j^{\pm},$$

$$[x_k^{+}, X_j^{-}] = \delta_{kj}\frac{\mathrm{sh}(hH_j/2)}{\mathrm{sh}(h/2)},$$

$$\sum_{l=0}^{n_{jk}}(-1)^l \binom{n_{jk}}{l}_{q_j^2} q_j^{-l(n_{jk}-l)}(X_j^{\pm})^l X_k^{\pm}(X_j^{\pm})^{n_{jk}-l} = 0. \tag{2.1}$$

где $n_{jk} = 1 - a_{jk}$,$a_{ij} = 2(\alpha_j, \alpha_k)/(\alpha_j, \alpha_j)$ — элементы матрицы Картана алгебры $\mathfrak{g}$,$q_j = \exp(h(\alpha_j, \alpha_j)/2)$,$(\cdot,\cdot)$ — каноническое скалярное произведение и

$$\binom{n}{k}_t = \frac{t^n - 1)(t^{n-1} - 1)\ldots(t^{n-k+1} - 1)}{(t^k - 1)(t^{k-1} - 1)\ldots(t - 1)}.$$

Введем в $U_h(\mathfrak{g})$ структуру алгебры Хопфа равенствами

$$\begin{gathered}\Delta(H) = H \otimes 1 + 1 \otimes H \;\; \forall H \in \mathfrak{h},\\ \Delta(X_j^{\pm}) = X_j^{\pm} \otimes \exp(hH_j/4) + \exp(-hH_j/4) \otimes X_j^{\pm}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

Алгебра Хопфа $(U_h(\mathfrak{g}), \Delta)$ — квантование биалгебры Ли $\mathfrak{g}$ с кокоммутатором $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \wedge \mathfrak{g}$, определенном тензором r_0:

$$\varphi(\xi) = [\xi \otimes 1 + 1 \otimes \xi, \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta_+} X_\alpha \wedge X_{-\alpha}]$$

для $\xi = H_j$,$X_j^{\pm}$ (см. [1]). Если мы зададим коумножение Δ_u равенством

$$\Delta_u(\xi) = \exp(-ihu/2)\Delta(\xi)\exp(ihu/2), \tag{2.3}$$

то получим алгебру Хопфа $U_{h,u}(\mathfrak{g}) = (U_h(\mathfrak{g}), \Delta)$, являющуюся квантованием биалгебры Ли $\mathfrak{g}$ с кокоммутатором, определенным тензором r_u из (0.1).

2.2. Фиксируем $q = \exp(h/2) > 1$ и рассмотрим алгебру Хопфа $U_q(\mathfrak{g})$ над $\mathbb{C}$, порожденную образующими $\{X_j^{\pm}, K_j^{\pm}\}_{j=1}^n$ и соотношениями

$$K_j^{\pm}K_l^{\pm} = K_l^{\pm}K_j^{\pm}, \quad K_j^{\pm}K_l^{\mp} = K_k^{\mp}K_j^{\pm}, \quad K_j^{\pm}K_j^{\mp} = I,$$
$$K_j^{+}X_k^{\pm} = q^{\pm(\alpha_j,\alpha_k)/2}X_k^{\pm}K_j^{+},$$
$$K_j^{-}X_k^{\pm} = q^{\mp(\alpha_j,\alpha_k)/2}X_k^{\pm}K_j^{-},$$
$$[X_j^{+}, X_k^{-}] = \delta_{jk}\frac{K_j^2 - K_j^{-2}}{q - q^{-1}}$$

и соотношением (2.1). Коумножение в $U_q(\mathfrak{g})$ можно определить равенствами

$$\Delta(K_j^{\pm}) = K_j^{\pm} \otimes K_j^{\pm}, \quad \Delta(X_j^{\pm}) = X_j^{\pm} \otimes K_j + K_j^{-1} \otimes X_j^{\pm}. \tag{2.4}$$

Обозначим через M категорию конечномерных представлений алгебры $U_q(\mathfrak{g})$ таких, что спектры эндоморфизмов $\rho(K_j^{\pm})$ положительны. Для таких представлений можно определить в пространстве представления операторы $\rho(H_j) = 4h^{-1}\ln\rho(K_j^{+})$, и следовательно, операторы $\rho(f(H_j)) = f(\rho(H_j))$ для любой непрерывной функции f. Таким образом, представление $\rho : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}V$ из категории M однозначно определяет представление $\bar{\rho} : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}V$ (см. [12–15]), и мы можем говорить о весах представления ρ и его весовых векторах и функционалах. Кроме того, ρ определяет и представление $\tilde{\rho} : U_h(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}V$, если в определении $U_h(\mathfrak{g})$ фиксировать $h = \ln q$ и рассматривать $U_h(\mathfrak{g})$ как алгебру над $\mathbb{C}$. Последнее замечание дает основание рассматривать формально $U_q(\mathfrak{g})$ как подалгебру $U_h(\mathfrak{g})$.

2.3. В двойственной к $U_q(\mathfrak{g})$ алгебре Хопфа $U_q(\mathfrak{g})^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(U_q(\mathfrak{g}), \mathbb{C})$ структура $*$-алгебры Хопфа вводится равенством $l^*(a) = \overline{l(S(a)^*)}$ (см.[4]). Здесь S — антипод; он действует на образующие так: $S(K_j^{\pm}) = K_j^{\mp}$, $S(X_j^{\pm}) = -q^{\rho}X_j^{\pm}q^{-\rho}$, где $\rho \in \mathfrak{h}$ соответствует полусумме положительных корней при изоморфизме $\mathfrak{h} \cong \mathfrak{h}^*$, определенном каноническим скалярным произведением в $\mathfrak{g}^*$.

Категория M замкнута относительно тензорных произведений и перехода к двойственному представлению, поэтому множество матричных элементов представлений из категории M образует алгебру Хопфа $\mathbb{C}[G]_q$ с умножением

$$l_1(\rho_1(\xi)v_1) \cdot l_2(\rho_2(\xi)v_2) = \langle l_1 \otimes l_2, (\rho_1 \boxtimes \rho_2)\Delta(\xi)v_1 \otimes v_2\rangle \tag{2.5}$$

и коумножением $\delta f = f \otimes f$. Здесь $\rho_j : U_q(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}V_j$, $v_j \in V_j$, $l_j \in V_j^*$, $\xi \in U_q(\mathfrak{g})$.

Так как $\mathbb{C}[G]_q \subset U_q(\mathfrak{g})^*$, то инволюция в $U_q(\mathfrak{g})^*$ индуцирует инволюцию в $\mathbb{C}[G]_q$. Пара $(\mathbb{C}[G]_q, *$ называется алгеброй регулярных функций на квантовой группе K и обозначается $\mathbb{C}[K]_q$ (см. [4]). Она является квантованием в смысле [1] группы Пуассона–Ли K со скобкой, определенной тензором r_0 из (0.1).

2.4. Попытка проквантовать таким же образом группу Пуассона–Ли K со скобкой, определенной тензором r_u с $u \neq 0$, встречает очевидное затруднение — в случае $u = 0$ мы легко перешли от формулы (2.2) к формуле (2.4), однако в случае $u \neq 0$ ввести аналог формулы (2.3) не так легко. Однако если мы имеем дело с представлениями из категории M, то мы можем использовать в (2.5) коумножение Δ_u вместо Δ. В результате мы получаем новое умножение $\circ$ в $\mathbb{C}[G]_q$; нетрудно показать, что оно согласовано со старым коумножением δ. Новую алгебру Хопфа обозначим $\mathbb{C}[G]_{h,u}$.

Если l_1, l_2 — функционалы весов $-\mu_1, -\mu_2$, а v_1, v_2 — векторы весов λ_1, λ_2, то из формулы (2.5) следует формула, связывающая старое и новое произведения матричных элементов

$$l_1(\rho_1(\xi)v_1) \circ l_2(\rho_2(\xi)v_2) = \\ = l_1(\rho_1(\xi)v_1) l_2(\rho_2(\xi)v_2) \exp(ih[(\lambda_1, \lambda_2)_u - (\mu_1, \mu_2)_u]/2), \tag{2.6}$$

где $(\lambda, \mu)_u = (u\lambda, \mu)$, а u — оператор в $\mathfrak{h}^*$, определенный тензором $u \in \Lambda^2\mathfrak{h}_R$. Из (2.6) и кососимметричности u следует, что инволюция в $\mathbb{C}[G]_q$ является инволюцией и в $\mathbb{C}[G]_{h,u}$. Пару $(\mathbb{C}[G]_{h,u}, *)$ будем называть скрученной алгеброй регулярных функций на квантовой группе K и обозначать $\mathbb{C}[K]_{h,u}$.

2.5. В дальнейшем будем писать $\mathbb{C}[G]_h$, $\mathbb{C}[K]_h$ вместо $\mathbb{C}[G]_q$, $\mathbb{C}[K]_q$, поскольку именно такие обозначения использовались в работе [4], на которую нам придется чаще всего ссылаться.

2.6. Согласно двойственному подходу к квантовым группам (см., например, [5, 6]), первичным объектом является алгебра Хопфа $\mathbb{C}[G]_{h,u}$, а не $U_{h,u}(\mathfrak{g})$, и алгебра функций — не алгебра матричных элементов, а $*$-алгебра Хопфа, удовлетворяющая некоторым условиям.

§ 3. Неприводимые представления скрученной алгебры функций и клетки Шуберта

3.1. В [4] было показано, что всякое неприводимое представление алгебры $\mathbb{C}[K]_h$ соответствует некоторой (единственной) клетке Шуберта X_w. В этом параграфе аналогичное утверждение доказывается для $\mathbb{C}[K]_{h,u}$. Этот первый этап классификации представлений незначительно отличается от случая $u = 0$.

3.2. Приведем нужные нам определения работы [4]. Представление $\pi : A \to \mathrm{End}V$ $*$-алгебры A в векторном пространстве V называется унитаризуемым, если в V существует эрмитово скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$ такое, что

$$(\pi(a)v_1, v_2) = (v_1, \pi(a^*)v_2) \qquad \forall a \in A, \quad \forall v_j \in V. \tag{3.1}$$

Если A — $*$-алгебра Хопфа, то унитаризуемые представления алгебры A образуют категорию $Q(A)$, замкнутую относительно тензорных произведений и перехода к сопряженному представлению.

При условии (3.1) V называется унитаризуемым A-модулем. Если представление π продолжается до представления ограниченными операторами в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ — пополнении V относительно нормы $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, то можно говорить о представлении A в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (при этом $\mathfrak{H}$ называется гильбертовым A-модулем).

В категории $\overline{Q}(A)$ представлений в гильбертовых пространствах под неприводимыми представлениями будем понимать топологически неприводимые представления; представлением алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ будем называть представление $*$-алгебры $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ в гильбертовом пространстве.

3.3. Обозначения этого пункта либо общеприняты, либо аналогичны обозначениям работы [4]. Через P_+ (соответственно P_{++}) обозначим множество доминантных (соответственно регулярных доминантных) весов алгебры $U(\mathfrak{g})$ (см. [16]). Напомним, что мы можем отождествить рассматриваемые представления и веса алгебр $U(\mathfrak{g})$ и $U_h(\mathfrak{g})$ (см. п.2.2), и обозначим через $B_{\Lambda,u}$ для $\Lambda \in P_+$ подалгебру в $\mathbb{C}[G]_{h,u}$, содержащую единицу и порожденную матричными элементами вида $l(\rho_\Lambda(\xi)v_\Lambda)$, где ρ_Λ — неприводимое представление алгебры $U_h(\mathfrak{g})$ старшего веса Λ в пространстве $L(\Lambda)$, $v_\Lambda \in L(\Lambda)$ — старший вектор представления ρ_Λ, l пробегает сопряженное пространство $L^*(\Lambda)$.

Положим $A_{+,u} = \bigoplus_{\Lambda\in P_+} B_{\Lambda,u}$ и обозначим через $A_{-,u}$ образ $A_{+,u}$ относительно инволюции в $\mathbb{C}[G]_{h,u}$. Поскольку запас элементов в $A_{+,u}$ и инволюция $*$ одни и те же для всех u, то и запас элементов в $A_{-,u}$ не зависит от u; поскольку $A_{\pm,u}$ порождены матричными элементами, а произведение матричных элементов в различных алгебрах $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ отличается только числовыми множителями (см.(2.6)), то следующая теорема работы [4], доказанная там в случае $u = 0$, верна и для остальных u.

Теорема 3.1. а) *Линейное отображение*

$$A_{-,u} \bigoplus_{\mathbb{C}} A_{+,u} \ni a\otimes b \mapsto ab \in \mathbb{C}[G]_{h,u}$$

является эпиморфизмом векторных пространств над $\mathbb{C}$;

б) *утверждение п.а) остается в силе после замены* $A_{+,u}, A_{-,u}$ *на* $A_{++,u} = \bigoplus_{\Lambda\in P_{++}} B_{\Lambda,u}$, $A_{--,u} = (A_{++,u})^*$ *соответственно.*

Пусть $\Lambda \in P_+$. Через $P(\Lambda)$ обозначим множество весов простого $U_{h,u}(\mathfrak{g})$-модуля $L(\Lambda)$. Хорошо известно (см., например, [13, 14]), что $L(\Lambda)$ унитаризуем. Пусть $L(\Lambda) = \bigoplus_{\lambda\in P(\Lambda)} L(\Lambda)_\lambda$ — его весовое разложение. Выберем в $L(\Lambda)$ ортонормированный весовой базис $\{v_\mu^{(j)}\}_{\mu\in P(\Lambda),1\leqslant j\leqslant \dim L(\Lambda)_\mu}$. Пусть $\{l_{-\mu}^{(j)}\}$ — биортогональный набор: $l_{-\mu}^{(j)}(v_\lambda^{(k)}) = \delta_{\lambda\mu}\delta_{jk}$. Положим

$$C^\Lambda_{-\lambda,j;\mu,k}(\xi) = l_{-\lambda}^{(j)}(\rho_\Lambda(\xi)v_\mu^{(k)}).$$

Если $\dim_{\mathbb{C}} L(\Lambda)_\mu = 1(\dim_{\mathbb{C}} L(\Lambda)_\lambda = 1)$, то индекс k (индекс j) опускаем.

Фиксируем $\Lambda \in P_+, \lambda \in P(\Lambda)$ и рассмотрим в $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ следующие идеалы:

1) $\mathcal{I}_0(\lambda,\Lambda)$ — наименьший двусторонний $*$-идеал, содержащий матричные элементы $C^\Lambda_{-\mu,j,\Lambda}(\mu \in P(\Lambda), 1 \leqslant j \leqslant \dim L(\Lambda)_\mu$ такие, что $v_\mu^{(j)} \notin U_h(\mathfrak{b}_+)(L(\Lambda)_\lambda)$;

2) $\mathcal{I}_1(\lambda,\Lambda)$ — наименьший двусторонний $*$-идеал, содержащий матричные элементы $C^\Lambda_{-\mu,j,\Lambda}(\mu \in P(\Lambda),\ 1 \leqslant j \leqslant \dim L(\Lambda)_\mu)$ такие, что $\mu \ngeqslant \lambda$;

3) $\mathcal{I}_2(\lambda,\Lambda)$ — наименьший двусторонний $*$-идеал, содержащий матричные элементы $C^\Lambda_{-\mu,j,\Lambda}(\mu \in P(\Lambda),\ 1 \leqslant j \leqslant \dim L(\Lambda)_\mu)$ такие, что $\mu < \lambda$.

Ясно, что $\mathcal{I}_2(\lambda,\Lambda) \subset \mathcal{I}_1(\lambda,\Lambda) \subset \mathcal{I}_0(\lambda,\Lambda)$ и что эти идеалы не зависят от u, так как запас элементов и инволюция не зависят от u, а операции умножения при $u = 0$ и $u \neq 0$ связаны соотношением (2.6).

Из формулы (2.6) и предложения 3.2 работы [4] следует, что в фактор-алгебре $\mathbb{C}[G]_{h,u}/\mathcal{I}_2(\lambda,\Lambda)$ верны соотношения

$$C^\nu_{-\mu,p;\gamma,q} \circ C^\Lambda_{-\lambda,j;\Lambda} = C^\Lambda_{-\lambda,j;\Lambda} \circ C^\nu_{-\mu,p;\gamma,q} \times \\ \times \exp(\frac{h}{2}[-(\Lambda,\gamma) + (\lambda,\mu)] + ih[-(\Lambda,\gamma)_u + (\lambda,\mu)_u]), \tag{3.2}$$

$$C^\Lambda_{-\mu,p;\Lambda} \circ C^\Lambda_{-\lambda,j;\Lambda} = C^\Lambda_{-\lambda,j;\Lambda} \circ C^\Lambda_{-\mu,p;\Lambda} \times \\ \times \exp(\frac{h}{2}[-(\Lambda,\Lambda) + (\lambda,\mu)] + ih[-(\Lambda,\Lambda)_u + (\lambda,\mu)_u]). \tag{3.2'}$$

Поскольку инволюция в алгебре $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ не зависит от u, то остается в силе формула (3.6) работы [4] для действия инволюции на матричный элемент:

$$(C^{\nu}_{-\mu,p;\lambda,j})^* = \exp(-h(\mu(\rho) - \lambda(\rho))/2)C^{-w_0\nu}_{\mu,p;-\lambda,j}. \tag{3.3}$$

Здесь $w_0 \in W$ — элемент максимальной длины и нумерация векторов весового ортонормированного базиса для простого $U_h(\mathfrak{g})$-модуля $L(-w_0\nu)$ согласована с изоморфизмом $U_h(\mathfrak{g})$-модулей $L(-w_0\nu) \simeq L^*(\nu)$.

3.4. Будем говорить, следуя [4], что неприводимое представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ соответствует клетке Шуберта $X_w \subset K/T$, если для любого $\lambda \in P_+$ выполнены условия

а) $\pi(\mathcal{I}_0(w\Lambda, \Lambda)) = 0$;

б) $\pi(C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda}) \neq 0$.

Теорема 3.2. *Всякое неприводимое представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ соответствует некоторой (и единственной) клетке X_w.*

Доказательство. В силу п.а) теоремы 3.1 существует $\Lambda \in P_+$ такой, что $\pi(B_{\Lambda,u}) \neq 0$, поэтому существуют $\mu \in P(\Lambda)$ и $j \notin [1, \dim L(\Lambda)_\lambda]$ такие, что $\pi(C^{\Lambda}_{-\mu,j,\Lambda}) \neq 0$. Положим

$$\mathcal{D}_0(\Lambda) = \{\mu \in P(\Lambda) | \pi(C^{\Lambda}_{-\mu,j,\Lambda}) \neq 0 \text{ для некоторого } j\}$$

и обозначим через $\mathcal{D}_1(\Lambda)$ множество минимальных элементов $\mathcal{D}_0(\Lambda)$ относительно обычного частичного порядка на весах. Если $\lambda \in \mathcal{D}_1(\Lambda)$, то для некоторого $j \pi(C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda}) \neq 0$, а для любого $\mu < \lambda$ и всех $k \pi(C^{\Lambda}_{-\mu,k;\Lambda}) = 0$. Это означает, что $\pi(\mathcal{I}_2(\lambda, \Lambda)) = 0$. Покажем, что $\lambda = w\Lambda$ для некоторого $w \in W$.

Применяя (3.2)', (3.3) и учитывая, что $(\mu,\mu)_u = 0\ \forall \mu$, получаем ту же формулу, что и в случае $u = 0$:

$$(C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda})^* C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda} = q^{-1} C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda}(C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda})^* \tag{3.4}$$

в $\mathbb{C}[G]_{h,u}/\mathcal{I}_2(\lambda, \Lambda)$, где $q = \exp(-h[(\Lambda,\Lambda) - (\lambda,\lambda)]/2)$. (3.4) имеет вид $L^*L = q^{-1}LL^*$, где L — ограниченный оператор, поэтому $q = 1$ и $(\Lambda, \Lambda) = (\lambda, \lambda)$. Теперь мы получаем равенство $\lambda = w\Lambda$ с помощью следующего предложения, в котором собраны нужные нам (и хорошо известные — см., например, [16]) свойства весов.

Предложение 3.1. а) *Если $\Lambda \in P_+$, $\lambda, \mu \in P(\Lambda)$, то $(\Lambda, \Lambda) \geqslant (\lambda, \mu)$, причем равенство возможно только при $\lambda = \mu \in W(\Lambda)$;*

б) *если $\lambda, \Lambda \in P_+$, $\mu \in P(\lambda)$, то $(\Lambda, \lambda) \geqslant (w\Lambda, \mu)$, причем в случае $\Lambda \in P_{++}$ равенство возможно только при $\mu = w\lambda$;*

в) *если $\lambda \in P_+$, $(w\lambda \neq)\mu \in P(\lambda)$, то существует фундаментальный вес ω_j такой, что $(\omega_j, \lambda) > (w\omega_j, \mu)$.*

3.5. Пусть Λ и w — те же, что и в п.3.4. В силу (3.2) $\mathrm{Ker}\pi(C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda})$ — инвариантное подпространство, и так как представление π неприводимо, а $\pi(C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda}) \neq 0$, то мы имеем

Предложение 3.2. $\mathrm{Ker}\pi(C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda}) = \{0\}$.

Применяя к левой и правой частям равенства (3.2) антилинейную операцию $*$ и учитывая (3.3), мы видим, что в $\mathbb{C}[G]_{h,u}/\mathcal{I}_2(\lambda, \Lambda)$

$$C^{\nu}_{-\mu,p;\gamma,q} \circ (C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda})^* = C^{\Lambda}_{-\lambda,j;\Lambda})^* \circ C^{\nu}_{-\mu,p;\gamma,q} \times$$
$$\times \exp(\frac{h}{2}[-(\Lambda,\gamma) + (\lambda,\mu)] + ih[(\Lambda,\gamma)_u - (\lambda,\mu)_u]). \tag{3.5}$$

В силу (3.2), (3.5) в той же фактор–алгебре элемент $D_{w,\Lambda} = (C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda})^* \circ C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda}$ удовлетворяет соотношениям

$$C^{\nu}_{-\mu,p;\gamma,q} \circ D_{w,\Lambda} = D_{w,\Lambda} \circ C^{0}_{-\mu,p;\gamma,q} \exp(h[(w\Lambda,\mu) - (\Lambda,\gamma)]). \tag{3.6}$$

Используя (3.6) и повторяя с очевидными изменениями доказательство предложения 3.9 работы [4], получаем

Предложение 3.3. *Спектр $\sigma(\pi(D_{w,\Lambda}))$ оператора $\pi(D_{w,\Lambda})$ имеет вид $E \cup \{0\}$, где E — ограниченное счетное множество с единственной предельной точкой* 0.

Предложения 3.3, 3.2 позволяют разложить пространство представления $\mathfrak{H}$ в прямую сумму собственных подпространств оператора $\pi(D_{w,\Lambda}) : \mathfrak{H} = \bigoplus_{\gamma \in E} \mathfrak{H}_{\gamma}(w,\Lambda)$, где

$$\mathfrak{H}_{\gamma}(w,\Lambda) = \{x \in \mathfrak{H} | \pi(D_{w,\Lambda})x = \gamma x\}.$$

Обозначим через $\gamma_0 = \gamma_0(w,\Lambda)$ наибольшее собственное значение оператора $\pi(D_{w,\Lambda})$.

Предложение 3.4. *Если $v \in \mathfrak{H}_{\gamma_0}(w,\Lambda)$, то $\pi(C^{\Lambda}_{-\mu,j;\Lambda})v = 0$ для всех $(w\Lambda \neq)\mu \in P(\Lambda)$, $1 \leqslant j \leqslant \dim L(\Lambda)_{\mu}$.*

Доказательство. Положим $v_1 = \pi(C^{\Lambda}_{-\mu,j;\Lambda})v$. Из (3.6) следует, что $\pi(D_{w,\Lambda})v_1 = k\gamma_0 v_1$, где $k = \exp(h[(\Lambda,\Lambda) - (w\Lambda,\mu)]) > 1$ по предложению 3.1; поскольку γ_0 — максимальное собственное значение, то $v_1 = 0$. •

3.6. Покажем, что определенный в п.3.4 элемент w не зависит от веса $\Lambda \in P_+$. Сначала заметим, что по п.б) теоремы 3.1 существуют $\Lambda \in P_{++}$ такие, что $\pi(B_{\Lambda,u}) \neq 0$, предположим, что существуют два таких веса Λ_1, Λ_2, построим для них элементы w_1, w_2 и докажем, что $w_1 = w_2$. В силу (3.6)

$$\pi(D_{w_2,\Lambda_2})\pi(C^{\Lambda_1}_{-w_1\Lambda_1,\Lambda_1}) = k\pi(C^{\Lambda_1}_{-w_1\Lambda_1,\Lambda_1})\pi(D_{w_2,\Lambda_2}), \tag{3.7}$$

где $k = \exp(h[(\Lambda_1,\Lambda_2) - (w_1\Lambda_1, w_2\Lambda_2)])$. Применяя левую и правую части этого равенства к $(0 \neq)v \in \mathfrak{H}_{\gamma_0}(w_2,\Lambda_2)$ и учитывая, что $v_1 = \pi(C^{\Lambda_1}_{-w_1\Lambda_1,\Lambda_1})v \neq 0$ по предложению 3.2, мы видим, что v_1 — собственный вектор оператора $\pi(D_{w_2,\Lambda_2})$ с собственным значением $k\gamma_0(w_2,\Lambda_2)$. Следовательно, $k \leqslant 1$ и $(\Lambda_1,\Lambda_2) \leqslant (w_1,\Lambda_1, w_2\Lambda_2) = (w\Lambda_1,\Lambda_2)$, где $w = w_2^{-1}w_1$, но по п.б) предложения 3.1 верно неравенство противоположного знака, превращающееся в равенство только при $w = e$. Следовательно, $w_1 = w_2$, и мы доказали

Предложение 3.5. *Для любого неприводимого представления π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ существует и единствен элемент $w \in W$ такой, что*

$$\pi(\mathcal{I}_2(w\Lambda,\Lambda)) = 0, \mathrm{Ker}\pi(C^{\Lambda}_{-w\Lambda,\Lambda}) = \{0\} \qquad \forall \lambda \in P_{++}. \tag{3.8}$$

Следующий шаг — доказательство предложения 3.5 $\forall\lambda \in P_+$ — проводится точно так же, как в [4], п.3.7. Используются (3.2), предложение 3.2, (3.8) и следующее предложение.

Предложение 3.6. *Для любых $\lambda,\mu \in P_+$*

$$C^{\Lambda}_{-w_1\lambda,\lambda} \circ C^{\mu}_{-w\mu,\mu} = \exp(ih[(\lambda,\mu)_u - (w\lambda,w\mu)_u]/2)C^{\lambda+\mu}_{-w(\lambda+\mu),\lambda+\mu}. \tag{3.9}$$

Доказательство. В случае $u = 0$ (3.9) доказано в п.3.7 работы [4]; в силу (2.6) равенство (3.9) верно и при $u \neq 0$. •

После того, как предложение 3.5 доказано для всех $\lambda \in P_+$, доказательство теоремы 3.2 завершается точно так же, как доказательство аналогичной теоремы в п.3.8 работы [4].

§ 4. Неприводимые представления, соответствующие фиксированной клетке Шуберта X_w

4.1. Фиксируем $w \in W$, обозначим через $\mathcal{I}_{h,u,w}$ максимальный $*$-идеал, содержащий все идеалы $\mathcal{I}_0(w\Lambda, \Lambda)$, $\Lambda \in P_+$, и положим $\mathbb{C}[G]_{h,u,w} = \mathbb{C}[G]_{h,u}/\mathcal{I}_{h,u,w}$. Инволюция в $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ индуцирует инволюцию в $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$; пару $(\mathbb{C}[G]_{h,u,w}, *)$ обозначим $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ и назовем представлением алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ $*$-представление алгебры $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$. Как и в § 3, мы различаем унитаризуемые $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$-модули и представления алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$. Чтобы не усложнять обозначения, будем обозначать образы элементов из $\mathbb{C}[G]_{h,u}$ в $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$ теми же символами.

Неприводимое представление алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$, соответствующее клетке Шуберта X_w, однозначно определяет неприводимое представление алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$, удовлетворяющее условию

$$\mathrm{Ker}\pi(C^{\lambda}_{-w\lambda,\lambda}) = \{0\} \qquad \forall\lambda \in P_+, \tag{4.1}$$

и однозначно определяется последним, поэтому в дальнейшем мы изучаем неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$, удовлетворяющие условию (4.1).

4.2. Неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ можно исследовать по аналогии с исследованием неприводимых представлений полупростых алгебр Ли. Роль картановской подалгебры играет $*$-подалгебра $\mathcal{P}_{h,u,w} \subset \mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ с единицей, порожденная элементами $C_\lambda = C^{\lambda}_{-w\lambda,\lambda} (\lambda \in P_+)$.

Положим $\theta_{w,u}(\lambda,\mu) = (\lambda,\mu)_u - (w\lambda, w\mu)_u$,

$$\sigma(\lambda,\mu) = \sigma_{h,u,w}(\lambda,\mu) = \exp(ih\theta_{w,u}(\lambda,\mu)/2).$$

Из (3.9), (3.5), (3.6), (3.7) и (3.3) следует, что $\forall\lambda,\mu \in P_+$

$$C_\lambda C_\mu = \sigma(\lambda,\mu) C_{\lambda+\mu}, \tag{4.2}$$

$$C_\lambda C_\mu = \sigma(\lambda,\mu)^2 C_\mu C_\lambda, \qquad C_\lambda C^*_\mu = \sigma(\mu\lambda)^2 C^*_\mu C_\lambda, \tag{4.3}$$

$$D_\lambda \overset{\text{def.}}{=} C^*_\lambda C_\lambda = C_\lambda C^*_\lambda, \tag{4.4}$$

$$D_\lambda C = C D_\lambda \qquad \forall C \in \mathcal{P}_{h,u,w}. \tag{4.5}$$

Отметим, что в силу (3.9) $\mathcal{P}_{h,u,w}$ порождается элементами $C_j = C_{\omega_j}, 1 \leqslant j \leqslant n$.

В дальнейшем нам понадобятся и формулы для коммутации операторов $D_j = D_{\omega_j}$ с элементами $C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda}$, $(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^*$ в случае $\mu \neq w\lambda$, $1 \leqslant p \leqslant \mathrm{dim}L(\lambda)\mu$. Они следуют из (3.2), (3.5):

$$D_j C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda} = \exp(h\varkappa_j(\lambda,\mu)) C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda} D_j, \tag{4.6}$$

$$D_j (C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^* = \exp(-h\varkappa_j(\lambda,\mu)) (C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^* D_j, \tag{4.7}$$

где

$$\varkappa_j(\lambda,\mu) = (\omega_j,\lambda) - (w\omega_j,\mu) \geqslant 0, \tag{4.8}$$

причем

$$\text{существует} \quad j \quad \text{такое, что} \quad \varkappa_j(\lambda,\mu) > 0 \tag{4.9}$$

(неравенства (4.8), (4.9) следуют из предложения 3.1).

Мы видим, что в случае $u \neq 0$ алгебра $\mathcal{P}_{h,u,w}$, как правило, некоммутативна. Ее исследование будет проведено в § 5.

4.3. В п. 3.5 показано, что спектр самосопряженного положительного оператора $\pi(D_j)$ состоит из нуля и счетного множества E_j собственных значений с единственной предельной точкой 0. Любой набор $\gamma = (\gamma_1, \dots \gamma_n)$, где $\gamma_j \in E_j$, будем называть весом гильбертова модуля $\mathfrak{H}$, а пересечения $\mathfrak{H}(\gamma) = \bigcap_j \mathfrak{H}(\gamma_j, D_j)$ собственных подпространств операторов $\pi(D_j)$ — весовыми подпространствами.

В силу (4.4), (4.5) D_j принадлежит центру алгебры $\mathcal{P}_{h,u,w}$, поэтому все подпространства $\mathfrak{H}(\gamma_j, D_j), \mathfrak{H}(\gamma)$ инвариантны относительно $\pi(\mathcal{P}_{h,u,w})$, и мы можем разложить $\mathfrak{H}$ в сумму попарно ортогональных и инвариантных относительно $\pi(\mathcal{P}_{h,u,w})$ подпространств

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{\gamma_j \in E_j} \mathfrak{H}(\gamma_j, D_j) \quad \text{или} \quad \mathfrak{H} = \bigoplus_{\gamma \in E} \mathfrak{H}(\gamma), \tag{4.10}$$

где $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$. Обозначим через γ_j^0 максимальное собственное значение оператора $\pi(D_j)$ и положим $\gamma^0 = (\gamma_j^0)_{1 \leqslant j \leqslant n}$, $\gamma_j(\lambda, \mu)^{\pm} = \exp(\pm h \varkappa_j(\lambda, \mu))$, $\gamma(\lambda, \mu)^{\pm} = (\gamma_j(\lambda, \mu)^{\pm})_{1 \leqslant j \leqslant n}$.

Предложение 4.1. *Для всех j и всех $\lambda \in P_+$, $\mu \in P(\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \dim L(\lambda)_\mu$*

$$\begin{aligned} &\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})(\mathfrak{H}(\gamma, D_j)) \subset \mathfrak{H}(\gamma\gamma_j(\lambda,\mu)^+, D_j), \\ &\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^*(\mathfrak{H}(\gamma, D_j)) \subset \mathfrak{H}(\gamma\gamma_j(\lambda,\mu)^-, D_j), \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned} &\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})(\mathfrak{H}(\gamma)) \subset \mathfrak{H}((\gamma_j\gamma_j(\lambda,\mu)^+)_{i \leqslant j \leqslant n}), \\ &\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^*(\mathfrak{H}(\gamma)) \subset \mathfrak{H}((\gamma_j\gamma_j(\lambda,\mu)^-)_{i \leqslant j \leqslant n}). \end{aligned} \tag{4.12}$$

В частности,

$$\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})(\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)) = \{0\}, \quad \textit{если} \quad \varkappa_j(\lambda,\mu) > 0,$$

и

$$\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})(\mathfrak{H}(\gamma^0)) = \{0\}, \quad \textit{если} \quad \mu \neq w\lambda. \tag{4.13}$$

Доказательство. См. (4.6)–(4.9). •

Введем в множестве весов отношение частичного порядка $\gamma \geqslant \gamma' \Leftrightarrow \gamma_j \geqslant \gamma_j' \quad \forall j$ и заметим, что в силу (4.11), (4.12), (4.8), (4.9) при $w\lambda \neq \mu$ операторы $\pi(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})$ можно рассматривать как повышающие операторы, а сопряженные к ним — как понижающие. Следовательно, естественно ввести аналоги борелевской и нильпотентной подалгебр $\mathfrak{b}_+$ и $\mathfrak{n}_-$ — минимальные подалгебры $\mathcal{B}_{h,u,w}$, содержащая $\mathcal{P}_{h,u,w}$ и $C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda}$ при $\lambda \in P_+$, $(w\lambda \neq)\mu \in P(\lambda)$, $1 \leqslant p \leqslant \dim L(\lambda)_\mu$, и $\mathcal{N}^-_{h,u,w}$, содержащую $(C^{\lambda}_{-\mu,p;\lambda})^*$ для тех же λ, μ, p.

Используя (4.12), (4.13) и теорему 3.1, получаем

Предложение 4.2. *Для любого j*

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j) \oplus \pi(\mathcal{N}^-_{h,u,w})(\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)). \tag{4.14}$$

Предложение 4.3. *Для любого j $\mathcal{P}_{h,u,w}$ действует в $\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$ неприводимо.*

Доказательство. Пусть $\hat{\mathfrak{H}} \subset \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$ инвариантно относительно $\pi(\mathcal{P}_{h,u,w})$. В силу (4.11) и теоремы 3.1

$$\pi(\mathbb{C}[G]_{h,u,w})(\hat{\mathfrak{H}}) \subset \hat{\mathfrak{H}} \oplus \bigoplus_{\gamma_s < \gamma_j^0} \mathfrak{H}(\gamma_s, D_j),$$

и так как π неприводимо, должно быть $\hat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$. •

Предложение 4.4. *Для любого* $j\mathfrak{H}(\gamma^0) = \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$.

Доказательство. Для любого $v \in \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$ $\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j) = \pi(\mathcal{P}_{h,u,w})v$, поэтому (4.14) дает

$$\mathfrak{H} = \pi(\mathcal{P}_{h,u,w})v \oplus \pi(\mathcal{N}^-_{h,u,w}\mathcal{P}_{h,u,w})v. \tag{4.15}$$

Пусть $j_1 \neq j$. Так как $\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j)$ инвариантно относительно $\pi(D_{j_1})$, мы можем выбрать в (4.15) $v \in \mathfrak{H}(\gamma'_{j_1}, D_{j_1})$. Тогда из (4.15) и (4.11) следует, что $\mathfrak{H} \subset \bigoplus_{\gamma' \leqslant \gamma'_{j_1}} \mathfrak{H}(\gamma', D_{j_1})$; сравнивая с (4.10), получаем

$$v \in \mathfrak{H}(\gamma_{j_1}^0, D_{j_1}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}(\gamma_{j_1}^0, D_{j_1}) = \pi(\mathcal{P}_{h,u,w}v) \subset \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j).$$

Меняя ролями j и j_1, находим

$$\mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j) \subset \mathfrak{H}(\gamma_{j_1}^0, D_{j_1}) \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}(\gamma_j^0, D_j) = \mathfrak{H}(\gamma^0).$$

•

Предложение 4.5. *Для любого* $\lambda \in P_+$

$$\pi(D_\lambda) = \pi(C_\lambda^*)\pi(C_\lambda) = I \quad \text{на} \quad \mathfrak{H}(\gamma^0). \tag{4.16}$$

Доказательство повторяет доказательство предложения 4.1 работы [4]; используется предложение 3.4. •

Следствие 4.6. *Старший вес любого неприводимого гильбертова* $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$*-модуля равен* $\gamma^0 = (1, 1, \ldots, 1)$.

Предложение 4.7. *Если* $\mathfrak{H}$ *— неприводимый гильбертовый* $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$*-модуль, то скалярное произведение в* $\mathfrak{H}$ *однозначно определяется своим сужением на* $\mathfrak{H}(\gamma^0)$.

Доказательство. Рассмотрим второе из разложений (4.10). Поскольку $\mathfrak{H}(\gamma) \perp \mathfrak{H}(\gamma')$ при $\gamma \neq \gamma'$, достаточно рассмотреть скалярное произведение векторов u, v веса γ. Из (4.10), (4.14), (4.12), предложения 4.4 и следствия 4.6 вытекает, что $\mathfrak{H}(\gamma) = \mathcal{P}(\gamma)(\mathfrak{H}(\gamma^0))$, где $\mathcal{P}(\gamma)$ — линейная оболочка мономов вида $P(\lambda, \mu, p) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant s} \pi(C^{\lambda_j}_{-\mu_j, p_j; \lambda_j})^*$, где $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s)$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_s)$, $p = (p_1, \ldots, p_s)$, $\lambda_j \in P_+$, $\mu_j \in P(\lambda_j)$, $1 \leqslant p_j \leqslant \dim L(\lambda_j)_{\mu_j}$ и

$$\exp(-h \sum_{1 \leqslant j \leqslant s} \varkappa_l(\lambda_j, \mu_j)) = \gamma_l \qquad \forall l. \tag{4.17}$$

Следовательно, достаточно выразить через скалярное произведение в $\mathfrak{H}(\gamma^0)$ скалярное произведение векторов вида $v = P(\lambda, \mu, p)v^0$, $v' = P'(\lambda', \mu', p')v^{0\prime}$, где $v^0, v^{0\prime} \in \mathfrak{H}(\gamma^0)$, а $P(\lambda, \mu, p)$, $P'(\lambda', \mu', p')$ удовлетворяют условию (4.17). Из (4.12) следует, что $\mathfrak{H}(\gamma^0)$ — инвариантное подпространство для $\tilde{P} = P(\lambda, \mu, p)^* P'(\lambda', \mu', p')$, поэтому $\tilde{P}v^{0\prime} \in \mathfrak{H}(\gamma^0)$ и скалярное произведение $\langle v, v' \rangle = \langle v', \tilde{P}v^{0\prime} \rangle$ однозначно определено. •

4.4. Обозначим через $\mathcal{I}$ двусторонний $*$-идеал в $\mathcal{P}_{h,u,w}$, порожденный элементами $D_j - I$, $j = 1, \ldots, n$. Из результатов п.4.2, 4.3 следует, что неприводимое представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$, удовлетворяющее условию (4.1), однозначно определяет неприводимое $*$-представление $\mathcal{P}_{h,u,w}\chi : \mathcal{P}_{h,u,w}/\mathcal{I} \to \mathrm{End}\mathfrak{H}(\gamma^0)$ и что $\mathcal{P}_{h,u,w} \cong A(P, \sigma)$, где $\sigma = \sigma_{h,u,w}$, а квантовый тор $A(P, \sigma)$ определен в п.0.4 введения.[1] Мы будем называть $\chi : A(P, \sigma) \to \mathrm{End}\mathfrak{H}(\gamma^0)$ главным весом представления π.

---

[1] Для $\lambda \in P_+$ U_λ и $U_{-\lambda}$ — образы C_λ и C_λ^* в $\mathcal{P}_{h,u,w}/\mathcal{I}$, а для $\lambda = \mu - \nu$, где $\mu, \nu \in P_+$, полагаем $U_\lambda = U_\mu U_{-\nu} \sigma(\mu, -\nu)$. Корректность этого определения проверяется непосредственно.

Теорема 4.1. *Неприводимые представления π^1, π^2 алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ эквивалентны, если и только если эквивалентны их главные веса χ^1, χ^2.*

Доказательство. Если π^1, π^2 эквивалентны, то эквивалентны и χ^1, χ^2, так как при изоморфизме собственное подпространство переходит в собственное.

Пусть теперь χ^1, χ^2 эквивалентны и $\mathfrak{H}^j(\gamma^0), j = 1, 2,$ — соответствующие гильбертовы $A(P, \sigma)$-модули. Мы можем их рассматривать и как $\mathcal{P}_{h,u,w}$-модули. Из предложения 4.7 и (4.15) следует, что достаточно доказать изоморфизм соответствующих π^j простых $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$-модулей $V^j = \mathfrak{H}^j(\gamma^0) \oplus \pi^\gamma(\mathcal{N}^-_{h,u,w})(\mathfrak{H}^j(\gamma^0))$.

Фиксируем $v^1 \in \mathfrak{H}^1(\gamma^0)$, обозначим через $v^2 \in \mathfrak{H}^2(\gamma^0)$ элемент, соответствующий v^1 при заданном изоморфизме, и рассмотрим подмодуль E модуля $V = V^1 \oplus V^2$, порожденный элементом $v = v^1 + v^2$. Проекция $\mathrm{pr}_1 : V \to V^1$ индуцирует гомоморфизм $\mathbb{C}[G]_{h,u,w}$-модулей $f_1 : E \to V^1$, причем $f_1(v) = v^1$. В силу предложений 4.3, 4.4 v^1 порождает V^1, поэтому f_1 сюръективен. Ядро этого гомоморфизма $N_1 = V^2 \cap E$ является подмодулем в V^2 и не содержит v^2, так как в силу предложений 4.3–4.5 $\pi^2(D_j)v^2 = v^2$ для любого j и любой вектор модуля E, удовлетворяющий условию $\pi(D_j)\tilde{v} = \tilde{v} \quad \forall j$, должен принадлежать $\mathfrak{H}(\gamma^0) = \pi(\mathcal{P}_{h,u,w})v \not\subset V^2$.

Итак, $N_1 \neq V^2$ и в силу неприводимости $V^2, N_1 = \{0\}$, т.е. f_1 — изоморфизм. Аналогично изоморфны E и V^2, поэтому изоморфны и V^1, V^2. •

Теорема 4.2. *Для любого неприводимого представления χ-алгебры $A(P, \sigma)$ в гильбертовом пространстве H_χ существует неприводимое представление π алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$ главного веса χ.*

Доказательство. Положим $\tilde{P} = P \oplus P$, $\tilde{\sigma}((\lambda, \mu), (\lambda', \mu')) = \exp(ih[(\mu, \mu')_u - (\lambda, \lambda')_u]/2)$, $C[G]^{\sim}_{h,u,w} = \mathbb{C}[G]_{h,0,w} \otimes A(\tilde{P}, \tilde{\sigma})$ и определим оператор $\mathcal{I} : \mathbb{C}[G]_{h,u,w} \to \mathbb{C}[G]_{h,u,w}$ равенством

$$\mathcal{I}(C^\omega_{-\mu,j;\lambda,k}) = C^\omega_{-\mu,j;\lambda,k} \otimes V_{(\mu,\lambda)}.$$

Если ввести в $\mathbb{C}[G]^{\sim}_{h,u,w}$ инволюцию $*$ равенством $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$, то $\mathcal{I}$ станет вложением $*$-алгебр, поэтому построение π можно начинать с построения $*$-представления $\tilde{\pi}$ алгебры $\mathbb{C}[G]^{\sim}_{h,u,w}$. Его мы ищем в виде $\tilde{\pi} = \pi_0 \otimes \tilde{\chi}$, где $\pi_0 : \mathbb{C}[G]_{h,0,w} \to \mathrm{End}H^0$ — построенное в [4] неприводимое представление, соответствующее клетке Шуберта X_w, и такое, что $\pi_0(C^\lambda_{-w\lambda,\lambda}) = I \quad \forall \lambda \in P_+$ на старшем подпространстве, а $\tilde{\chi} : A(\tilde{P}, \tilde{\sigma}) \to \mathrm{End}H_{\tilde{\chi}}$ — $*$-представление такое, что $H_\chi \subset H_{\tilde{\chi}}$ и $\chi(f) = \tilde{\chi}(f) \quad \forall f \in (P, \sigma)$ (здесь $A(P, \sigma)$ отождествлена с подалгеброй $A(P', \sigma') \subset A(\tilde{P}, \tilde{\sigma})$, где $P' = \{(-w\lambda, \lambda) | \lambda \in P\}$, $\sigma' = \tilde{\sigma}|_{P' \times P'}$).

Представление $\tilde{\chi}$ существует в силу следующей леммы.

Лемма 4.1. *Пусть $P_1, P_2 \subset \tilde{P}$ — подгруппы абелевой группы $\tilde{P}$ и $\tilde{P} = P_1 \otimes P_2$, $\sigma_1 = \tilde{\sigma}|_{P_1 \times P_1}$.*

Тогда для любого представления χ алгебры $A(P_1, \sigma_1)$ в гильбертовом пространстве H_χ существует гильбертово пространство $H_{\tilde{\chi}}$ и представление $\tilde{\chi}$ алгебры $A(\tilde{P}, \tilde{\sigma})$ в $H_{\tilde{\chi}}$ такие, что $\chi(f) = \tilde{\chi}(f) \quad \forall f \in A(P_1, \sigma_1)$.

Доказательство. Положим $H = A(\tilde{P}, \tilde{\sigma}) \otimes_{A(P_1, \sigma_1)} H_\chi$, заметим, что $H = \bigoplus_{\mu \in P_2} H_\mu$, где $H_\mu = \{U_\mu \otimes v | v \in H_\chi\}$ (так как

$U_\lambda = U_{\lambda_2} \cdot U_{\lambda_1} \cdot \tilde{\sigma}(\lambda_2, \lambda_1) \; \forall \lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \tilde{P} = P_1 \oplus P_2$), и введем в H скалярное произведение по формуле

$$\langle U_\lambda \otimes v, U_{\lambda'} \otimes v' \rangle_H = \delta_{\lambda\lambda'} \langle v, v' \rangle_{H_\chi}, \lambda, \lambda' \in P_2,$$

Очевидно, H — $A(\tilde{P},\tilde{\sigma})$-модуль, и если для всех $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 \in \tilde{P} = P_1 \oplus P_2$, $\mu', \mu'' \in P_2$, $v', v'' \in H_\chi$ верно равенство

$$\langle U_\lambda \cdot U_{\mu'} \otimes v', U_{\mu''} \otimes v'' \rangle_H = \langle U_{\mu'} \otimes v', U_\lambda^* U_{\mu''} \otimes v'' \rangle_H, \tag{4.19}$$

то $\overline{H}$ — пополнение H — является искомым гильбертовым $A(\tilde{P},\tilde{\sigma})$-модулем.

Используя определения скалярного произведения в H и алгебры $A(\tilde{P},\tilde{\sigma})$, нетрудно показать, что правая и левая части в (4.19) равны соответственно

$$\tilde{\sigma}(\lambda,\mu')\tilde{\sigma}(\lambda_1,\lambda_2+\mu')\delta_{\lambda_2+\mu',\mu''}\langle U_{\lambda_1}v', v''\rangle_{H_\chi}, \tag{4.20}$$

$$\tilde{\sigma}(\lambda,\mu'')\tilde{\sigma}(\lambda_1,-\lambda_2+\mu'')\delta_{\mu',-\lambda_2+\mu''}\langle v', U_{-\lambda_1}v''\rangle_{H_\chi}. \tag{4.21}$$

Произведения последних двух множителей в (4.20), (4.21) отличны от нуля, только если $\mu'' = \mu' + \lambda_2$, но тогда они равны и равны произведения двух сомножителей. Тем самым равенство (4.19), а вместе с ним и лемма доказаны. •

Обозначим через $\overline{H}$ пополнение предгильбертова пространства $H^0 \otimes H_{\tilde{\chi}}$, через L_w — старшее (одномерное) подпространство $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$-модуля $\overline{H}$ и через H' — гильбертовый подмодуль $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$-модуля $\overline{H}$, порожденный $L_w \otimes_{\mathbb{C}} H^0$ (напомним, что вложение $\mathcal{I}$ позволяет рассматривать $\mathbb{C}[K]^{\sim}_{\tilde{h},u,w}$-модуль $\overline{H}$ как $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$-модуль). Очевидно, $L_w \otimes_{\mathbb{C}} H_0$ — старшее подпространство модуля H'. Пусть $H'' \subset H'$ — подмодуль, порожденный всеми подмодулями, не равными H'. Все такие подмодули, а следовательно, и H'', имеют тривиальные пересечения с $L_w \otimes_{\mathbb{C}} H^0$, поэтому $H' \ominus H''$ — искомый неприводимый $\mathbb{C}[K]_{h,u,w}$-модуль.

Тем самым доказательство теоремы 4.2 завершено. •

4.5. Теоремы 4.1 и 4.2 дают взаимно-однозначное соответствие между неприводимыми представлениями алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$, соответствующими клетке Шуберта X_w, и неприводимыми представлениями алгебры $A(P,\sigma) = A(P,\sigma_{u,h,w}$ в гильбертовых пространствах. В следующем параграфе мы рассмотрим эти представления и их связь с симплектическими листами.

§ 5. Неприводимые представления алгебры $A(P,\sigma_{h,u,w})$ и симплектические листы

5.1. Положим $\sigma = \sigma_{h,u,w}$, $P_Z = \{\lambda | \sigma(\lambda,\mu) = 1 \quad \forall \mu \in P\}$ и обозначим через $Z(P,\sigma)$ центр алгебры $A(P,\sigma)$.

Лемма 5.1. $Z(P,\sigma) = A(P_Z,\sigma)(= A(P_Z,\sigma|_{P_Z\times P_Z}))$.

Доказательство. Очевидно, $A(P_Z,\sigma) \subset Z(P,\sigma)$ и $U_\lambda \notin Z(P,\sigma)$, если $\lambda \notin P_Z$. Следовательно, нам осталось показать, что не существует $U \in Z(P,\sigma)$ вида $U = \sum_{\lambda\in M} d_\lambda U_\lambda$, где $M \subset P$, $M \cap P_Z = \varnothing$ и $d_\lambda \neq 0$. Допустим, что такой U существует. Тогда в силу условия $M \cap P_Z = \varnothing$ не существует $\lambda_0 \in P \setminus P_Z$ такого, что $M - \lambda_0 \subset P_Z$, — иначе U_{λ_0} принадлежал бы центру вместе с U, что невозможно. Следовательно, существуют $\lambda_1, \lambda_2 \in M$, $\mu \in P_+$ такие, что $\sigma(\lambda_1,\mu) \neq \sigma(\lambda_2,\mu)$ и

$$\sigma(\lambda_1,\mu)^{-1}U = \sigma(\lambda_1,\mu)^{-1}U_\mu U U_\mu = \sum_{\lambda\in M} d'_\lambda U_\lambda \in Z(P,\sigma),$$

где $d'_{\lambda_1} = d_{\lambda_1}$, $d'_{\lambda_2} \neq d_{\lambda_2}$. Поэтому

$$U^1 = U - \sigma(\lambda_1,\mu)^{-1}U = \sum_{\lambda\in M^1} d'_\lambda U_\lambda \in Z(P,\sigma),$$

где $M^1 \subset M$, $M^1 \neq M$ и все $d'_\lambda \neq 0$. Продолжая таким же образом, найдем $\lambda \in P \setminus P_Z$ такой, что $U_\lambda \in Z(P,\sigma)$. Но это невозможно и полученное противоречие доказывает лемму. •

Ниже „представление“ означает „$*$-представление в гильбертовом пространстве“.

Неприводимое представление $\chi : A(P,\sigma) \to \mathrm{End}H$ определяет характер $\chi_Z : Z(P,\sigma) \to \mathbb{C}$, но обратное, вообще говоря, неверно. Мы рассмотрим этот вопрос ниже, а сейчас докажем следующий результат.

Теорема 5.1. *Характер χ_Z однозначно определяет идеал $\mathcal{I}_\chi = \mathrm{Ker}\chi$ равенством $\mathcal{I}_\chi = A(P,\sigma)(\mathrm{Ker}\chi_Z)$.*

Доказательство. Пусть существует

$$U = \sum_{\lambda \in M} d_\lambda U_\lambda \in \mathcal{I}_\chi \setminus A(P,\sigma)(\mathrm{Ker}\chi_Z). \tag{5.1}$$

Если существуют $\lambda_1, \lambda_2 \subset M (\subset P)$ такие, что $\lambda_1 - \lambda_2 \in P_Z$, то $U_{-\lambda_1} \cdot U_{\lambda_2} \in Z(P,\sigma)$ и $\chi(U_{\lambda_1}) = d\chi(U_{\lambda_2})$, где $d \in \mathbb{C}$. Следовательно, если мы заменим в (5.1) U_{λ_1} на dU_{λ_2}, то мы по-прежнему будем иметь $U \in \mathcal{I}_\chi \setminus A(P,\sigma)(\mathrm{Ker}\chi_Z)$. Приводя подобные члены и повторяя в случае необходимости описанную процедуру, получим (5.1) с $d_\lambda \neq 0$, $\lambda_1 - \lambda_2 \notin P_Z \quad \forall \lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in M$. Следовательно, существуют $\mu \in P$, $\lambda_1, \lambda_2 \in M$ такие, что $\sigma(\lambda_1, \mu) \neq \sigma(\lambda_2, \mu)$ и элемент

$$U^1 = U - \sigma(\lambda_1, \mu)^{-1} U_{-\mu} U U_\mu = \sum_{\lambda \in M \setminus \{\lambda_1\}} d'_\lambda U_\lambda$$

с $d'_{\lambda_2} \neq 0$ принадлежит $\mathcal{I}_\chi \setminus A(P,\sigma)(\mathrm{Ker}\chi_Z)$. Итерируя достаточное число раз, найдем элемент $U_\lambda \in \mathcal{I}_\chi$, что невозможно.

Следовательно, элемент U из (5.1) не существует, и теорема доказана. •

5.2. Положим $\hat{P} = P/P_Z$ и выберем для $\hat{\lambda}, \hat{\mu} \in \hat{P}$ представители $\lambda, \mu \in P$. Если $\mu' - \mu \in P_Z$, то $\sigma(\lambda,\mu) = \sigma(\lambda,\mu')\, \forall \lambda \in P$, поэтому равенство $\hat{\sigma}(\hat{\lambda},\hat{\mu}) = \sigma(\lambda,\mu)$ определяет функцию $\hat{\sigma} : \hat{P} \times \hat{P} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющую условиям, позволяющим построить алгебру $A(\hat{P},\hat{\sigma})$. По построению, $\hat{P}_Z = \{0\}$, поэтому по лемме 5.1 центр алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ тривиален; следовательно (теорема 5.1), тривиально и ядро любого неприводимого представления алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$.

Теорема 5.2. *Каждый характер χ_Z определяет $*$-изоморфизм $\lambda : A(P,\sigma)/I_\chi \to A(\hat{P},\hat{\sigma})$.*

Доказательство. Пусть $U_{\hat{\lambda}}$ — образующие алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$, и пусть $\{\lambda_j\}_{1 \leqslant j \leqslant r}$, $\{\mu_j\}_{1 \leqslant j \leqslant n}$, где $r \leqslant n$ — базисы $\mathbb{Z}$-модулей P_Z, P соответственно. Тогда

$$\lambda_j = \sum_k m_{jk}\mu_k, \text{ где } m^j = (m_{j1}, \ldots, m_{jn}) \in \mathbb{Z}^n,$$

линейно независимы, и мы можем найти $\varphi \in R^n$ из условий $\exp(i(\varphi, m^j)) = \chi_Z(U_{\lambda_j})$, $1 \leqslant j \leqslant r$.

Представим $\lambda \in P$ в виде $\lambda = \sum m_k \mu_k$ и положим $U'_\lambda = \exp(-i(\varphi, m))U_\lambda$. Тогда $\chi_Z(U'_\lambda) = 1\, \forall \lambda \in P_Z$ и $\alpha : U'_\lambda \mapsto \hat{U}_{\hat{\lambda}}$ — искомый изоморфизм. •

5.3. Теорема 5.3. *Класс неприводимых представлений алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ единствен, если и только если группа $\hat{P}$ конечна.*

Доказательство. Мы используем тривиальность центра алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ и тривиальность ядра любого ее неприводимого представления (первое утверждение доказано в лемме 5.1, второе следует из теоремы 5.2).

Если группа $\hat{P}$ конечна, то $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ — конечномерная $\mathbb{C}^*$-алгебра. Следовательно, $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ — $\mathbb{C}^*$-алгебра типа 1 (см.[10]), но для алгебр типа 1 соответствие между классами неприводимых представлений и примарными идеалами взаимно-однозначно.

Пусть теперь $\mathrm{card}\hat{P}=\infty$. Так как центр тривиален, то все $\hat{\sigma}(\hat{\lambda},\hat{\mu})$ не могут быть корнями из единицы, но если $\hat{\lambda}$ имеет конечный порядок k, то $U_{\hat{\lambda}}^k=I$ и $\forall\hat{\mu}\hat{\sigma}(\hat{\mu},\hat{\lambda})^k=1$, так как $U_{\hat{\lambda}}^kU_{\hat{\mu}}=\hat{\sigma}(\hat{\lambda},\hat{\mu})^kU_{\hat{\mu}}U_{\hat{\lambda}}^k=U_{\hat{\mu}}U_{\hat{\lambda}}^k$. Представим $\hat{P}$ в виде $\hat{P}=\oplus_j\mathbb{Z}\hat{\lambda}_j\oplus\oplus_k\mathbb{Z}_{p_k}\hat{\mu}_k$ и заметим, что в силу доказанного выше существуют j,j' такие, что $\sigma_0=\hat{\sigma}(\hat{\lambda}_j,\hat{\lambda}'_j)$ не является корнем из единицы (в противном случае все $\hat{\sigma}(\hat{\lambda},\hat{\mu})$ были бы корнями из единицы и группа $\hat{P}$ была бы конечной).

Положим $\tilde{P}=\mathbb{Z}\hat{\lambda}_j\oplus\mathbb{Z}\hat{\lambda}_{j'},\tilde{\sigma}=\hat{\sigma}\big|_{\tilde{P}\times\tilde{P}}$ и построим в $l_2(\mathbb{Z})$ два неприводимых представления $\tilde{\chi}_1$,$\tilde{\chi}_2$ алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$ с помощью формул

$$\tilde{\chi}_1(U_{\hat{\lambda}_j})e_k=\sigma_0^ke_k,\qquad \tilde{\chi}_1(U_{\hat{\lambda}_{j'}})e_k=e_{k+1},$$
$$\tilde{\chi}_2(U_{\hat{\lambda}_j})e_k=e_{k+1},\qquad \tilde{\chi}_2(U_{\hat{\lambda}_{j'}})e_k=\sigma_0^{-k}e_k.$$

Эти представления неприводимы и неэквивалентны, поэтому мы можем построить с помощью леммы 4.1 неприводимые неэквивалентные представления алгебры $A(\hat{P},\hat{\sigma})$. •

5.4. Теоремы 5.1, 5.2 устанавливают взаимно-однозначное соответствие между множествами

ядер неприводимых представлений алгебры $A(P,\sigma)$;

характеров $\chi_Z : Z(P,\sigma)\to\mathbb{C}$.

В силу теорем 5.2, 5.3 мы можем заменить здесь множество ядер неприводимых представлений на множество классов неприводимых представлений, если и только если группа $\hat{P}$ конечна.

5.5. Напомним, что $\sigma(\lambda,\mu)=\exp(ih\theta_{u,w}(\lambda,\mu))$, где $\theta_{u,w}(\lambda,\mu)=-(w,\lambda,w\mu)_u+(\lambda,\mu)u=((u-w^{-1}uw)\lambda,\mu)$, поэтому условие $\mathrm{card}\hat{P}<\infty$ может быть выполнено, только если все $\theta_{u,w}(\lambda,\mu)$, $\lambda,\mu\in P$, соизмеримы.

Точнее, $\mathrm{card}\hat{P}<\infty$, если и только если $\forall\lambda,\mu\in P$

$$h\theta_{u,w}(\lambda,\mu)\in\pi Q. \tag{5.2}$$

Следовательно, только при этом условии теоремы 3.2, 4.1, 4.2, 5.1–5.3 дают полное описание неприводимых представлений алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$, а в остальных случаях мы получаем только описание в терминах неприводимых представлений квантовых торов (и описание ядер неприводимых представлений).

Далее, только при условии (5.2) пополнение алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$ по норме $\|f\|=\sup\|\pi(f)\|$, где π — неприводимое представление, является $\mathbb{C}^*$-алгеброй типа 1.

5.6. Если $w\neq e,u\neq 0$, то в ситуации общего положения (5.2) не выполняется для всех λ, $\mu\in P\backslash 0$, поэтому все неприводимые представления алгебры $\mathbb{C}[K]_{h,u}$, соответствующие клетке Шуберта X_w, имеют одно ядро.

5.7. Если $w \neq e, u \neq 0$, то в ситуации общего положения симплектический лист $\Sigma(r_u) \subset K_w$ либо равен K_w (если ранг четен), либо плотен в K_w (если ранг нечетен) — см.п.0.3; если же $w = e$, то симплектические листы — точки тора T, а неприводимые представления одномерны и параметризуются точками тора T (см.[4]). Поэтому в ситуации общего положения существуют взаимнооднозначные соответствия: если ранг четен, то

симплектический лист — ядро неприводимого представления, а если ранг нечетен, то

замыкание симплектического листа — ядро неприводимого представления.

В частности, замыкания ненульмерных листов и неприводимые неодномерные представления в ситуации общего положения параметризуются элементами $w \in W \backslash e$, в то время как в случае $u = 0$ — парами $(t, w) \in T \times (W \backslash e)$.

5.8. Ситуация общего положения в случае нечетного ранга имеет некоторую аналогию в теории диких групп Ли — см.[17], с.322.

5.9. Конечно, есть случаи, когда нет соответствий, описанных в п.5.7. Например, есть случаи, когда нет соответствий, описанных в п.5.7. Например, если определенная в п.0.3 подгруппа $T'_w \subset T$ замкнута, то мы имеем серию листов $\Sigma \subset K_w$, замкнутых в K_w и параметризованных элементами $t \in T/T'_w$, однако для почти всех $h > 0$ условие (5.2) не будет выполнено ни для каких $\lambda, \mu \in P$ и, следовательно, будет верно утверждение п.5.6.

Список литературы

[1] Дринфельд В. Г., *Квантовые группы*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ **155** (1986), 18–49.

[2] Ваксман Л. Л., Соейбельман Я. С., *Алгебра функций на квантовой группе* SU(2), Функцион. анализ и его прил. **22**, вып. 3 (1988), 1–14.

[3] Сойбельман Я. С., *Неприводимые представления алгебры функций на квантовой группе* SU(n) *и клетки Шуберта*, ДАН СССР **307**, вып. 1 (1989), 41–45.

[4] Сойбельман Я. С., *Алгебра функций на компактной квантовой группе и ее представления*, Алгебра и анализ **2**, вып. 1 (1990), 190-242.

[5] Решетихин Н. Ю., Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д., *Квантование групп и алгебр Ли*, Алгебра и анализ **1**, вып. 1 (1989), 178–206.

[6] Woronowicz S. L., *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), 613–665.

[7] Jiang-Hua Lu., Weinstein A., *Poisson Lie groups, dressing transformations and Bruhat decompositions. Preprint PAM-414*, Univ. of California, Berkeley, 1988, pp. 35.

[8] Connes A., *Non-commutative differential geometry*, Publ. Math. I.H.E.S. no. 62 (1986).

[9] Стейнберг Р., *Лекции о группах Шевалле*, Мир, М., 1975, с. 182.

[10] Диксмье Ж., *C^*-алгебры и их представления*, Наука, М., 1974, с. 400.

[11] Semenov-Tian-Shansky M. A., *Dressing transformations and Poisson group actions*, Publ. RIMS **21** no. 6 (1985), 1237–1260.

[12] *Quantum R-matrix to the GTS*, Lect. Notes in Phys. **246** (1985), 537–548.

[13] Rosso M., *Representations irreducibles de dimensions finie du q-analogue de l'algebre enveloppante d'une algebre de Lie simple*, Compt. Rend. Acad. Sci. **305** no. 1 (1987), 587–590.

[14] Lustig, *Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebra*, *Preprint MIT*, 1987.

[15] Дринфельд В. Г., *О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа*, Алгебра и анализ **1**, вып. 2 (1989), 30–47.

[16] Бурбаки Н., *Группы и алгебры Ли*, Мир, М., 1972.

[17] Кириллов А. А., *Элементы теории представлений*, Наука, М., 1972.

Ростовский-на-Дону
институт народного хозяйства

Поступило 23 января 1990 г.