Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

С. Я. Альпер, О приближении аналитических функций в среднем по области,
Докл. АН СССР, 1961, том 136, номер 2, 265–268

https://www.mathnet.ru/dan24491

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
https://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 18.97.9.175
9 декабря 2025 г., 17:36:33

Доклады Академии наук СССР
1961. Том 136, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Я. АЛЬПЕР

О ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СРЕДНЕМ ПО ОБЛАСТИ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 1 VIII 1960)

Рассмотрим класс функций H_p' $(p \geqslant 1)$, аналитических в ограниченной односвязной области D, для которых

$$\| f(z) \|_D = \left\{ \iint\limits_D | f(z) |^p \, d\sigma_z \right\}^{1/p} < \infty, \quad z = x + iy, \quad d\sigma_z = dx\, dy. \tag{1}$$

Для некоторых типов областей, принадлежащих классу Каратеодори, мы установим связь между интегральным модулем непрерывности функции $f(z) \in H_p'$ в D

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|h| \leqslant \delta} \left\{ \iint\limits_D | f(z+h) - f(z) |^p \, d\sigma_z \right\}^{1/p}, \tag{2}$$

$f(z) = 0$ вне D, и ее наилучшим приближением в среднем $\rho_n^{(p)}(f, D)$ полиномами n-й степени, которое определяется как точная нижняя граница чисел

$$\left\{ \iint\limits_D | f(z) - Q_n(z) |^p \, d\sigma_z \right\}^{1/p}$$

по всевозможным полиномам $Q_n(z)$ n-й степени.

Мы будем пользоваться неравенством

$$\left\{ \iint\limits_D d\sigma_z \left[\int_a^b |F(z, u)| \, du \right]^p \right\}^{1/p} \leqslant \int_a^b du \left[\iint\limits_D | F(z, u) |^p \, d\sigma_z \right]^{1/p}, \tag{3}$$

которое справедливо, когда $F(z, u)$ определена для любой пары точек (z, u), $z \in D$, $a \leqslant u \leqslant b$, и интегралы существуют. Его можно получить тем же методом, которым устанавливается обобщенное неравенство Минковского ([1]) для функции двух вещественных переменных, определенной в прямоугольнике.

1°. Приведем сначала один результат для функций класса H_p' в круге $|z| < 1$, являющийся аналогом известных теорем Харди и Литтльвуда.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $f(z)$ класса H_p' в круге $|z| < 1$ удовлетворяла условию*

$$\left\{ \iint\limits_{|z|<1} | f(re^{i(\vartheta+\tau)}) - f(re^{i\vartheta}) |^p \, r\, dr\, d\vartheta \right\}^{1/p} \leqslant A_1 |\tau|^\alpha, \tag{4}$$

$0 < \alpha \leqslant 1$, $p \geqslant 1$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\rho} | f'(re^{i\vartheta}) |^p \, r\, dr\, d\vartheta \right\}^{1/p} \leqslant \frac{A_2}{(1-\rho)^{1-\alpha}}, \quad 0 < \rho < 1. \tag{5}$$

Заметим, что здесь и в дальнейшем постоянные A с индексами не зависят от τ, ρ, n, δ. Дальше в этом пункте рассматривается область D, ограниченная аналитической кривой Жордана.

Теорема 2. *Если* $f^{(m)}(z) \in H_p'$ *в* D $(p \geqslant 1)$ *и* $\omega_p(\delta, f^{(m)}) \leqslant A_3\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то* $\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant A_4 n^{-m-\alpha}$ *для всех натуральных* $n \geqslant 1$; *здесь* m *целое* $\geqslant 0$.

Наметим ход доказательства для случая $m = 0$ и области D, совпадающей с кругом $|z| < 1$. Из интегральной формулы Коши имеем для $|z| \leqslant \rho$, $\rho < 1$

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_\rho} \frac{f(\zeta) - f(z)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta,$$

где L_ρ — окружность $|\zeta - z| = {}^1/_2(1 - \rho)$; полагая $\zeta - z = u = {}^1/_2(1 - \rho)\, e^{i\vartheta}$, получим на основании (3)

$$\left\{ \iint\limits_{|z| \leqslant \rho} |f'(z)|^p\, d\sigma_z \right\}^{1/p} \leqslant \frac{1}{\pi} \left\{ \iint\limits_{|z| \leqslant \rho} d\sigma_z \left[\int\limits_0^{2\pi} \frac{|f(z+u) - f(z)|}{1 - \rho}\, d\vartheta \right]^p \right\}^{1/p} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi(1-\rho)} \int\limits_0^{2\pi} d\vartheta \left\{ \iint\limits_{|z| \leqslant \rho} |f(z+u) - f(z)|^p\, d\sigma_z \right\}^{1/p}.$$

Из условия теоремы вытекает оценка

$$\left\{ \iint\limits_{|z| \leqslant \rho} |f'(z)|^p\, d\sigma_z \right\}^{1/p} \leqslant \frac{A_5}{(1 - \rho)^{1-\alpha}};$$

отсюда с помощью теоремы 1 следует

$$\left\{ \iint\limits_{|z| < 1} |f(re^{i(\vartheta+\tau)}) - f(re^{i\vartheta})|^p\, r\, dr\, d\vartheta \right\}^{1/p} \leqslant A_6 |\tau|^\alpha.$$

Доказательство завершается, если мы образуем функцию

$$P_n(z) = \frac{3}{2\pi n(2n^2 + 1)} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi}) \left[\frac{\sin n \frac{\varphi - \vartheta}{2}}{\sin \frac{\varphi - \vartheta}{2}} \right]^4 d\varphi, \quad z = re^{i\vartheta},$$

которая является многочленом степени $\leqslant 2n - 2$, используем неравенство (3) и оценки из доказательства теоремы Джексона. Отметим, что при $p > 1$ и условии $\omega_p(\delta, f) \leqslant A_7\delta^\alpha$, $0 < \alpha \leqslant 1$, в круге $|z| < 1$ справедлива оценка $\| f(z) - S_n(z) \|_{|z|<1} < A_8 n^{-\alpha}$, где $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ — частная сумма ряда Тэйлора для $f(z)$.

Обратная теорема о приближении в среднем основана на следующей лемме.

Лемма 1. *Если* $P(z)$ — *многочлен* n-*й степени, то*

$$\| P'(z) \|_D \leqslant nH \| P(z) \|_D,$$

где постоянная H *зависит только от области* D *и* $p \geqslant 1$.

Теорема 3. *Если для всех натуральных* $n \geqslant 1$ *выполняется неравенство* $\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant A_9 n^{-m-\alpha}$, *где* m *целое* $\geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то* $f^{(m)}(z) \in H_p'$ *в области* D *и выполняются неравенства*

$$\omega_p(\delta, f^{(m)}) \leqslant A_{10}\delta^\alpha \qquad \text{при } 0 < \alpha < 1,$$
$$\omega_p(\delta, f^{(m)}) \leqslant A_{11}\delta(1 + |\ln \delta|) \quad \text{при } \alpha = 1.$$

2°. Можно установить связь между наилучшим приближением $\rho_n^{(p)}(f, D)$ в среднем по области и интегральным условием Липшица для $f(z)$ на границе C области D; эту границу мы снова предполагаем аналитической кривой Жордана. Будем говорить, что $f(z) \in L_p(m, \alpha)$ на C, если $f^{(m)}(z)$ принадлежит классу E_p в смысле В. И. Смирнова в D и

$$\left\{\int_0^l |F(s+\tau) - F(s)|^p ds\right\}^{1/p} \leqslant A_{12} |\tau|^\alpha,$$

где $F(s) = f^{(m)}[z(s)]$, $z = z(s)$ — уравнение линии C, s — длина переменной дуги на C, l — длина кривой C, m целое $\geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$.

Теорема 4. *Для того чтобы $f(z) \in L_p(m, \alpha)$, $p \geqslant 1$, $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant A_{13}\, n^{-m-\alpha-1/p} \text{ для } n \geqslant 1.$$

Эта теорема теряет смысл, если $\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant A_{14} n^{-\gamma}$, $0 < \gamma \leqslant 1/p$. В этом случае справедлива:

Теорема 5. *Условие $\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant A_{15} n^{1-\alpha-1/p}$, где $1 - 1/p < \alpha < 1$, $p \geqslant 1$, является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $\int_a^z f(t)\, dt$, $a \in D$, входила в класс $L_p(0, \alpha)$ на C.*

Для частного случая $p = 2$ теоремы 4 и 5 были установлены в работе ([2]).

3°. Пусть теперь D обозначает произвольную ограниченную односвязную область с односвязным дополнением. Используя некоторые результаты и идеи С. Н. Мергеляна ([3]) в соответствующих вопросах теории равномерного приближения, мы установим оценку сверху для $\rho_n^{(p)}(f, D)$.

Для функции $f(z) \in H_p'$ $(p > 1)$ в области D образуем функцию

$$\Phi_\delta(z) = \iint_{|\zeta - z| < 1} f(\zeta) K_\delta(|\zeta - z|)\, d\xi\, d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta; \tag{6}$$

здесь δ — фиксированное число, $0 < \delta < 1$,

$$K_\delta(r) = \frac{3}{\pi\delta^2}\left(1 - \frac{r}{\delta}\right) \text{ для } 0 < r \leqslant \delta, \quad K_\delta(r) = 0 \text{ для } r > \delta.$$

Лемма 2. *Функция $\Phi_\delta(z)$ непрерывна на всей плоскости, $\Phi_\delta(z) = f(z)$ на множестве D_δ точек D, расстояние которых до границы C области D больше δ, $\|f(z) - \Phi_\delta(z)\|_{D'} \leqslant 2\omega_p(\delta, f)$ для любой конечной области D', $\|\Psi_\delta(z)\|_{D'} \leqslant 24\omega_p(\delta, f)/\delta$, где $\Psi_\delta(z) = (\partial U_\delta/\partial x - \partial V_\delta/\partial y) + i(\partial U_\delta/\partial y + \partial V_\delta/\partial x)$; здесь $U_\delta(z) = \operatorname{Re}\Phi_\delta(z)$, $V_\delta(z) = \operatorname{Im}\Phi_\delta(z)$, $\omega_p(\delta, f)$ определяется согласно (2) в области D.*

Лемма 3. *Пусть $F(z)$ — аналитическая функция на множестве D_δ, непрерывная в круге K с центром в некоторой точке $z_0 \in D$ и радиусом $2d$, где d — диаметр области D. Если частные производные от $u(z) = \operatorname{Re} F(z)$, $v(z) = \operatorname{Im} F(z)$ по x и y суммируемы в степени $p > 1$ по кругу K и $\|\psi(z)\|_K \leqslant M$, где $\psi(z) = (u_x' - v_y') + i(u_y' + v_x')$, то существует полином $P(z)$ такой, что $\|F(z) - P(z)\|_D \leqslant H_1 M\delta$, где H_1 — абсолютная постоянная.*

Заметим, что доказательство леммы 3 основано на формуле

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{F(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - \frac{1}{2\pi}\iint_\Delta \frac{\psi(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

которую можно доказать при условии, что $\psi(z)$ суммируема в степени $p > 1$ по области D, $F(z)$ непрерывна в замыкании Δ, а граница Γ области Δ —

гладкая кривая $z = z(s)$ (s — длина дуги на Γ), для которой

$$\int_0^c j(u)\, u^{-1} du < \infty, \tag{7}$$

где $j(u)$ — модуль непрерывности $z'(s)$. Доказательство этой формулы известно ([4]) при $p > 2$ для области с произвольной жордановой границей.

Пусть область D_R ограничена линией C_R, являющейся образом окружности $|w| = R > 1$ при однолистном отображении $w = \Phi(z)$ дополнения к D на $|w| > 1$, $\Phi(\infty) = \infty$.

Лемма 4. *Если $S(z) \in H'_p$ $(p > 1)$ в области D_R $(R > 1)$ и $\| S(z) \|_{D_R} \leqslant M$, то для $n \geqslant 1$*

$$\rho_n^{(p)}(S, D) \leqslant BMn^9 / R^n \tag{8}$$

для всякого R, $1 < R \leqslant R_0$, где константа B зависит только от R_0.

Пусть $d(\zeta, \mu)$ — расстояние точки ζ на границе C области D до линии C_R при $R = 1 + \mu$ и $d(\mu) = \sup\limits_{\zeta \in C} d(\zeta, \mu)$ — функция, введенная в работе ([3]). С помощью последних трех лемм устанавливается следующая теорема:

Теорема 6. *Если D — ограниченная односвязная область с односвязным дополнением и $f(z) \in H'_p$ $(p > 1)$ в области D, то для всех натуральных $n \geqslant 1$*

$$\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant B_1 \omega_p \left[d\left(\frac{10 \ln n}{n}\right), f \right], \tag{9}$$

где постоянная B_1 не зависит от n.

Отметим частные случаи этой теоремы.

1. *Если граница области D — гладкая кривая с непрерывно вращающейся касательной, то для $n \geqslant 1$ и любого $\varepsilon > 0$*

$$\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant B_2 \omega_p \left(\frac{1}{n^{1-\varepsilon}}, f \right),$$

где постоянная B_2 зависит от ε, но не зависит от n.

2. *Если для гладкой границы области D выполнено условие* (7), *то*

$$\rho_n^{(p)}(f, D) \leqslant B_3 \omega_p \left(\frac{\ln n}{n}, f \right)$$

для $n \geqslant 1$, где постоянная B_3 не зависит от n.

Ростовский-на-Дону государственный университет

Поступило 22 VIII 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Г. Харди, Д. Е. Литтльвуд, Г. Полиа, Неравенства, 1948. [2] J. L. Walsh, Proc. Am. Math. Soc., 10, № 2, 273 (1959). [3] С. Н. Мергелян, УМН, 7, № 2 (48), 31 (1952). [4] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, 1959.