С. С. МУСИНА

О ПОСТРОЕНИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ ДЛЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В заметке предлагается видоизменение метода академика С. А. Чаплыгина [4] для построения приближенного решения уравнения

$$y' = f(s, y, Y), \; y(a) = y_0, \tag{1}$$

где

$$Y = \int\limits_a^x K(s, t, y)\, dt;$$

x принимает значения s или b, причем в обоих случаях $s \in [a, b]$.

В ранее опубликованной заметке автора [2] был изложен один метод, дающий возможность практически проще, чем у С. А. Чаплыгина, строить двусторонние приближения, но при этом уменьшалась скорость сходимости и имела порядок $\frac{1}{n!}$. В первоначально предложенном методе, как установил Н. Н. Лузин [1], она порядка 2^{-2^n}.

Предлагаемый здесь метод построения двусторонних приближений сохраняет тот же порядок сходимости, несмотря на то, что производные первого порядка функции $f(s, y, Y)$ по y и Y удовлетворяют более общему условию — условию Липшица вместо ранее принятого предположения о постоянстве знака производной второго порядка.

Рассмотрим уравнение (1). Положим, что функции $f(s, y, Y)$, $K(s, t, y)$ удовлетворяют условиям теоремы об интегральных неравенствах [3] и

$$\begin{aligned} &\left|\frac{\partial f}{\partial y}(s, y_2, Y) - \frac{\partial f}{\partial y}(s, y_1, Y)\right| \leqslant A_1 |y_2 - y_1|, \\ &\left|\frac{\partial f}{\partial Y}(s, y, Y_2) - \frac{\partial f}{\partial Y}(s, y, Y_1)\right| \leqslant A_2 |Y_2 - Y_1|. \end{aligned} \tag{2}$$

Предположим, что каким-либо способом найдены непрерывные со своими производными функции $z = z(s)$, $u = u(s)$ такие, что $u \leqslant y \leqslant z$, $u(a) = z(a) = y_0$, $s \in [a, b]$ и

$$u' - f(s, u, U) < 0,$$

$$z' - f(s, z, Z) > 0$$

для $s \in [a, a + \alpha]$, $\alpha > 0$, $[a, a + \alpha] \subset [a, b]$. Определим $(n + 1) - e$ приближения по известным парам $u_n(s)$ и $z_n(s)$ из уравнений

$$u_{n+1} = f(s, u_n, U_n) + m_n(u_{n+1} - u_n) + M_n(U_{n+1} - U_n), \quad (3)$$

$$z_{n+1} = f(s, z_n, Z_n) + m_n(z_{n+1} - z_n) + M_n(Z_{n+1} - Z_n), \quad (4)$$

$$u_{n+1}(a) = z_{n+1}(a) = y_0, \quad (5)$$

где

$$m_n \leqslant \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{s}, \bar{y}, \bar{Y}), \quad M_n \leqslant \frac{\partial f}{\partial \bar{Y}}(\bar{s}, \bar{y}, \bar{Y})$$

при

$$\bar{s} \in [a, a + \alpha], \ \bar{y} \in [u_n, z_n], \quad \bar{Y} \in [U_n, Z_n].$$

Докажем, что для любого n на $[a, a + \alpha]$ имеют место неравенства

$$u < u_1 < \ldots < u_n < \ldots < y < \ldots < z_n < \ldots < z_1 < z, \quad (7)$$

$$u_n' - f(s, u_n, U_n) < 0, \quad (8)$$

$$z_n' - f(s, z_n, Z_n) > 0, \quad (9)$$

$$u_n(a) = z_n(a) = y_0. \quad (10)$$

Соотношение (10) сразу следует из (3), (4) и (5). Докажем неравенства (7), для этого подставим u_n, z_n и y вместо u_{n+1}, z_{n+1} в (3) и (4), используя (1) и (6), получаем

$$u_n' - \{f(s, u_n, U_n) + m_n(u_n - u_n) + M_n(U_n - U_n)\} < 0,$$

$$z_n' - \{f(s, z_n, Z_n) + m_n(z_n - z_n) + M_n(Z_n - Z_n)\} > 0,$$

$$y' - \{f(s, u_n, U_n) + m_n(y - u_n) + M_n(Y - U_n)\} =$$

$$= f(s, y, Y) - f(s, u_n, U_n) - m_n(y - u_n) - M_n(Y - U_n) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - m_n\right)(y - u_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} - M_n\right)(Y - U_n) > 0.$$

Аналогично имеем

$$y' - \{f(s, z_n, Z_n) + m_n(y - z_n) + M_n(Y - Z_n)\} =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial y} - m_n\right)(y - z_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial Y} - M_n\right)(Y - Z_n) < 0,$$

где $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial Y}$ получаются по теореме о среднем и вычисляются при значениях y и Y, лежащих между u_n и z_n, U_n и Z_n соответственно. Применяя к этим соотношениям теорему об интегральных неравенствах [3], получаем

$$u_n < u_{n+1} < y < z_{n+1} < z_n \text{ на } [a, a + \alpha].$$

Проверим далее одно из неравенств: (8) или (9). В силу (3), (5) и (6) имеем

$$u'_{n+1} - f(s, u_{n+1}, U_{n+1}) = f(s, u_n, U_n) +$$
$$+ m_n(u_{n+1} - u_n) + M_n(U_{n+1} - U_n) - f(s, u_{n+1}, U_{n+1}) =$$
$$= \left(m_n - \frac{\partial f}{\partial y}(s, \overline{y}, \overline{Y})\right)(u_{n+1} - u_n) +$$
$$+ \left(M_n - \frac{\partial f}{\partial Y}(s, \overline{y}_3 \overline{Y}_3)\right)(U_{n+1} - U_n) < 0,$$

где $u_n < \overline{y}, \overline{y}_3 < z_n, U_n < \overline{Y}, \overline{Y}_3 < Z_n$.

Аналогично проверяется (9). Итак, z_{n+1}, u_{n+1} являются соответственно верхней и нижней функциями для уравнения (1).

Дадим оценку скорости сходимости процесса. Вычитая из уравнения (4) уравнение (3), имеем

$$z'_{n+1} - u'_{n+1} = \frac{\partial f}{\partial y}(z_n - u_n) + \frac{\partial f}{\partial Y}(Z_n - U_n) + m_n(z_{n+1} - u_{n+1}) -$$
$$- m_n(z_n - u_n) + M_n(Z_{n+1} - U_{n+1}) - M_n(Z_n - U_n), \qquad (11)$$

где $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial f}{\partial Y}$ получены, как и выше, по теореме о среднем,

$$Z_n - U_n = \int_a^x [K(s, t, z_n) - K(s, t, u_n)]\, dt \leqslant$$
$$\leqslant K \int_a^x (z_n - u_n)\, dt, \quad 0 \leqslant \frac{\partial K}{\partial y} \leqslant K.$$

По теореме Вейерштрасса, $m_n = \frac{\partial f}{\partial y}(s, \overline{\overline{y}}_1, \overline{\overline{Y}}_1)$, $M_n = \frac{\partial f}{\partial Y}(s, \overline{\overline{y}}_2, \overline{\overline{Y}}_2)$, где $\overline{\overline{y}}_1$ и $\overline{\overline{y}}_2 \in (u_n, z_n)$. Значит, из (11) и (12) следует

$$z'_{n+1} - u'_{n+1} \leqslant m_n (z_{n+1} - u_{n+1}) +$$

$$+ M_n K \int_a^x (z_{n+1} - u_{n+1})\, dt + \left(\frac{\partial f}{\partial y} - m_n\right)(z_n - u_n) +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial Y} - M_n\right) K \int_a^x (z_n - u_n)\, dt \leqslant$$

$$\leqslant m_n (z_{n+1} - u_{n+1}) + M_n K \int_a^x (z_{n+1} - u_{n+1})\, dt +$$

$$+ A_1 (z_n - u_n)^2 + A_2 K (z_n - u_n) \int_a^x (z_n - u_n)\, dt.$$

Вводя обозначение

$$\max_{[a,\, b]} (z_k - u_k) = \delta_k, \ (k = n,\ n+1),$$

находим, что

$$\delta_{n+1} \leqslant [m_n + M_n K (b - a)]\, \delta_{n+1} + [A_1 + A_2 K (b - a)]\, \delta_n^2, \qquad (12)$$

$$\delta_{n+1}(a) = \delta_n(a) = 0.$$

Вместо (12) рассмотрим уравнение

$$\Delta_{n+1} = A\, \Delta_{n+1} + B \Delta_n^2, \qquad (13)$$

где

$$A = m_n + M_n K (b - a),\ B = A_1 + A_2 K (b - a).$$

Сравнивая (12) и (13), получаем $\delta_{n+1} < \Delta_{n+1}$ по основной теореме о дифференциальных неравенствах [4], а из (13)

$$\Delta_{n+1} = B \int_a^s e^{A(s-t)} \Delta_n^2\, dt.$$

Итак, нам удалось свести оценку сходимости построенных приближений к форме, которая являлась исходной при исследованиях академика Н. Н. Лузина [1] сходимости приближений для дифференциальных уравнений, поэтому нет необходимости излагать здесь дальнейшие вычисления, ограничимся лишь указанием, что она достигает порядка 2^{-2^n} ([1], с. 25—27).

ЛИТЕРАТУРА

1. Лузин Н. Н. О методе приближенного интегрирования академика С. А. Чаплыгина. — Труды ЦАГИ, 1932, вып. 141, с. 1—32.

2. Мусина С. А. Об одном методе построения приближений для интегро-дифференциальных уравнений. — Разложение по ортогональным многочленам. Изд-во Казанского ун-та, 1972, с. 82—88.

3. Мусина С. С. Приближенное решение нелинейных интегро-дифференциальных уравнений с обыкновенными производными. — Учен. зап. Казанского ун-та, сб. работ НИИММ, т. 113, кн. 10, 1953, с. 169—187.

4. Чаплыгин С. А. Новый метод приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, М.—Л., ГТТИ, 1950.