УДК 514.174

СОВЕРШЕННЫЕ РЕШЕТКИ КАК ДОПУСТИМЫЕ ЦЕНТРИРОВКИ

С. С. Рышков, Е. П. Барановский

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее известный путь отыскания локально плотнейших решетчатых упаковок конгруэнтных шаров в n-мерном евклидовом пространстве E^n заключается в предварительном выводе совершенных n-мерных решеток, причем для небольших значений n по существу сводится к последнему. Методы разыскания совершенных решеток (совершенных форм) берут свое начало в работах Ш. Эрмита, Е. И. Золотарева, А. Н. Коркина, Г. Минковского. Особенно значителен вклад в развитие этих методов Г. Ф. Вороного, построившего в работе [23] алгоритм вывода совершенных форм при любом данном n. К настоящему времени составлен полный список совершенных решеток при всех $n \leqslant 6$, а в случае $n=7$ считается достаточно вероятным, что, кроме 33 уже найденных (см. Стаси [21]), других совершенных решеток этой размерности не существует. В пространствах E^n при $n>7$ известны только некоторые совершенные решетки.

В настоящей статье мы развиваем метод вывода совершенных решеток, базирующийся на допустимых центрировках («метод центрировок»). Попытка использовать метод центрировок была сделана Н. Хофрайтером в статье [15], опубликованной 50 лет назад. С тех пор этот метод был оставлен, причем, на наш взгляд, незаслуженно.

Пользуясь методом центрировок, мы выводим здесь все совершенные n-мерные решетки при $n \leqslant 6$. Как оказалось, вывод совершенных решеток из допустимых центрировок при $n \leqslant 4$ вполне элементарен, а при $n=5$, 6 является, на наш взгляд, наиболее простым из известных.

§ 1. Предварительные сведения. Проблема отыскания совершенных решеток (совершенных форм), ее краткая история

1. В первых пунктах этого параграфа дано краткое описание тех понятий, которые необходимы как для формулировки рассматриваемой проблемы, так и при изложении полученных в данной статье результатов. За большими подробностями и развернутой библиографией отсылаем читателя, например, к работам [2], [7].

Пусть в n-мерном евклидовом пространстве E^n задан n-мерный репер $\mathscr{E}=\{O;\ \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$. Через $(x^1, \ldots, x^n)$ будем обозначать координатную строку точки (и вектора) этого пространства относительно системы координат с базисом $\mathscr{E}$. Пусть $\Gamma=\Gamma(\mathscr{E})$ — n-мерная решетка, заданная репером $\mathscr{E}$, то есть множество всех целых точек пространства E^n относительно репера $\mathscr{E}$. Вектор решетки Γ — это целый относительно $\mathscr{E}$ вектор пространства E^n, начало которого совпадает с одной из точек решетки. Всякий n-мерный репер, составленный из векторов решетки и задающий ее, называется основным репером этой решетки.

Поставим в соответствие реперу $\mathscr{E}$ положительную квадратичную форму (ПКФ)

$$f(x^1, \ldots, x^n)=f=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x^i x^j, \quad a_{ij}=a_{ji}, \qquad (1.1)$$

матрица которой есть матрица Грама репера $\mathscr{E}$, то есть $a_{ij}=\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j$, $i, j=1, \ldots, n$. ПКФ (1.1) определяет репер $\mathscr{E}$ и заданную им решетку с точностью до их положения в пространстве. Всякую ПКФ из тех, что определяются основными реперами решетки Γ, будем называть формой, соответствующей этой решетке.

Всюду ниже мы будем рассматривать реперы с фиксированным началом O, а решетки — содержащими точку O. Кроме того, как реперы, так и решетки мы предполагаем заданными с точностью до поворотов и гомотетии относительно точки O. На ПКФ вида (1.1) мы будем смотреть как на способ задания репера и определяемой им решетки. При этом условимся не различать, если не оговаривается противное, реперы и решетки, заданные ПКФ f и ПКФ af, где $a>0$.

Множеству основных реперов решетки Γ соответствует такое множество ПКФ, что для любой их пары существует целочисленное унимодулярное преобразование, переводящее одну ПКФ в другую. Такие две квадратичные формы называют целочисленно эквивалентными (эквивалентными). Таким образом, решетке ставится в соответствие класс целочисленной эквивалентности (эквивалентности) ПКФ.

2. Величина $\min f=\{\min f(x^1, \ldots, x^n \mid (x^1, \ldots, x^n)\in \mathbf{Z}^n\setminus\{0, \ldots, 0\}\}$ называется арифметическим минимумом ПКФ f,

а целые векторы $\pm\mathbf{m}_k=\pm(m_k^1,\ldots,m_k^n)$, $k=1,\ldots,s$, для которых $f(\pm\mathbf{m}_k)=f(m_k^1,\ldots,m_k^n)=\min f$ — представлениями арифметического минимума. Так как $f(\mathbf{x})=\mathbf{x}^2$, то векторы $\pm\mathbf{m}_k$ являются самыми короткими, отличными от нулевого, векторами решетки, заданной формой f. Далее мы будем называть эти векторы минимальными векторами, или M-векторами, решетки.

Одной из классических задач теории ПКФ является задача об отыскании при данном n наибольшего значения величины $\Delta(f)=\frac{\min f}{(\det f)^{1/n}}$ и тех форм, на которых оно достигается. Позднее задача об отыскании $\sup\limits_f \Delta(f)=\gamma_n$ (постоянной Эрмита) получила геометрическое выражение как задача о плотнейших решетчатых упаковках конгруэнтных шаров.

Решетчатой упаковкой конгруэнтных шаров, соответствующей решетке Γ, называется множество не имеющих попарно общих внутренних точек шаров радиуса r, равного половине длины M-векторов решетки Γ, с центрами в точках этой решетки. Плотностью такой упаковки называется величина $d(\Gamma)=\Omega_n r^n V^{-1}$, где Ω_n — объем n-мерного шара единичного радиуса, V — объем параллелепипеда, построенного на основном репере (основного параллелепипеда) решетки. Пусть f — ПКФ, задающая решетку Γ. Тогда $r=\frac{1}{2}\sqrt{\min f}$, $V=\sqrt{\det f}$ и $d(\Gamma)=\Omega_n 2^{-n}\sqrt{(\min f)^n/\det f}=\Omega_n 2^{-n}[\Delta(f)]^{\frac{n}{2}}$. Так как $\sup\limits_{\Gamma\subset E^n} d(\Gamma)=\Omega_n 2^{-n}\gamma_n^{n/2}$, то видно, почему задача об отыскании постоянной Эрмита γ_n равносильна задаче об отыскании наибольшей плотности решетчатых упаковок.

ПКФ называется предельной формой, если на ней достигается локальный максимум величины $\Delta(f)$ при данном n. ПКФ называется совершенной формой, если по значению ее арифметического минимума и по его представлениям однозначно находятся коэффициенты формы. Свойство быть предельными (совершенными), помимо данной ПКФ, относится ко всему ее классу эквивалентности. Решетка, соответствующая классу предельной (совершенной) формы, называется предельной (совершенной) решеткой. Ниже, говоря о числе классов предельных и совершенных форм, как это обычно принято, слово «классы» часто будем опускать.

3. Понятие предельной формы ввели Е. И. Золотарев и А. Н. Коркин в работе [16]. В другой своей работе [17] они доказали конечность числа предельных форм при данном n, установили, что каждая предельная форма является и совершенной и нашли все предельные формы при $n=2$, 3, 4, 5. Их оказалось соответственно 1, 1, 2, 3.

Г. Ф. Вороной в работе [23] провел глубокие исследования свойств совершенных форм и построил алгоритм их отыскания при данном n. Пользуясь этим алгоритмом, Вороной нашел все совершенные формы от $n \leqslant 5$ переменных. Оказалось, что при всех $n \leqslant 5$ совершенные и предельные формы совпадают. (Однако, как это уже отмечено в работе [23], начиная с $n=6$ такое совпадение не имеет места).

Алгоритм Вороного вывода совершенных форм не сводится к тривиальным вычислениям, с ростом числа переменных квадратичных форм его сложность и громоздкость сильно возрастают. Этим объясняется то, что посредством алгоритма Вороного после его работы [23] были найдены совершенные формы еще только от 6 переменных, причем сделано это было только почти полвека после работы [23], в статье Барнса [9] 1957 года (работа [23] вышла в 1908 г.). Барнс [9] установил, что всего имеется 7 классов совершенных форм от 6 переменных, из которых только 6 предельны.

Хотя Блихфельдт [12] и нашел значения постоянной Эрмита при $n=6$, 7, 8 на ином пути, без предварительного знания предельных форм, интерес математиков к предельным и совершенным формам не уменьшился; в частности, это связано с их применением в теории приведения ПКФ и реперов, в теории решетчатых покрытий (см., например, [6]). Предельным и совершенным формам посвящены работы Хофрайтера [15], Коксетера [13], Коксетера и Тодта [14], Ранкина [19], В. С. Владимирова [1], Барнса [9, 10, 11], Скотта [20], Ватсона [24, 25], Лармута [18], С. С. Рышкова [5], Стаси [21, 22]; интересные исторические очерки по названной теме содержатся в книге Б. Н. Делоне [3]. Этот перечень как работ, так и авторов никак не претендует на полноту. Например, здесь не упомянуты работы, в которых предельные формы исследуются как реберные формы области приведения по Минковскому, работы, в которых рассматривается так называемое «совершенное разбиение» — разбиение в пространстве коэффициентов квадратичных форм, определяемое совершенными формами.

Последним наиболее значительным достижением в проблеме вывода всех совершенных форм при данном n являются названные выше работы Стаси [21, 22], опубликованные в 1974—75 гг. и посвященные случаю $n=7$. К этому времени разными авторами были найдены 22 совершенных формы от 7 переменных. Опираясь на результаты Ватсона [24, 25], Стаси развила метод перечисления совершенных форм, основанный на исследовании конфигураций минимальных векторов решеток. Этим методом она получила (при существенном использовании ЭВМ) еще 11 совершенных форм от 7 переменных. Хотя ее работы не содержат доказательства полноты списка из найденных 33 форм, имеются основания предполагать, что других совершенных форм от 7 переменных не существует.

4. Если две n-мерные решетки Γ и Λ таковы, что $\Gamma \subset \Lambda$, то

решетка Λ называется центрировкой решетки Γ, а решетка Γ — подрешеткой решетки Λ. Основной репер решетки называют выравненным репером, если он состоит только из ее минимальных векторов. (Выравненным репером, естественно, обладает не каждая решетка).

Особенностью предлагаемого в настоящей статье пути решения задачи о перечислении при данном n всех совершенных решеток, — метода центрировок, как мы его назвали во введении, — является то, что при отыскании совершенных решеток рассматривается не все множество n-мерных решеток, а весьма узкое его подмножество — допустимые (см. ниже) центрировки решеток, обладающих выравненными реперами.

Корни метода центрировок лежат в одной из теорем Коркина—Золотарёва из статьи [17] (теорема 2 в § 3 этой статьи). Метод центрировок был использован Хофрайтером [15] при попытке вывести совершенные 6-мерные решетки. Это было сделано в 1935 г., еще до работы [9], где они были выведены посредством алгоритма Вороного. В статье [15] были допущены неточности (см. замечание на стр. 394 работы [13]), которые привели к ошибочным результатам, и к методу более не возвращались. Правда, Барнс [10, 11] применял центрировки для получения совершенных форм, но это применение имело иной характер — при помощи известных совершенных решеток посредством центрирования производились новые.

5. В этой статье, формулируя всякого рода доказываемые утверждения, мы называем их, учитывая степень значимости и характер, теоремами, леммами или предложениями. Для теорем, предложений и части лемм (леммы 1—9) введена сплошная нумерация по всем параграфам, а для остальных лемм, — они имеют сугубо вспомогательный характер, — нумерация внутри данного § (на первом месте номер §, на втором — номер леммы).

Знаки $\triangleright$, $\square$ соответствует началу и концу доказательства.

§ 2. Допустимые центрировки

1. Значительная часть содержащихся в этом § определений и других сведений о допустимых центрировках, как и перечень типов последних при $n \leqslant 6$, взяты нами из статьи [5] (см. также [4]).

Пусть n-мерная решетка $\Gamma = \Gamma(\mathscr{E})$ задана основным репером $\mathscr{E}$ с соответствующей ему ПКФ $f(\mathscr{E})$. При рассмотрении центрировок этой решетки мы будем называть ее центрируемой решеткой, а ПКФ $f(\mathscr{E})$ — центрируемой формой.

Пусть Λ — одна из центрировок решетки $\Gamma(\mathscr{E})$, а $\Pi(\mathscr{E})$ — полуоткрытый параллелепипед $0 \leqslant x^i < 1$, $i = 1, \ldots, n$, построенный на основном репере $\mathscr{E}$. Радиусы-векторы точек множества

$$\Lambda \cap (\Pi(\mathscr{E}) \setminus \{O\})$$

называются определяющими векторами центрировки, а их координатные строки относительно репера $\mathscr{E}$ — определяющими строками. Натуральное число p, равное отношению объема основного параллелепипеда решетки $\Gamma(\mathscr{E})$ к объему основного параллелепипеда ее центрировки Λ называется индексом центрировки. Количество определяющих векторов центрировки индекса p равно $p-1$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ — определяющие векторы центрировки решетки $\Gamma(\mathscr{E})$. Согласно определению, их координатные строки, то есть определяющие строки центрировки, состоят из правильных положительных дробей и, возможно, нулей. Наименьший общий знаменатель m координат в определяющих строках называется знаменателем центрировки. Легко видеть, что $m \leqslant p$.

Пусть вектор $\alpha \in \Lambda$. Через $\langle \alpha \rangle$ обозначим «дробную часть» вектора α — такую сумму векторов $\alpha + \mathbf{g}$, $\mathbf{g} \in \Gamma(\mathscr{E})$, что $\langle \alpha \rangle = \alpha + \mathbf{g} \in \Pi(\mathscr{E})$. Минимальной базой центрировки Λ решетки $\Gamma(\mathscr{E})$ называется такое подмножество $\beta_1, \ldots, \beta_q$ $(q \leqslant p-1)$ определяющих векторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}$ центрировки, что не входящие в это подмножество определяющие векторы являются дробными частями их линейных комбинаций с целыми коэффициентами, а ни один из векторов $\beta_1, \ldots, \beta_q$ таковым относительно остальных векторов этого подмножества не является. Отметим, что выбор минимальной базы центрировки, вообще говоря, неоднозначен.

2. В дальнейшем нам потребуются центрировки только таких решеток, у которых имеется выравненный репер. Поэтому всюду ниже, говоря о центрируемых решетках, если специально не оговаривается противное, мы будем иметь ввиду только решетки с таким свойством и задавать их именно выравненными реперами. В частности, понятия допустимой центрировки и эквивалентности реперов мы будем рассматривать только на множестве выравненных реперов. ПКФ, соответствующая выравненному реперу, называется выравненной формой. Поскольку мы рассматриваем решетки и реперы с точностью до подобия, то будем считать, не нарушая общности рассуждений, что длина М-векторов решеток равна 1. Таким образом, при задании центрируемой решетки посредством ПКФ последняя будет иметь вид:

$$f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} a_{ij} x^i x^j. \tag{2.1}$$

Поскольку $f(\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j) = 2 \pm 2a_{ij} \geqslant 1$, то коэффициенты всякой ПКФ вида (2.1) удовлетворяют неравенствам:

$$|a_{ij}| \leqslant \frac{1}{2}. \tag{2.2}$$

Центрировки $(\Lambda_1 \supset \Gamma_1)$, $(\Lambda_2 \supset \Gamma_2)$, то есть центрировки Λ_1, Λ_2 соответственно решеток Γ_1, Γ_2, называются эквивалентными, если в решетках Γ_1 и Γ_2 можно так выбрать выравненные реперы, что определяющие строки обеих центрировок совпадут.

Центрировку Λ решетки $\Gamma(f)$, заданной ПКФ f (центрировку $(\Lambda \supset \Gamma(f))$) будем называть центрировкой ПКФ f, а также центрировкой соответствующего ПКФ репера. Множество центрировок всех выравненных форм с данной минимальной базой $\beta_1, \ldots, \beta_q$ назовем типом центрировок $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$, или просто центрировкой $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$. Очевидно, любые две центрировки $(\Lambda_1 \supset \Gamma(f_1))$, $(\Lambda_2 \supset \Gamma(f_2))$ одного и того же типа эквивалентны, причем в каждой центрировке $(\Lambda \supset \Gamma(f))$ их класса эквивалентности найдется выравненный репер, центрированный по данному типу.

Построенный на M-векторах n-мерной решетки k-мерный параллелепипед $(2 \leqslant k \leqslant n)$ называется параллелепипедом минимумов решетки. Если параллелепипед минимумов содержит, кроме вершин, еще и другие точки решетки, то про него говорят, что он центрирован. Индексом его центрировки называется индекс центрировки построенной на нем решетки.

3. Переходим к рассмотрению допустимых центрировок. Центрировка $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ называется допустимой центрировкой в том и только в том случае, когда существует хотя бы один такой выравненный репер $\mathscr{E}$, что центрировка решетки $\Gamma(\mathscr{E})$ (ПКФ $f(\mathscr{E})$) с минимальной базой $\beta_1, \ldots, \beta_q$ является допустимой. Допустимая центрировка $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ называется свободной, если в множестве выравненных реперов найдется такой репер $\mathscr{E}$, что множество M-векторов центрировки $(\Lambda \supset \Gamma(\mathscr{E}))$ с минимальной базой $\beta_1, \ldots, \beta_q$ совпадает с множеством M-векторов решетки $\Gamma(\mathscr{E})$. В противном случае центрировка $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ называется несвободной.

Тип несвободных допустимых центрировок обладает тем свойством, что у всех его центрировок, помимо M-векторов центрируемой решетки, существует некоторое определенное множество M-векторов $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t$. Векторы $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_t$ называются обязательными M-векторами центрировок данного типа.

Решетку по отношению к себе назовем тривиальной допустимой центрировкой, однако, говоря о типах допустимых центрировок, тривиальные центрировки учитывать не будем.

В таблице 1 дан список всех типов допустимых центрировок для $n \leqslant 6$. Поскольку при $n \leqslant 3$, кроме тривиальных, никаких допустимых центрировок не имеется, то в таблице 1 приведены лишь случаи $n=4, 5, 6$.

4. Приводимые в этом пункте леммы описывают свойства допустимых центрировок.

Поскольку объектом наших исследований будут только допустимые центрировки, то иногда, говоря о них, если это будет понятно из контекста, слово «допустимые» мы будем опускать.

Таблица 1

n	№	p	m	Минимальная база	Своб. или несвоб.	Обозначение
4	1	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)	Несвоб.	$Ц_2^{(4)}$
5	1	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0)	Несвоб.	$Ц_{2,1}^{(5)}$
	2	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)	Своб.	$Ц_{2,2}^{(5)}$
6	1	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0, 0)	Несвоб.	$Ц_{2,1}^{(6)}$
	2	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0)	Своб.	$Ц_{2,2}^{(6)}$
	3	2	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)	Своб.	$Ц_{2,3}^{(6)}$
	4	3	3	(1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3, 1/3)	Несвоб.	$Ц_3^{(6)}$
	5	4	2	(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, 0, 0), (0, 0, 1/2, 1/2, 1/2, 1/2)	Несвоб.	$Ц_{2,4}^{(6)}$

Обозначим через $\alpha(k)$ n-мерный вектор с координатами $x^1=x^2=\ldots=x^k=\frac{2}{k}$, $x^{k+1}=\ldots=x^n=0$, $4\leqslant k\leqslant n$. Введем также обозначения:

$$\alpha_i(k)=\alpha(k)-e_i,\quad \sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{k} a_{ij}=a,\quad \sum_{\substack{j=1\\(j\neq i)}}^{k} a_{ij}=a_i,\quad i\in\{1,\ldots,k\}. \tag{2.3}$$

Тогда имеем:

$$2a=\sum_{i=1}^{k} a_i. \tag{2.4}$$

Лемма 1. Каждая ПКФ вида (2.1), позволяющая допустимую центрировку $\{\alpha(k)\}$, такова, что

$$a_i=\frac{2}{k}a,\quad a\geqslant\frac{k(k-4)}{8},\quad a_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,\ldots,k,\quad i<j. \tag{2.5}$$

Обязательными M-векторами центрировок типа $\{\alpha(k)\}$ являются векторы $\alpha_i(k)$, $i=1,\ldots,k$.

▷ Легко видеть, что

$$f(\alpha_i(k))=1+\frac{8}{k^2}a-\frac{4}{k}a_i.$$

Сложив k неравенств $f(\alpha_i(k))\geqslant 1$, $i=1,\ldots,k$, получаем: $\sum_{i=1}^{k} f(\alpha_i(k))=k+\frac{8}{k}a-\frac{4}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\geqslant k$. Воспользовавшись (2.4), получаем $f(\alpha_i(\kappa))=1$ при всех $i=1,\ldots,k$ и, следовательно,

$a_i = \frac{2}{k} a$.

Далее получаем: $f(\boldsymbol{\alpha}(k)) = \frac{4}{k} + \frac{8}{k^2} a \geqslant 1, \quad a \geqslant \frac{k(k-4)}{8}$;

$$f(\boldsymbol{\alpha}(k) - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) = \frac{2(k-2)}{k} + 2a_{ij} + \frac{8}{k^2} a - \frac{4}{k}(a_i + a_j) \geqslant 1,$$

$$i, j = 1, \ldots, k, \quad i < j,$$

откуда, используя $a_i = a_j = \frac{2}{k} a$, выводим $a_{ij} \geqslant \frac{8a}{k^2} - \frac{k-4}{k} \geqslant 0$. □

Лемма 2. У допустимых центрировок $(\Gamma \subset \Lambda)$ любой размерности и их центрируемых решеток Γ не существует ни 2-мерных, ни 3-мерных центрированных параллелепипедов минимумов.

▷ Следует из того, что при $n = 2, 3$ допустимых центрировок, кроме тривиальной, не существует. □

Лемма 3. Центрировка $\{\boldsymbol{\alpha}(4)\}$ допустима для тех и только тех ПКФ вида (2.1), у которых коэффициенты $a_{12} = a_{13} = a_{14} = a_{23} = a_{24} = a_{34}$ равны 0. Обязательными M-векторами такой центрировки являются 8 векторов $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0, \ldots, 0\right)$.

▷ Следует из леммы 1 и неравенства

$$f(\boldsymbol{\alpha}(4) - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j) + f(\boldsymbol{\alpha}(4) - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_k) + f(\boldsymbol{\alpha}(4) - \mathbf{e}_i - \mathbf{e}_p) = 3 - 2a \geqslant 3,$$

где i, j, k, p — перестановка (1, 2, 3, 4). □

Лемма 4. При $n = 4$ имеется единственная выравненная ПКФ, позволяющая допустимую центрировку — это форма, $\sum_{i=1}^{4} (x^i)^2$, центрируемая по типу $Ц_2^{(4)}$, то есть единственным центрированным 4-мерным параллелепипедом минимумов может быть только куб.

▷ Следует из леммы 3 при $n = 4$. □

Лемма 5. Если n-мерная решетка Γ имеет такие 4 линейно независимых M-вектора $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$, что

$$\sum_{i=1}^{4} \mathbf{m}_i = 2\mathbf{a}, \quad \mathbf{a} \in \Gamma,$$

то векторы $\pm\mathbf{a}$, $\pm(\mathbf{a} - \mathbf{m}_i)$, $\pm(\mathbf{a} - \mathbf{m}_i - \mathbf{m}_j)$, где $i, j = 1, 2, 3, 4$, $i < j$, также являются M-векторами этой решетки, а построенный на векторах $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3, \mathbf{m}_4$ параллелепипед представляет собой центрированный вектором $\mathbf{a} \in \Gamma$ куб.

▷ Непосредственно вытекает из лемм 3 и 4. □

Лемма 6. Каждая ПКФ вида (2.1), позволяющая допустимую центрировку по типу $\{\boldsymbol{\alpha}(6)\}$, такова, что (в обозначениях (2.3))

$$a_1=a_2=\ldots=a_6=\frac{a}{3}\geqslant\frac{1}{2},\quad a_{ij}\geqslant 0,\quad i,j=1,\ldots,6;\quad i<j. \quad (2.6)$$

Обязательными M-векторами центрировок $\{\boldsymbol{\alpha}(6)\}$ являются 6 векторов $\boldsymbol{\alpha}(6)-\mathbf{e}_i$, $i=1,\ldots,6$.

$\triangleright$ Следует из леммы 1 при $n=6$. □

Лемма 7. Если n-мерная решетка Γ имеет 6 линейно независимых M-векторов $\mathbf{m}_1,\ldots,\mathbf{m}_6$, удовлетворяющих условию:

$$\sum_{i=1}^{6}\mathbf{m}_i=3\mathbf{a},\quad \mathbf{a}\in\Gamma,$$

то M-векторами являются также и векторы $\mathbf{a}-\mathbf{m}_i$, $i=1,\ldots,6$, а построенный на векторах $\mathbf{m}_1,\ldots,\mathbf{m}_6$ 6-мерный параллелепипед минимумов центрирован векторами $\mathbf{a}$ и $2\mathbf{a}$.

$\triangleright$ Вытекает очевидным образом из леммы 6. □

Лемма 8. У допустимых центрировок любой размерности при $k\leqslant 5$ не имеется k-мерных параллелепипедов минимумов, центрированных с индексом $p\geqslant 3$.

$\triangleright$ Вытекает непосредственно из таблицы 1. □

§ 3. Совершенные решетки как допустимые центрировки. Теорема Коркина — Золотарева

1. В этом §, в теореме 1, сформулирована лежащая в основе метода центрировок точка зрения на совершенные решетки как допустимые центрировки. Здесь же из известной теоремы Коркина—Золотарёва о совершенных формах (теорема 2) получено очень важное для вывода совершенных форм методом центрировок следствие (теорема 3).

Пусть Γ — некоторая n-мерная решетка, $\pm\mathbf{m}_1,\ldots,\pm\mathbf{m}_s$ — ее M-векторы. Матрицу $s\times n$, строками которой являются координатные строки M-векторов относительно некоторого базиса в пространстве $E^n\supset\Gamma$, причем от каждой пары $\pm\mathbf{m}_i$ M-векторов берется только по одному представителю, называют характеристической матрицей, а ее миноры — характеристическими минорами решетки Γ и соответствующих этой решетке ПКФ.

Пусть Λ — n-мерная совершенная решетка, Γ — одна из таких ее подрешеток, среди основных реперов которых имеется выравненный репер, составленный из M-векторов решетки. Этот репер в решетке Γ обозначим через $\mathscr{E}$. Таким образом, центрировка $(\Lambda\supset\Gamma(\mathscr{E}))$ является допустимой, а ее характеристическая матрица относительно репера $\mathscr{E}$ как базиса имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ m_1^1 & m_1^2 & \dots & m_1^n \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ m_s^1 & m_s^2 & \dots & m_s^n \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Известно (см., например, доказательство теоремы 7.6 в статье [7]), что у любой совершенной решетки составленный из ее М-векторов репер $\mathscr{E}$ может быть выбран таким образом, что в характеристической матрице (3.1) миноры по абсолютной величине не будут больше 1. Следовательно, имеет место

Теорема 1. Всякую совершенную решетку Λ можно представить как допустимую центрировку ($\Lambda \supset \Gamma$) некоторого индекса $p \geqslant 1$ решетки Γ, обладающей таким выравненным репером $\mathscr{E}$, что абсолютные значения характеристических миноров решетки Λ, характеристическая матрица которой записана относительно базиса $\mathscr{E}$, не превосходят 1.

Из теоремы 1 вытекает

Лемма 9. Миноры матрицы (3.1) не превосходят по абсолютной величине 1. Элементами этой матрицы могут быть только целые числа 0, ± 1 и правильные дроби, знаменатель которых не превосходит p.

Представление совершенной решетки Λ в виде центрировки, удовлетворяющей условиям теоремы 1, назовем допустимым представлением, а индекс такой центрировки — индексом допустимого представления.

2. Первым встает вопрос о том, каково множество совершенных решеток, у которых индекс p допустимого представления равен 1, то есть у которых все параллелепипеды минимумов максимальной размерности имеют объемы, равные объему основных параллелепипедов. Ответом на этот вопрос является следующая теорема Коркина—Золотарёва.

Теорема 2 (Коркин, Золотарёв [17]). При любом $n \geqslant 2$ существует единственная совершенная решетка, у который объем всякого n-мерного параллелепипеда минимумов равен объему основного параллелепипеда. Этой решетке соответствует класс ПКФ, представленный формой

$$\varphi_0^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ (i<j)}}^{n} x^i x^j. \tag{3.2}$$

Из теоремы 2 немедленно вытекает

Теорема 3. При всяком $n \geqslant 2$ существует единственная совершенная решетка, допустимое представление которой имеет индекс $p=1$. Такой решеткой является решетка $\Gamma_0^{(n)}$, соответствующая классу ПКФ (3.2).

§ 4. Отыскание допустимых представлений совершенных решеток: общее описание метода и случаи $n \leqslant 4$. Стандартные схемы в доказательствах

1. Вывод при данном n множества всех совершенных решеток «методом центрировок» состоит из следующих шагов:

1) найти все допустимые центрировки $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ n-мерных решеток;

2) в каждом типе $\{\beta_1, \ldots, \beta_q\}$ найти выравненные реперы допустимых представлений совершенных решеток;

3) из найденного множества выравненных реперов, задающих допустимые представления n-мерных совершенных решеток, выбрать подмножество попарно неэквивалентных.

Поскольку в настоящее время допустимые центрировки известны при всех $n \leqslant 8$ (см. [5, 4]), то относительно первого шага для $n \leqslant 8$ вопрос решен.

При выполнении второго шага мы исходим из множества n-мерных выравненных реперов, заданных в виде ПКФ (2.1), и рассматриваем их как центрируемые реперы (формы) с минимальной базой $\beta_1, \ldots, \beta_q$, заданной некоторым типом $Ц$ допустимых центрировок данной размерности. Задача отыскания совершенных решеток в типе $Ц$ сводится к исследованию M-векторов центрировок этого типа и отысканию таких множеств M-векторов (характеристических матриц вида (3.1)), которые полностью определяли бы центрировки. Тем самым окажутся найденными содержащиеся в типе $Ц$ допустимые представления совершенных решеток.

При отыскании совершенных решеток мы будем располагать допустимые центрировки при данном n в некоторой последовательности таким образом, что при исследовании центрировки с номером N мы исключаем из ее типа центрировки типов с меньшими номерами. Разумное распределение типов в этой последовательности существенно облегчает вывод.

Отметим, что при $n \leqslant 6$ никаких специальных исследований для 3-го шага не потребовалось.

2. Если тип $Ц$ является типом несвободных центрировок, то в характеристической матрице (3.1) каждой его центрировки, кроме первых n строк, заданы еще строки, соответствующие обязательных M-векторам этого типа. Отыскание допустимых представлений совершенных решеток заключается в подборе M-векторов, определяющих вместе с векторами $e_1, \ldots, e_n$ и обязательными M-векторами (если центрировка несвободная) коэффициенты ПКФ вида (2.1), причем подбор этого множества производится из некоторого, задаваемого типом центрировок, конечного множества. Векторы такого множества и их координатные строки будем называть соответственно допустимыми векторами (ДП-векторами) и допустимыми строками центрировок данного типа. Согласно лемме 9 множество до-

пустимых строк содержится в следующих множествах координатных строк:

1) строки, состоящие из нулей и ± 1; допустимые векторы, координатные строки которых принадлежат этому множеству, будем называть Ц-векторами;

2) строки, полученные как линейные комбинации с целыми коэффициентами определяющих строк центрировок данного типа и целочисленных строк, и не содержащие координат, по абсолютной величине превосходящих 1. Соответствующие им ДП-векторы будем называть Д-векторами (дробными векторами), если в строке нет ± 1, и С-векторами (смешанными векторами) в противном случае.

Множество векторов центрировки, составленное из ее ДП-, Ц-, С-, Д-векторов, будем называть соответственно ДП-, Ц-, С-, Д-множеством. М-векторы центрировки, принадлежащие ДП-, Ц-, С-, Д-множеству, назовем соответственно МДП-, МЦ-, МС-, МД-векторами, а полные множества такого рода М-векторов — соответственно МДП-, МЦ-, МС-, МД-множествами.

3. Применим описанный в пункте 1 этого § способ вывода совершенных решеток для случаев $n=2, 3, 4$. Как следует из таблицы 1, при $n=2, 3$ допустимых центрировок, кроме тривиальной, не имеется. Поэтому множество всех совершенных решеток в пространствах E^2 и E^3 дается теоремой 3: это решетки $\Gamma_0^{(2)}$ и $\Gamma_0^{(3)}$, соответствующие классам эквивалентности ПКФ $\varphi_0^{(2)}$ и $\varphi_0^{(3)}$ (см. (3.2)).

При $n=4$ все нетривиальные допустимые центрировки принадлежат типу $Ц_2^{(4)}$. Согласно лемме 4 тип $Ц_2^{(4)}$ состоит из единственной центрировки, которой соответствует центрируемая форма $\sum\limits_{i=1}^{4}(x^i)^2$. Эта центрировка $\Gamma_1^{(4)}$ является совершенной решеткой. Если в решетке $\Gamma_1^{(4)}$ перейти к ее основному реперу, например, заменой вектора $\mathbf{e}_4$ центрируемого репера, соответствующего ПКФ $\sum\limits_{i=1}^{4}(x^i)^2$, на вектор $\mathbf{e}_4^*=(1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$, то придем к ПКФ, эквивалентной известной форме $\varphi_1^{(4)}=\varphi_0^{(4)}-x^1x^2$.

Вывод из сказанного в этом пункте формулируем в виде теоремы:

Теорема 4. При $n=2, 3, 4$, кроме совершенных решеток $\Gamma_0^{(n)}$, все параллелепипеды минимумов которых основные, только при $n=4$ имеется, причем единственная, совершенная решетка $\Gamma_1^{(4)}$, у которой, кроме основных, имеются центрированные параллелепипеды минимумов — центрированные с индексом 2 кубы.

4. В дальнейшем при доказательствах нами часто будут ис-

пользоваться рассуждения, проводимые по одинаковым схемам, которые мы и описываем в этом пункте.

Схема № 1. Пусть $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$ ($\mathbf{a}_t=(x_t^1, \ldots, x_t^n)$, $t\in\{1, \ldots, r\}$) и $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_h$ ($\mathbf{m}_u=(m_u^1, \ldots, m_u^n)$, $u\in\{1, \ldots, h\}$) — две совокупности векторов; первая составлена из ДП-векторов, вторая — из М-векторов центрировок некоторого типа $Ц$. Общая совокупность $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_h$ является множеством линейно независимых векторов. Пусть в результате сложения получен такой вектор $\mathbf{s}=\sum_{t=1}^{r}\mathbf{a}_t+\sum_{u=1}^{h}\mathbf{m}_u$, что $\mathbf{s}=p\alpha$, $\alpha\in\Lambda$, где Λ — произвольная центрировка типа $Ц$, а p — натуральное число. Согласно некоторому утверждению (А) (чаще всего это будет одна из лемм 2—9) центрировки типа $Ц$ не могут иметь параллелепипеда минимумов, построенного на векторах $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_h$ и центрируемого вектором α с индексом p. Поэтому делаем вывод: МДП-множество центрировок типа $Ц$ не содержит подмножества $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$. (Это подмножество мы иногда будем называть «испытываемым множеством», а его векторы — «испытываемыми векторами»).

Для приводимого выше рассуждения мы будем использовать следующую стандартную запись:

«Рассмотрим сумму

$$M\left|\begin{array}{l}(x_1^1, \ldots, x_1^n)\\ \cdots\cdots\cdots\\ (x_r^1, \ldots, x_r^n)\\ (m_1^1, \ldots, m_1^n)\\ \cdots\cdots\cdots\\ \underline{(m_h^1, \ldots, m_h^n)}\\ p(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)=p\alpha.\end{array}\right. \tag{4.1}$$

Так как согласно (А) вектор α не может принадлежать центрировкам типа $Ц$, то испытываемое множество не может состоять только из М-векторов.»

Иногда вместо развернутой суммы (4.1) будем писать более короткий ее вид:

$$M[\mathbf{a}_1+\ldots+\mathbf{a}_r]+\mathbf{m}_1+\ldots+\mathbf{m}_h=p\alpha. \tag{4.1a}$$

Если приведенное выше рассуждение относится не только к множеству $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r$, $\mathbf{m}_1, \ldots, \mathbf{m}_h$, но и к множествам, полученным из него произвольной перестановкой между собой некоторых координат векторов, то в сумме (4.1) над соответствующими координатами будет ставиться общая черта. Например, запись

$$M\,|\,(\overline{x^1, \ldots, x^k}, \overline{x^{k+1}, \ldots, x^n}) \tag{4.2}$$

означает, что рассуждение применимо к множествам, получающимся при любой перестановке между собой координат $x^1, \ldots, x^k$ и координат $x^{k+1}, \ldots, x^n$.

Схема № 2. Все как в схеме № 1, однако вместо утверждения (А) имеет место утверждение (Б): существование параллелепипеда минимумов, построенного на векторах $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$, $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_h$ и центрируемого вектором α с индексом p влечет за собой то, что некоторые определенные векторы $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_s$ центрировок типа $Ц$ обязательно являются М-векторами. В этом случае из записи (4.1) делаем вывод: «Согласно (Б) испытываемое множество состоит из М-векторов в том и только том случае, когда М-векторами являются и векторы $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_s$».

Схема № 3. Такая же, как и схема № 2, только исходное множество не содержит испытываемых векторов $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_r$, а состоит лишь из М-векторов $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_h$. Вывод «Согласно (Б) векторы $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_s$ являются М-векторами всякой центрировки типа $Ц$».

§ 5. Вывод совершенных решеток при $n=5$

1. Как следует из таблицы 1, при $n=5$ все допустимые центрировки, исключая тривиальные, относятся к двум типам: типу $Ц_{2,1}^{(5)}$ и типу $Ц_{2,2}^{(5)}$. Мы найдем сначала все совершенные решетки в типе $Ц_{2,1}^{(5)}$, а затем будем отыскивать их в том подмножестве типа $Ц_{2,2}^{(5)}$, центрировки которого не принадлежат типу $Ц_{2,1}^{(5)}$.

2. Согласно лемме 3 образующие тип $Ц_{2,1}^{(5)}$ центрировки таковы, что у их центрируемых форм вида (2.1) коэффициенты $a_{12}=a_{13}=\ldots=a_{34}=0$ и, следовательно, эти формы имеют вид

$$\sum_{i=1}^{5}(x^i)^2+2\sum_{j=1}^{4}a_{j5}x^jx^5. \tag{5.1}$$

По той же лемме 3 центрировки этого типа имеют 8 обязательных М-векторов $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0\right)$. Поскольку в ПКФ вида (5.1) остались не заданными 4 коэффициента, то совершенные центрировки типа $Ц_{2,1}^{(5)}$ должны иметь, помимо векторов выравненного репера и обязательных М-векторов, еще не менее 4 М-векторов. Допустимыми векторами центрировок этого типа являются 16 С-векторов $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 1\right)$ и Ц-векторы, у которых $|x^5|=1$. Среди них и будем искать М-векторы совершенных решеток.

В этом пункте набор i, j, k, p будем считать некоторой перестановкой чисел 1, 2, 3, 4 и, как обычно, любую из букв этого набора — одним из названных чисел. Кроме того, всюду ниже будем считать, что буква ε^t независимо от индекса t принимает любое из значений ±1, и только эти значения.

Лемма 5.1. Множество МЦ-векторов центрировок типа $Ц_{2,1}^{(5)}$ имеет один из следующих трех видов:

$$(1)\ \varepsilon^i\mathbf{e}_i+\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5,\quad \varepsilon^i\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_5,\quad \varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5;$$
$$(2)\ \varepsilon^i\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_5;$$
$$(3)\ \varnothing.$$

$\triangleright$Применим рассуждения по схеме №1. Возьмем следующие суммы из линейно независимых векторов:

$$M\left|\begin{array}{l}(\pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ \ 1)\\ (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ -1)\\ \hline 2\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ 0\right)\end{array}\right., \qquad M\left|\begin{array}{l}\overline{(\pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ 0,\ \ 1)}\\ (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ 1,\ \ 0)\\ (\ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ 0,\ -1)\\ \hline 2\left(\pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\end{array}\right..$$

Поскольку полученые при сложении векторы центрируют с индексом 2 двумерный и трехмерный параллелепипеды минимумов, что по лемме 2 невозможно, то ни одни из Ц-векторов, координатные строки которых не содержат 0 или содержат только один 0, не является M-вектором.

Теперь применим схему № 2. Возьмем сумму вида (4.1)

$$M\left|\begin{array}{l}\overline{(\varepsilon^1,\ \ \varepsilon^2,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)}\\ \left(\frac{\varepsilon^1}{2},\ -\frac{\varepsilon^2}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\\ \left(\frac{\varepsilon^1}{2},\ -\frac{\varepsilon^2}{2},\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ 0\right)\\ (0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\\ \hline 2(\varepsilon^1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1)\end{array}\right..$$

По лемме 5 вместе с M-вектором $(\varepsilon^1, \varepsilon^2, 0, 0, 1)$ является M-вектором и вектор $(\varepsilon^1, 0, 0, 0, 1)$, откуда следует, что M-вектор $\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5$ встречается только совместно с M-векторами $\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_5$, $\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5$.

Покажем, что если названные выше три Ц-вектора являются МЦ-векторами, то никаких других МЦ-векторов уже не имеется. Рассмотрим следующие суммы вида (4.1):

$$M\left|\begin{array}{l}\overline{(\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ 0,\ 0,\ \ 1)}\\ (0,\ 0,\ \varepsilon^3,\ 0,\ -1)\\ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ 0)\\ \hline 2\left(\frac{\varepsilon^1}{2},\ \frac{\varepsilon^2}{2},\ \frac{\varepsilon^3}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)\end{array}\right., \qquad M\left|\begin{array}{l}\overline{(\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ 0,\ 0,\ \ 1)}\\ (0,\ 0,\ \varepsilon^3,\ \varepsilon^4,\ -1)\\ \hline 2\left(\frac{\varepsilon^1}{2},\ \frac{\varepsilon^2}{2},\ \frac{\varepsilon^3}{2},\ \frac{\varepsilon^4}{2},\ 0\right)\end{array}\right.,$$

$$M\left|\begin{array}{l}\overline{(\varepsilon^1,\ \varepsilon^2,\ 0,\ 0,\ \ 1)}\\ (0,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ 0,\ \pm 1)\\ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ \ 0)\\ (0,\ \varepsilon^2,\ 0,\ 0,\ \ 0)\\ \hline 2\left(\frac{\varepsilon^1}{2},\ \frac{3}{2}\varepsilon^2,\ \frac{\varepsilon^3}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1\pm 1}{2}\right)\end{array}\right..$$

В первых двух суммах получаем противоречие с леммой 2, в третьей, из-за получившегося M-вектора с координатой

$\frac{3}{2}\varepsilon^2$ — с леммой 9. Таким образом, Ц-векторы $\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5$, $\varepsilon^k\mathbf{e}_k+\varepsilon^p\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_5$, так же как и Ц-векторы $\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_5$, $\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\varepsilon^k\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_5$ не могут оба быть М-векторами. Дальнейшее очевидно. □

Так как всякое множество МЦ-векторов содержит не более 3 векторов, а у совершенных центрировок должно быть не менее 4 МДП-векторов, то всякая совершенная центрировка должна иметь хотя бы один МС-вектор. Без ограничения общности примем за таковой вектор $\alpha_0=(1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1/2,\ 1)$.

Лемма 5.2. Если в центрировке от исходного выравненного репера $\mathscr{E}=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5\}$ перейти к выравненному реперу $\mathscr{E}^*=\{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_5^*\}$, $\mathbf{e}_i^*=\mathbf{e}_i$, $i=1, \ldots, 4$, $\mathbf{e}_5^*=\alpha_0$, то получим центрировку (новой решетки) того же типа, у которой МС-множество без вектора α_0 станет в новых координатах МЦ-множеством, и наоборот.

▷ Тип сохранится из-за того, что объем основного параллелепипеда новой решетки тот же, что и исходной, и осталась та же центрированная грань. Дальнейшее следует из соотношений между новыми $^*x^1, \ldots, {}^*x^5$ и старыми $x^1, \ldots, x^5$ координатами: $^*x^i=x^i-\frac{1}{2}x^5$, $i=1, \ldots, 4$, $^*x^5=x^5$. □

Из лемм 5.2 и 5.1 получаем, что МС-множество центрировок типа $Ц_{2,1}^{(5)}$ может быть только одного из следующих трех видов:

$$\begin{gathered}(1)\ \alpha_0,\ \alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j,\ \alpha_0-\mathbf{e}_i,\ \alpha_0-\mathbf{e}_j;\\ (2)\ \alpha_0,\ \alpha_0-\mathbf{e}_i;\quad (3)\ \alpha_0.\end{gathered}\tag{5.2}$$

Предложение 1. Тип центрировок $Ц_{2,4}^{(5)}$ содержит одну совершенную решетку, а именно решетку $\Gamma_1^{(5)}$, которой соответствует центрируемая форма

$$\sum_{i=1}^{5}(x^i)^2+x^1x^5+x^2x^5.\tag{5.3}$$

Решетке $\Gamma_1^{(5)}$ соответствует класс эквивалентности ПКФ

$$\varphi_1^{(5)}=\varphi_0^{(5)}-x^1x^2.$$

▷ Названные в лемме 5.1 МЦ-множества при подстановке в форму (5.1) дают соответственно следующие значения для коэффициентов:

$$(1)\ a_{i5}=-\frac{1}{2}\varepsilon^i,\quad a_{j5}=-\frac{1}{2}\varepsilon^j;\ (2)\quad a_{i5}=-\frac{1}{2}\varepsilon^i;\ (3)—.$$

Подстановка в форму (5.1) вектора α_0 дает: $a_{15}+a_{25}+a_{35}+a_{45}=1$. Из сказанного выводим, что случай МЦ-множества (1) леммы 5.1 с учетом (2.2) и соотношения $\sum_{i=1}^{4}a_{i5}=1$ имеет место только при $\varepsilon^i=\varepsilon^j=-1$, $\varepsilon^k=\varepsilon^p=0$. Приняв для определенности $i=1$, $j=2$, $k=3$, $p=4$, получаем из леммы 5.2, что МС-множество в этом случае состоит из четырех векторов $\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \pm 1, \pm 1, 2)$. Тем самым получаем центрируемую форму (5.3). Эквивалентность ее центровки совершенной форме $\varphi_1^{(5)}$ устанавливается либо прямым подсчетом, либо следует из совпадения детерминантов этих форм.

Случаи (2) и (3) МЦ-множеств леммы 5.1 ни при каких МС-множествах списка (5.2) не позволяют однозначно вычислить коэффициенты $a_{15}, \ldots, a_{45}$ и, следовательно, совершенных центровок не дают. □

Отметим, что совершенная решетка $\Gamma_1^{(5)}$ имеет допустимое представление не только по типу $Ц_{2,1}^{(5)}$, но также и по типу $Ц_{2,2}^{(5)}$. Чтобы убедиться в этом, достаточно от репера $\mathscr{E}=\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5\}$, соответствующего центрируемой форме (5.3), перейти к выравненному реперу, построенному на векторах $\mathbf{e}_5-\mathbf{e}_1$, $-\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, $\mathbf{e}_4$, $\mathbf{e}_5$. Относительно последнего решетка $\Gamma_1^{(5)}$ представляет собой центровку, заданную определяющей строкой $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

3. Рассмотрим центровки типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$—того подмножества типа $Ц_{2,2}^{(5)}$, центровки которого не принадлежат типу $Ц_{2,1}^{(5)}$, то есть не содержат 4-мерных центрированных параллелепипедов минимумов.

Множество всех ДП-векторов центровок типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ состоит из 16 Д-векторов $\left(\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\right)$ и Ц-векторов. Поскольку центровки свободные, то обязательных М-векторов у них нет и совершенные центровки типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ должны иметь не менее 10 МДП-векторов.

Лемма 5.3. *Центровки типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ не имеют МЦ-векторов.*

▷ Составим суммы вида (4.1):

$$M\left|\begin{array}{l}(\pm 1, \ \pm 1, \ \pm 1, \ \pm 1, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ \ \ 0, \ \ \ 0, \ 1) \\ \hline 2\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{array}\right., \qquad M\left|\begin{array}{l}(\pm 1, \ \pm 1, \ \pm 1, \ 0, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ \ \ 0, \ 1, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ \ \ 0, \ 0, \ 1) \\ \hline 2\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{array}\right.,$$

$$M\left|\begin{array}{l}(\pm 1, \ \pm 1, \ 0, \ 0, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ 1, \ 0, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ 0, \ 1, \ 0) \\ (\ \ 0, \ \ \ 0, \ 0, \ 0, \ 1) \\ \hline 2\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\end{array}\right..$$

В первых двух случаях получили противоречие с леммой 2; а в последнем—условию, что центрировки типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ не должны иметь 4-мерных центрированных параллелепипедов минимумов. □

Из леммы 5.3 получаем, что среди 16 Д-векторов центрировок типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ совершенная центрировка должна иметь не менее 10 М-векторов. Ниже считаем, не нарушая общности, что М-вектором является Д-вектор $\alpha_0=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Для удобства изложения рассматриваемые далее множества из Д-векторов будем изображать символами-рисунками, в основу которых положим вершины правильного 5-угольника, занумерованные числами $1,\dots,5$. Буквы i, j, k, p, q как при нумерации вершин символов, так и при дальнейших рассуждениях предполагаем перестановкой из чисел $1,\dots,5$.

Если Д-множество содержит вектор $\alpha_0-\mathbf{e}_i=\alpha_i$, то на изображающем его символе вершина i обводится кружком, если содержит вектор $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j=\alpha_{ij}$—то вершины i и j символа соединяются отрезком (ребром ij). Для обозначения Д-множеств и их символов используем одни и те же буквы.

Лемма 5.4. МД-множество центрировок типа $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ не содержит подмножеств A_1, A_2, A_3, символы которых приведены на рис. 1.

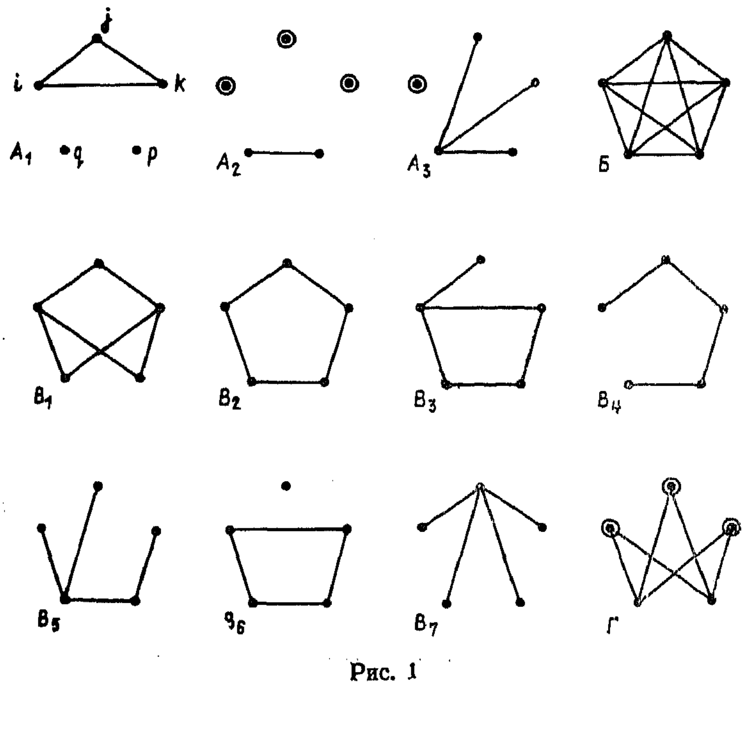


Рис. 1

$\triangleright$ Возьмем суммы вида (4.1а):

$$M[\alpha_{ij}+\alpha_{ik}+\alpha_{jk}]+\alpha_0=2(\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q),\quad M[\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k-\alpha_{pq}]=$$
$$=2(\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q),\quad M[-\alpha_i+\alpha_{jq}+\alpha_{kq}+\alpha_{pq}]=2(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_q).$$

Во всех трех суммах получили противоречие с отсутствием 4-мерных центрированных параллелепипедов минимумов. $\square$

Символом множества из 10 Д-векторов $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ $(i, j=1,\ldots,5;\ i<j)$ является полный 5-вершинный граф (символ Б на рис. 1). Чтобы найти все те состоящие из векторов α_{ij} множества, которые не содержат подмножеств вида A_1, нужно найти все подграфы этого графа, не содержащие образованных ребрами треугольников. Кроме того, потребуем, чтобы у искомых подграфов число ребер было не менее 4, поскольку меньшее количество векторов вида α_{ij} вместе с Д-векторами α_0 и α_i, $i=1,\ldots,5$, не даст нужных для совершенной центрировки 10 МД-векторов. Получаем, что требуемые нам подграфы — это символы B_1-B_7 на рис. 1.

Дополняя множества B_1-B_7 как множества МД-векторов возможно большим числом МД-векторов вида α_i при условии, что не получим в них подмножеств вида A_2 и A_3, запрещенных леммой 5.4, находим, что нужное для совершенной центрировки количество 9 МД-векторов (МД-вектор α_0 — десятый) возможно только в случае множества Г (см. символ Г на рис. 1).

Обратившись к форме вида (2.1), находим, что МД-векторы множества Г вместе с МД- вектором α_0 однозначно определяют коэффициенты центрируемой формы и, следовательно, задают совершенную решетку. Эта центрируемая форма имеет вид:

$$\sum_{i=1}^{5}(x^i)^2-\frac{1}{2}(x^1+x^2+x^3)(x^4+x^5)+$$
$$+\frac{1}{2}(x^1x^2+x^1x^3+x^2x^3+x^4x^5). \tag{5.4}$$

Перейдя к другому выравненному реперу заменой в прежнем репере векторов $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$ на векторы $-\mathbf{e}_4$ и $-\mathbf{e}_5$, вместо формы (5.4) получим центрируемую форму более симметричного вида:

$$\sum_{i=1}^{5}(x^i)^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{5}x^ix^j. \tag{5.5}$$

Из сказанного в этом пункте получено

Предложение 2. Тип центрировок $[Ц_{2,2}^{(5)}]$ содержит только одну совершенную решетку — задаваемую центрируемой формой (5.5) решетку $\Gamma_2^{(5)}$. Решетке $\Gamma_2^{(5)}$ соответствует класс эквивалентности ПКФ

$$\varphi_2^{(5)}=\varphi_0^{(5)}-\frac{1}{2}(x^1x^2+x^3x^4+x^3x^5+x^4x^5).$$

4. Общим итогом § 5 является

Теорема 5. При $n=5$ имеются три совершенные решетки $\Gamma_0^{(5)}$, $\Gamma_1^{(5)}$, $\Gamma_2^{(5)}$. У решетки $\Gamma_0^{(5)}$ все параллелепипеды минимумов основные; решетка $\Gamma_1^{(5)}$ представима и как центрировка типа $Ц_{2,1}^{(5)}$, и как центрировка типа $Ц_{2,2}^{(5)}$, то есть у нее, кроме основных, имеются параллелепипеды минимумов, центрированные вектором $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, и параллелепипеды минимумов, центрированные вектором $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; решетка $\Gamma_2^{(5)}$ представима как центрировка типа $Ц_{2,2}^{(5)}$, то есть у нее, кроме основных, имеются параллелепипеды минимумов, центрированные вектором $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, и только такие.

§ 6. Вывод совершенных решеток из множества несвободных допустимых 6-мерных центрировок

1. Отыскивая в типах допустимых 6-мерных центрировок совершенные решетки, мы рассмотрим сначала типы несвободных центрировок, которых согласно таблице 1 имеется три: $Ц_{2,1}^{(6)}$, $Ц_3^{(6)}$, $Ц_{2,4}^{(6)}$.

2. Предложение 3. Тип $Ц_{2,4}^{(6)}$ состоит только из одной центрировки, центрируемой формой для которой является ПКФ $\sum_{i=1}^{6}(x^i)^2$. Эта центрировка $\Gamma_1^{(6)}$ — совершенная решетка с 30 М-векторами; ей соответствует класс эквивалентности ПКФ $\varphi_1^{(6)}=\varphi_0^{(6)}-x^1x^2$.

▷ Из леммы 3 вытекает, что определяющие векторы $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 0, 0)$, $\frac{1}{2}(0, 0, 1, 1, 1, 1)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 0, 0, 1, 1)$ центрировок типа $Ц_{2,4}^{(6)}$ задают все коэффициенты центрируемых форм (2.1): $a_{12}=a_{13}=\ldots a_{56}=0$. Тем самым оказывается, что центрируемой ПКФ является только форма $\sum_{i=1}^{6}(x^i)^2$. Доказательство остального очевидно. □

3. Рассмотрим тип $Ц_3^{(6)}$. Определяющими векторами центрировок этого типа являются векторы $\alpha_0=\frac{1}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ и $2\alpha_0$. По лемме 6 у центрировок этого типа имеются 6 обязательных М-векторов $\alpha_0-\mathbf{e}_i$, $i=1, \ldots, 6$, а у центрируемых форм вида (2.1) коэффициенты удовлетворяют условиям (2.6). Входящие в тип $Ц_3^{(6)}$ совершенные формы, помимо 12 М-векторов $\mathbf{e}_i$,

$\alpha_0-\mathbf{e}_i$, $i=1,\ldots,6$, должны иметь еще не менее 9 M-векторов. Допустимые векторы типа $\mathcal{U}_3^{(6)}$ — это Д-векторы α_0, $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$, $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k$, $i, j, k=1,\ldots,6$; $i<j<k$, и Ц-векторы.

Всюду ниже при исследовании типа $\mathcal{U}_3^{(6)}$ набор букв i, j, k, p, q, r считаем некоторой перестановкой чисел $1,\ldots,6$.

Лемма 6.1. МЦ-множество у центрировок типа $\mathcal{U}_3^{(6)}$ является одним из следующих 4:

$$\begin{array}{ll} (1)\ \mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j,\ \ \mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p,\ \mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r; & (2)\ \mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j,\ \mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p; \\ (3)\ \mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j; & (4)\ \varnothing. \end{array} \tag{6.1}$$

$\triangleright$ Так как все $a_{ij}\geqslant 0$ (см. (2.6)), то координатная строка МЦ-вектора не может содержать единицы только одного знака. Очевидно, лемма будет доказана, если установим, что, во-первых, ни один из Ц-векторов $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k+\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_q$, $\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k$ не является M-вектором и, во-вторых, два Ц-вектора $\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ и $\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k$ не могут быть одновременно M-векторами. Доказательство сказанного выше проводится по схеме № 1 из § 4. Способ составления сумм вида (4.1а) для доказательства всех случаев нетрудно усмотреть из приводимых здесь следующих:

$$M[(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k-\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r)]+(-\mathbf{e}_p)+(-\mathbf{e}_q)+(-\mathbf{e}_r)=$$
$$=3(\alpha_0-\mathbf{e}_p-\mathbf{e}_q-\mathbf{e}_r),$$
$$M[(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k)]+(-\mathbf{e}_k)+\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r=3(\alpha_0-\mathbf{e}_k),$$
$$M[(\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j)+(-\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_k)]+\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r=3(\alpha_0-\mathbf{e}_j).$$

Поскольку в каждой из сумм слагаемых меньше 6, то есть построенные на их векторах параллелепипеды имеют размерности $k<6$, то согласно лемме 8 ни один из этих параллелепипедов не является параллелепипедом минимумов. □

По аналогии с тем, как это было сделано в § 5, для описания ДП-множеств будем пользоваться символами. В основу каждого символа положим вершины правильного 6-угольника, обозначенные буквами i, j, k, p, q, r (что соответствует перестановке чисел $1,\ldots,6$). На символе Д-вектор $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ будем обозначать отрезком, соединяющим вершины i и j, Д-вектор $\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k$ — заштрихованным треугольником, гомотетичным треугольнику с вершинами i, j, k, Ц-вектор $\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$ — волнистой линией, соединяющей вершины i и j. Если изображаемое символом множество содержит и вектор α_0, то внизу у символа ставится буква α_0. Изображаемые символами множества обозначаются теми же буквами, что и символы.

Через Γ' обозначим множество, состоящее из следующих восьми ДП-векторов $\alpha_0-e_l-e_q-e_k$, $\alpha_0-e_l-e_k-e_r$, $\alpha_0-e_l-e_p-e_q$, $\alpha_0-e_l-e_p-e_r$, $\alpha_0-e_j-e_k-e_q$, $\alpha_0-e_j-e_k-e_r$, $\alpha_0-e_j-e_p-e_q$, $\alpha_0-e_j-e_p-e_r$. Через Γ_1 обозначим множество $\Gamma'\cup\Gamma''$, где множество Γ'' задано соответствующим символом на рис. 2.

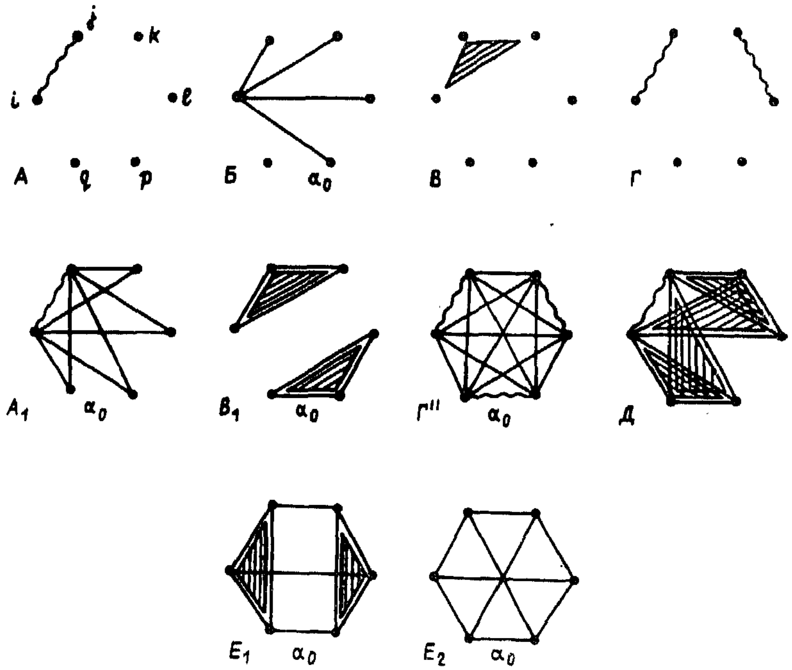


Рис. 2

Лемма 6.2. У центрировок типа $Ц_3^{(6)}$ МДП-множества А, Б, В, Г (см. рис. 2) влекут за собой соответственно МДП-множества $А_1$, $А_1$, $В_1$, $Г_1$.

▷ При доказательстве будем пользоваться схемами № 2 и № 3 из § 4. Каждому из множеств А, Б, В, Г поставим в соответствие сумму вида (4.1а), содержащую это множество:

$$M[(e_i-e_j)]+e_k+e_p+e_q+e_r+(-e_j)=3(\alpha_0-e_j),$$

$$M[\alpha_0+(\alpha_0-e_l-e_k)+(\alpha_0-e_l-e_p)+(\alpha_0-e_l-e_q)+$$
$$+(\alpha_0-e_l-e_r)]+(\alpha_0-e_j)=3(\alpha_0-e_l),$$

$$M[(\alpha_0-e_l-e_j-e_k)]+(-e_p)+(-e_q)+(-e_r)=2(-\alpha_0),$$

$$M[(e_l-e_j)+(e_k-e_p)]+e_q+e_r+(-e_j)+(-e_p)=3(\alpha_0-e_j-e_p).$$

Замечаем, что в первых трех суммах при сложении получены заведомые М-векторы. Тогда по лемме 7 из первой суммы получаем утверждение нашей леммы относительно множеств А и $А_1$, из второй — относительно множеств Б и $А_1$. Утверждение для множеств В и $В_1$ получаем по лемме 5, применив ее сначала к третьей сумме (схема № 3) и выписав все даваемые ею M-векторы, а затем к сумме, аналогичной третьей, но построенной относительно вектора $\alpha_0-e_p-e_q-e_r$ уже как M-вектора.

Из 4-й суммы по лемме 7 получаем, что векторы $\alpha_0-e_j-e_p-e_q$, $\alpha_0-e_j-e_p-e_r$ являются M-векторами. Далее пользуемся уже доказанными утверждениями данной леммы и выводим ее утверждение относительно множеств Г и $Г_1$. □

Лемма 6.3. Вариант МЦ-множества (2) из списка (6.1) не может иметь места. Среди центрировок, у которых МЦ-множество имеет вид (3) из списка (6.1), совершенных решеток нет.

▷Согласно лемме 6.2 МЦ-векторы варианта (2) влекут за собой и МЦ-вектор e_q-e_r, то есть имеет место вариант (1), а не (2).

Переходим к доказательству второго предложения леммы. Как следствие наличия у центрировок МЦ-вектора e_i-e_j из леммы 6.2 получаем, что такие центрировки среди своих M-векторов обязательно содержат множество $А_1$. Дополняя множество $А_1$ по возможности бóльшим количеством МД-векторов при условии, что такое дополнение не вызывает предусмотренных леммой 6.2 новых МЦ-векторов, мы придем к МДП-множеству вида Д (рис. 2). По векторам этого множества, с учетом соотношений (2.6), находим коэффициенты центрируемых форм:

$$a_{ij}=\frac{1}{2},\quad a_{ik}=a_{ip}=a_{iq}=a_{ir}=a_{jk}=a_{jp}=a_{jq}=a_{jr}=0,$$

$$a_{kq}+a_{kr}=a_{kq}+a_{pq}=a_{kr}+a_{pr}=a_{pq}+a_{pr}=\frac{1}{2}.$$

Так как по имеющимся зависимостям между коэффициентами однозначно найти их невозможно, то лемма доказана. □

Предложение 4. Тип $Ц_3^{(6)}$ содержит всего 3 совершенных решетки. Ими являются решетки $Г_2^{(6)}$, $Г_5^{(6)}$, $Г_4^{(6)}$, задаваемые соответственно центрируемыми формами

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+x^1x^2+x^3x^4+x^5x^6,$$

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+\frac{1}{2}(x^1x^3+x^1x^5+x^3x^5+x^2x^4+x^2x^6+x^4x^6),$$

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{6}x^ix^j.$$

Множество M-векторов решетки $Г_2^{(6)}$ состоит из 36 векторов, ей соответствует класс эквивалентности формы $\varphi_2^{(6)}=\varphi_0^{(6)}-$

$-x^1(x^2+x^3)$. У решетки $\Gamma_5^{(6)}$ 22 М-вектора, одна из задающих ее ПКФ $\varphi_5^{(6)}=\varphi_0^{(6)}-\frac{1}{2}(x^1x^2+x^3x^4+x^3x^5+x^4x^5)$. У решетки $\Gamma_4^{(6)}$ 27 М-векторов, одна из задающих ее ПКФ $\varphi_4^{(6)}=\varphi_0^{(6)}-$ $-\frac{1}{2}\left(x^1x^2+\sum_{\substack{i,j=3\\(i<j)}}^{6}x^ix^j\right)$ (сравни [10]).

$\triangleright$ Из лемм 6.1 и 6.3 следует, что совершенные решетки нужно искать только среди тех центрировок типа $Ц_3^{(6)}$, у которых МЦ-множество есть либо множество (1) списка (6.1), либо (4). Рассмотрим случай множества (1). По лемме 6.2 МДП-множество в этом случае есть множество Γ_1 из 24 векторов, которые, с учетом (2.6), однозначно задают центрируемую форму (1). Сравнив полученную центрировку с известной совершенной формой $\varphi_2^{(6)}$ (см., например, [7]), получаем утверждение относительно решетки $\Gamma_2^{(6)}$.

Переходим к центрировкам случая (4), то есть к тем, у которых *МЦ*-множество пусто. Исследование разделим на два случая: 1) вектор α_0 является МД-вектором, 2) вектор α_0 таковым не является.

Случай 1). Из леммы 6.2 получаем, что максимальное, то есть более не дополняемое, МД-множество имеет либо вид E_1, либо вид E_2, рис. 2. Вычисляя коэффициенты по М-векторам, убеждаемся, что по множеству E_1 они не могут быть определены однозначно. Множество E_2 приводит к совершенной центрировке $\Gamma_5^{(6)}$.

Случай 2). Из леммы 6.2 получаем, что МД-векторами центрировок в этом случае могут быть только Д-векторы вида $\alpha_0-e_i-e_j$. Так как $f(\alpha_0)=\frac{2}{3}+\frac{2}{9}a>1$, то $a=\frac{3}{2}+\varepsilon$ и $a_1=\ldots$ $\ldots=a_6=\frac{a}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\varepsilon$, где $\varepsilon>0$. Для всякого вектора α_0- $-e_i-e_j$ имеем: $f(\alpha_0-e_i-e_j)=1+2a_{ij}-\frac{2}{3}\varepsilon\geqslant 1$, откуда получаем, что $a_{ij}\geqslant\frac{1}{9}\varepsilon$. Так как $\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{6}a_{ij}=a=\frac{3}{2}+\varepsilon$, то $\frac{3}{2}+\varepsilon\geqslant$ $\geqslant\frac{15}{9}\varepsilon$ и $\varepsilon\leqslant\frac{9}{4}$. Приняв $\varepsilon=\frac{9}{4}$, приходим к центрируемой форме (3) и совершенной форме $\varphi_4^{(6)}$. Случай $\varepsilon<\frac{9}{4}$ не приводит к совершенной центрировке. $\square$

4. Рассмотрим тип $Ц_{2,1}^{(6)}$. У центрировок этого типа известны 14 М-векторов: 6 векторов выравненного репера и 8 обязательных М-векторов $\frac{1}{2}(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 0, 0)$. Как следует из лем-

мы 3, обязательные векторы определяют 6 коэффициентов $a_{12}=\ldots=a_{34}=0$ центрируемых форм. Таким образом, неизвестными остались 9 коэффициентов ПКФ вида

$$\sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+2\sum_{q=5}^{6}\left(\sum_{j=1}^{4}a_{jq}x^j\right)x^q+2a_{56}x^5x^6. \tag{6.2}$$

Допустимые векторы центрировок этого класса — это С-векторы $\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, x^5, x^6\right)$ и Ц-векторы, причем как у тех, так и у других сумма $|x^5|+|x^6|$ равна 1 или 2.

При исследовании центрировок типа $Ц_{2,1}^{(6)}$ условимся в следующем. Строку i, j, k, p считаем некоторой перестановкой чисел $1, \ldots, 4$, буквы q и r предполагаем принимающими значения 5 и 6, совокупность q, r считаем перестановкой чисел 5, 6. Через T_q обозначим множество всех допустимых векторов, у которых $x^q=1$, $x^r=0$, а через T — множество всех ДП-векторов, у которых $x^5=x^6=1$. Через MT_q и MT обозначим состоящие из М-векторов подмножества соответственно множеств T_q и T.

Лемма 6.4. Чтобы ПКФ вида (6.2) была центрируемой по типу $Ц_{2,1}^{(6)}$, необходимо, чтобы выполнялись два неравенства

$$\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|\leqslant 1, \quad q=5, 6. \tag{6.3}$$

$\triangleright$ Из неравенств

$$f\left(\frac{1}{2}(\pm e_1\pm e_2\pm e_3\pm e_4)+e_q\right)=2\pm a_{1q}\pm a_{2q}\pm a_{3q}\pm a_{4q}\geqslant 1 \tag{6.4}$$

получаем: $\min(\pm a_{1q}\pm a_{2q}\pm a_{3q}\pm a_{4q})=-\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|\geqslant -1$. $\square$

Лемма 6.5. Подмножество МЦ-векторов множества T_q имеет один из следующих трех видов:

$$1)\ \varepsilon^i e_i+\varepsilon^j e_j+e_q,\ \varepsilon^i e_i+e_q,\ e^j e_j+e_q;\quad 2)\ \varepsilon^i e_i+e_q;\quad 3)\ \varnothing. \tag{6.5}$$

$\triangleright$ Возьмем суммы вида (4.1):

$$\frac{M\,|\,\overline{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1,}\ \overline{1, 0)}\quad (0, 0, 0, 0, -1, 0)}{2\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, 0, 0\right)},\qquad \frac{M\,|\,\overline{(\pm 1, \pm 1, \pm 1, 0,}\ \overline{1, 0)}\quad (0, 0, 0, 1, 0, 0)\quad (0, 0, 0, 0, -1, 0)}{2\left(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)}.$$

Согласно лемме 2 испытываемые в этих суммах векторы не могут быть М-векторами. Следовательно, МЦ-вектор среди первых 4 координат должен содержать не менее двух нулей.

Если М-вектором является Ц-вектор $\pm e_i\pm e_j+e_q$, то

$$f(\pm e_i\pm e_j+e_q)=3\pm 2a_{iq}\pm 2a_{jq}=1,\quad \pm a_{iq}\pm a_{jq}=-1$$

и согласно (2.2) имеем $|a_{iq}|=|a_{jq}|=\frac{1}{2}$. Из неравенств (6.3) получаем $|a_{kq}|=|a_{pq}|=0$, откуда легко следует утверждение леммы. □

Лемма 6.6. Множество MT_q имеет один из следующих видов:

$$
\begin{gathered}
(1)\ \varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j+\mathbf{e}_q,\quad \varepsilon^i \mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q,\ \varepsilon^j \mathbf{e}_j+\mathbf{e}_q,\\
\frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j \pm \mathbf{e}_k \pm \mathbf{e}_p)+\mathbf{e}_q;\\
(2)\ \varepsilon^i \mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q;\\
(3)\ \varepsilon^i \mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q,\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j+\varepsilon^k \mathbf{e}_k+\varepsilon^p \mathbf{e}_p)+\mathbf{e}_q;\\
(4)\ \varepsilon^i \mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q,\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j+\varepsilon^k \mathbf{e}_k \pm \mathbf{e}_p)+\mathbf{e}_q;\\
(5)\ \varnothing;\\
(6)\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j+\varepsilon^k \mathbf{e}_k+\varepsilon^p \mathbf{e}_p)+\mathbf{e}_q;\\
(7)\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i+\varepsilon^j \mathbf{e}_j+\varepsilon^k \mathbf{e}_k \pm \mathbf{e}_p)+\mathbf{e}_q.
\end{gathered}
\tag{6.6}
$$

▷ Считаем, что для МЦ-векторов имеет место случай 1) из (6.5). Подставив координаты этих векторов в (6.2), согласно (6.3) имеем: $a_{iq}=-\frac{1}{2}\varepsilon^i$, $a_{jq}=-\frac{1}{2}\varepsilon^j$, $a_{kq}=a_{pq}=0$. Так как вектор $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{e}_q$, где $\boldsymbol{\alpha}=\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, 0, 0)$, будет M-вектором при условии

$$
f(\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{e}_q)=2+\sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i a_{iq}=1,\quad \sum_{i=1}^{4}\varepsilon^i a_{iq}=-1, \tag{6.7}
$$

то получаем, что множество MT_q имеет вид (1) списка (6.6).

Пусть имеет место случай 2) из леммы 6.5. Тогда $a_{iq}=-\frac{1}{2}\varepsilon^i$. Опираясь на (6.4) и (6.7), получаем, что при $\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|<1$ имеет место вариант (2) списка (6.6), а при $\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|=1$ — либо вариант (3), когда среди a_{iq} нет нулей, либо (4), когда среди них один равен 0. В случае, когда среди a_{iq} два равны 0, приходим к варианту (1) из (6.6).

В случае 3) леммы 6.5, когда МЦ-векторов множество MT_q не имеет, пользуясь снова (6.4) и (6.7), получаем, что при $\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|<1$ имеет место вариант (5), а при $\sum_{i=1}^{4}|a_{iq}|=1$ — вариант (6) или (7). □

Лемма 6.7. С точностью до выбора направлений одного из векторов $\mathbf{e}_5$, $\mathbf{e}_6$ выравненных реперов центрировок типа $Ц_{2,1}^{(6)}$ множество МДП-векторов всякой такой центрировки есть множество $MT_5 \cup MT_6 \cup MT$.

$\triangleright$ Два ДП-вектора, у одного из которых $x^5 = x^6$, а у другого — $x^5 = -x^6$, одновременно M-векторами быть не могут, так как тогда характеристическая матрица (3.1) центрировки содержала бы минор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 > 1$, что противоречит лемме 9. Остальное очевидно. $\square$

Лемма 6.8. Во всякой совершенной центрировке типа $Ц_{2,1}^{(6)}$ всегда можно так выбрать выравненный репер (сохраняя тип), что множество MT будет содержать больше векторов, чем любое из множеств MT_5 и MT_6. При этом множество MT будет состоять либо из 8 векторов и иметь вид

$$\begin{gathered} \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \quad \varepsilon^i \mathbf{e}_i + \varepsilon^j \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \quad \varepsilon^i \mathbf{e}_i + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \quad \varepsilon^j \mathbf{e}_j + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i + \varepsilon^j \mathbf{e}_j \pm \mathbf{e}_k \pm \mathbf{e}_p) \pm \mathbf{e}_5 \pm \mathbf{e}_6, \end{gathered} \tag{6.8}$$

либо из 4 векторов и иметь вид

$$\begin{gathered} \varepsilon^i \mathbf{e}_i \pm \delta^j \mathbf{e}_j + \delta^k \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \quad \delta^j \mathbf{e}_j + \delta^k \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \\ \frac{1}{2}(\varepsilon^i \mathbf{e}_i + \delta^j \mathbf{e}_j + \delta^k \mathbf{e}_k \pm \mathbf{e}_p) + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6, \end{gathered} \tag{6.9}$$

где δ^j равно 0 или ε^j, а δ^k равно 0 или ε^k.

$\triangleright$ Прежде всего замечаем, что множество MT у совершенных центрировок не может быть пустым, поскольку без векторов этого множества нельзя найти по M-векторам коэффициент a_{56} формы (6.2).

Пусть при данном выборе выравненного репера $\mathscr{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6\}$ число векторов в множестве MT_q не меньше, чем в MT и не меньше, чем в MT_r. Перейдем к новому выравненному реперу $\mathscr{E}^* = \{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_6^*\}$, в котором $\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, 4$, $\mathbf{e}_r^* = -\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_q^* = \alpha_0 + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6$, где $\mathbf{e}_q^*$ — некоторый вектор из множества MT, а у вектора α_0 координаты $x^5 = x^6 = 0$. Тогда для произвольных векторов $\alpha + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 \in MT$ и $\beta + \alpha_q \in MT_q$ (у векторов α и β считаем $x^5 = x^6 = 0$) имеем:

$$\begin{gathered} \alpha + \mathbf{e}_5 + \mathbf{e}_6 = \alpha - \alpha_0 + \mathbf{e}_q^* \in M^*T_q, \\ \beta + \mathbf{e}_q = \beta - \alpha_0 + \mathbf{e}_5^* + \mathbf{e}_6^* \in M^*T, \end{gathered} \tag{6.10}$$

где M^*T_q и M^*T — соответственно множества MT_q и MT в новом репере. Так как в векторы множества M^*T превратились не только векторы множества MT, но еще и вектор $\mathbf{e}_q$, то первое предложение леммы доказано.

Предполагаем, что центрировка совершенная, а ее выравненный репер выбран так, что векторов в множестве MT больше, чем в каждом из множеств MT_5 и MT_6. Из (6.10) и леммы 6.6

выводим, что множество МТ можно превратить сначала в множество $МТ_q$, а затем обратно в МТ и тогда получить его из некоторого множества списка (6.6) путем сложения каждого из векторов этого множества с некоторым вектором $\beta_0+\mathbf{e}_r$, $\beta_0=\frac{1}{2}(\beta^1, \beta^2, \beta^3, \beta^4, 0, 0)$, $|\beta^i|=1$, $i=1, \ldots, 4$, и добавлением в это множество вектора $\beta_0+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6$. Учитывая, что множество $МТ_5 \cup МТ_6 \cup МТ$ должно содержать не менее 9 векторов, получаем, что множество МТ действительно имеет либо вид (6.8), либо вид (6.9). □

Предложение 5. Тип $Ц_{2,1}^{(6)}$ совершенных решеток не содержит.

▷ А) Множество МТ имеет вид (6.8). Примем в (6.8) для определенности $i=1$, $j=2$, $k=3$, $p=4$, $\varepsilon^j=\varepsilon^j=-1$. По векторам множества МТ, подставив их координаты в (6.2), получим:

$$a_{15}+a_{16}=a_{25}+a_{26}=\frac{1}{2}, \quad a_{35}+a_{36}=a_{45}+a_{46}=0, \quad a_{56}=\frac{1}{2}. \quad (6.11)$$

Из (6.11) следует, что для полного определения коэффициентов центрировка должна иметь еще не менее четырех М-векторов.

При нашем способе выбора множества МТ координаты векторов множеств $МТ_5$ и $МТ_6$ не могут иметь названных ниже значений: x^1, x^2 — значений 1 и $\frac{1}{2}$, x^3, x^4 — значений ± 1. Действительно, названные значения координат вместе с координатами векторов множества МТ образуют в характеристической матрице миноры 2-го порядка, по абсолютной величине большие 1, что противоречит лемме 9. По аналогичной причине вектор $-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_q$ не комбинируется с парой векторов $-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6$ и $-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6$. Как следствие сказанного, получаем, что множества $МТ_5$ и $МТ_6$ могут содержать только векторы из следующей совокупности:

$$-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_q, \quad -\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_q, \quad \frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2\pm\mathbf{e}_3\pm\mathbf{e}_4)+\mathbf{e}_q. \quad (6.12)$$

Из леммы 6.6 и списка (6.12) вытекает, что в каждом из множеств $МТ_5$ и $МТ_6$ не может быть больше, чем по 3 вектора. Поскольку нужно иметь еще не менее четырех М-векторов, то возможны 2 случая: 1) хотя бы одно из множеств состоит из 3 векторов, 2) в каждом из них по 2 вектора.

Пусть имеет место случай 1) и из 3 векторов состоит множество $МТ_5$. Согласно (6.12) и лемме 6.6 принимаем, не нарушая общности, что множество $МТ_5$ состоит из векторов $-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_5$, $\frac{1}{2}(-\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3\pm\mathbf{e}_4)+\mathbf{e}_5$. Тогда $a_{15}=\frac{1}{2}$, $a_{45}=0$, $a_{25}+a_{35}=\frac{1}{2}$ и как следствие (6.11) и (6.3): $a_{16}=a_{46}=0$, $a_{26}+$ $+a_{36}=1$. Отсюда вытекает, что множество $МТ_6$ содержит векторы, не входящие в (6.12), то есть случай 1) не имеет места.

Пусть имеет место случай 2). Тогда согласно лемме 6.6 множество MT_5, как и множество MT_6, относится либо к виду (3), либо к виду (7) списка (6.6). Пусть MT_5 имеет вид (3) и состоит согласно (6.12) из векторов $(-1, 0, 0, 0, 1, 0)$ и $\frac{1}{2}(-1, -1, -1, -1, 2, 0)$. Тогда, с учетом (6.11), имеем: $a_{15}=\frac{1}{2}$, $a_{16}=0$, $a_{25}+a_{35}+a_{45}=\frac{1}{2}$. Рассмотрев возможные случаи подбора векторов в множестве MT, среди которых один обязательно берется из совокупности $\frac{1}{2}(-1, -1, \pm 1, \pm 1, 0, 2)$ (см. (3) и (7) в (6.6)), делаем вывод, что случай, когда среди множеств MT_5 и MT_6 хотя бы одно имеет вид (3), совершенных центрировок не содержит.

Остается случай, когда множества MT_5 и MT_6 относятся к виду (7) и согласно (6.12) составляются из векторов $\frac{1}{2}(-1, -1, \pm 1, \pm 1, 0, 0)+\mathbf{e}_q$. Легко проверяется, что в этом случае коэффициенты $a_{15}, \ldots, a_{45}$ по M-векторам найти нельзя.

Б) Множество MT имеет вид (6.9). Без нарушения общности принимаем в (6.9): $i=2$, $j=3$, $k=4$, $p=1$, $\varepsilon^i=\varepsilon^j=\varepsilon^k=-1$. Векторы множества MT дают следующие соотношения между коэффициентами формы (6.2):

$$a_{15}+a_{16}=0, \quad a_{25}+a_{26}=\frac{1}{2}, \quad a_{35}+a_{36}+a_{45}+a_{46}=\frac{3}{2}+2a_{56}, \tag{6.13}$$
$$2\delta^3(a_{35}+a_{36})+2\delta^4(a_{45}+a_{46})+1+|\delta^3|+|\delta^4|+2a_{56}=0.$$

Чтобы характеристические матрицы центрировок не содержали миноров, запрещенных леммой 9, необходимо, чтобы у векторов из множеств MT_5 и MT_6 координата x^1 не принимала значений ± 1, координата x^2 — значений $\frac{1}{2}$ и 1, координаты x^3, x^4 — значения 1. Заметим еще, что вектор $-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_q$ не может быть M-вектором. Действительно, в противном случае имеем $a_{2q}=\frac{1}{2}$, откуда далее получаем $a_{2r}=0$, $|a_{1r}|+|a_{3r}|+|a_{4r}|=1$. Следовательно, векторы $\frac{1}{2}(x^1, \pm 1, x^3, x^4, 0, 0)+\mathbf{e}_r$ при некоторых x^1, x^3, x^4, $|x^1|=|x^3|=|x^4|=1$, являются M-векторами, что противоречит требованию $x^2\neq\frac{1}{2}$.

Согласно лемме 6.8 множество $MT_5 \cup MT_6$ не может состоять более чем из 6 векторов, а согласно лемме 6.7 — менее чем из 5 векторов. Следовательно, среди множеств MT_5 и MT_6 должно быть множество вида (4) из (6.6). Не нарушая общности, считаем таким множество MT_5 и принимаем, что $-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5 \in MT_5$ и, следовательно, $a_{35}=\frac{1}{2}$. Оставшимися двумя векторами множества MT_5 может быть либо пара $\frac{1}{2}(\pm 1,\ -1,\ -1,\ \varepsilon^4,\ 2,\ 0)$ либо пара $\frac{1}{2}(\varepsilon^1,\ -1,\ -1,\ \pm 1,\ 2,\ 0)$.

Пусть имеет место первый случай. Тогда $a_{15}=0$, $a_{25}-\varepsilon^4 a_{45}=\frac{1}{2}$ и согласно (6.13) $a_{16}=0$. Поскольку далее следует, что $|a_{26}|+|a_{36}|+|a_{46}|=1$, то оба вектора $\frac{1}{2}(\pm 1,\ -1,\ -1,\ \tau^4,\ 0,\ 2)$, $|\tau^4|=1$, являются М-векторами. Тем самым для 6 коэффициентов получено (см. (6.13)) 5 соотношений:

$$a_{25}+a_{26}=\frac{1}{2},\quad a_{26}+a_{36}-\tau^4 a_{46}=1,$$
$$a_{36}+a_{45}+a_{46}=1+2a_{56},\quad a_{25}-\varepsilon^4 a_{45}=\frac{1}{2},\tag{6.14}$$
$$2\delta^3\left(\frac{1}{2}+a_{36}\right)+2\delta^4(a_{45}+a_{46})+1+|\delta^3|+|\delta^4|+2a_{56}=0.$$

Следовательно, множество MT_6 должно содержать еще и третий вектор. Это либо вектор $-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_6$, либо вектор $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6$.

М-вектор $-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_6$ требует, во-первых, $a_{36}=\frac{1}{2}$, во-вторых, $\delta^3=-1$ (в противном случае М-векторы $-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_6$, $-\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_2+\delta^4\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6$ влекут за собой в матрице (3.1) минор, противоречащий лемме 9) и, в-третьих, $\tau^4\neq\varepsilon^4$ (если это условие не выполнено, то из (6.14) нельзя однозначно найти коэффициенты). Полученные же при этих условиях уравнения $a_{45}+a_{46}=\frac{1}{2}$, $\pm(a_{45}-a_{46})=\frac{1}{2}$ приводят к противоречию из-за того, что М-вектором становится какой-либо из векторов $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_5$, $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6$.

В случае М-вектора $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6$ имеем $a_{46}=\frac{1}{2}$, $\tau^4=-1$ и из (6.14) получаем, что либо $a_{45}=0$, либо $a_{45}=\pm\frac{1}{2}$. И то, и другое противоречит принятому составу векторов множества MT_5.

Пусть М-векторами являются векторы $\frac{1}{2}(\varepsilon^1,\ -1,\ -1,\ \pm 1,\ 2,\ 0)$. Тогда $a_{45}=0$ и $\delta^4=0$. Согласно (6.13) получаем следующие 5 соотношений для 7 коэффициентов:

$$a_{15}+a_{16}=0,\quad a_{25}+a_{26}=\frac{1}{2},\quad a_{36}+a_{46}=1+2a_{56},$$
$$2\delta^3 a_{36}+1+2a_{56}=0,\quad -\varepsilon^1 a_{15}+a_{25}=\frac{1}{2}.\tag{6.15}$$

Множество MT_6 не может содержать вектор $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6$, так как в противном случае М-векторы $-\mathbf{e}_4+\mathbf{e}_6$, $-\mathbf{e}_2+\delta^3\mathbf{e}_3+\mathbf{e}_5+\mathbf{e}_6$, $\frac{1}{2}(\varepsilon^1\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_3-\mathbf{e}_4)+\mathbf{e}_5$ дают в характеристической матрице противоречащий лемме 9 минор. Если же $-e_3+e_6 \in MT_6$, то имеем $a_{36}=\frac{1}{2}$ и $a_{46}=\pm\frac{1}{2}$, что невозможно. Следовательно, множество MT_6 состоит только из двух С-векторов. Это либо пара $\frac{1}{2}(\pm 1, -1, \varepsilon^3, \varepsilon^4, 0, 2)$, либо пара $\frac{1}{2}(\tau^1, -1, \pm 1, \varepsilon^4, 0, 2)$, $|\tau^1|=1$, либо пара $\frac{1}{2}(\tau^1, -1, \varepsilon^3, \pm 1, 0, 2)$. Легко проверить, что все эти возможности приводят к противоречиям. □

§ 7. Вывод совершенных решеток из множества свободных допустимых 6-мерных центрировок

1. Как следует из таблицы 1, свободные допустимые 6-мерные центрировки принадлежат либо типу $Ц^{(6)}_{2,2}$, либо типу $Ц^{(6)}_{2,3}$. При выводе совершенных решеток мы рассмотрим подмножества этих типов: «тип» $[Ц^{(6)}_{2,3}]$, состоящий из всех тех центрировок типа $Ц^{(6)}_{2,3}$, которые не входят ни в тип $Ц^{(6)}_{2,1}$, ни в тип $Ц^{(6)}_{2,2}$, и «тип» $[Ц^{(6)}_{2,2}]$ — то подмножество центрировок типа $Ц^{(6)}_{2,2}$, которые не входят в тип $Ц^{(6)}_{2,1}$. В совокупности результаты этого § и § 6 дадут перечень всех совершенных 6-мерных решеток, а также представление их в виде допустимых центрировок.

2. Всюду ниже при исследовании типа $[Ц^{(6)}_{2,3}]$ набор букв i, j, k, p, q, r считаем перестановкой чисел $1, \ldots, 6$.

Лемма 7.1. Центрировки типа $[Ц^{(6)}_{2,3}]$ не содержат МЦ-векторов.

▷ Рассмотрим суммы вида (4.1):

$$\begin{array}{l} M\,\overline{|(1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ 0)} \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \hline 2\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M\,\overline{|(1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ 0,\ 0)} \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \hline 2\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \end{array}$$

$$\begin{array}{l} M\,\overline{|(1,\ \pm 1,\ \pm 1,\ 0,\ 0,\ 0)} \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \hline 2\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right), \end{array} \qquad \begin{array}{l} M\,\overline{|(1,\ \pm 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)} \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0) \\ \quad\ \ (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1) \\ \hline 2\left(\frac{1}{2},\ \pm\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Испытываемые векторы первых двух сумм не могут быть M-векторами по лемме 2, остальных—потому, что центрировки типа $[Ц_{2,3}^{(6)}]$ не содержат центрированных параллелепипедов минимумов размерности меньше 6. □

Из леммы 7.1 вытекает, что множество ДП-векторов рассматриваемого типа состоит только из Д-векторов $\frac{1}{2}(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. МД-множество совершенных решеток должно содержать не менее 15 векторов. Не нарушая общности, считаем что вектор $\alpha_0=\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$ входит в это множество. Для остальных Д-векторов используем обозначения: $\alpha_i=\alpha_0-\mathbf{e}_i$, $\alpha_{ij}=\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$, $\alpha_{ijk}=\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j-\mathbf{e}_k$.

По аналогии с тем, как это уже делалось в § 5 и § 6, для обозначения Д-множеств будем пользоваться символами. Каждый символ мы строим, исходя из вершин правильного 6-угольника, обозначенных буквами i, j, k, p, q, r, то есть некоторой перестановкой чисел $1, \ldots, 6$. Наличие в Д-множестве вектора α_i обозначаем на символе кружком вокруг вершины i, вектора α_{ij}—отрезком, соединяющим вершины i и j, вектора α_{ijk}—парой треугольников, подобных треугольникам ijk и pqr и расположенных внутри последних. Множества и их символы обозначаются одинаково.

Лемма 7.2. В МД-множестве количество векторов вида α_{ijk} не превышает 4. Если их именно 4, то они образуют множество $А_1$ рис. 3.

▷ Возьмем сумму вида (4.1а):

$$M[\alpha_{ijk}+\alpha_{jkp}+\alpha_{jkp}]+\alpha_0-e_k=2\alpha_{qr}.$$

Так как центрировки не должны содержать 5-мерных центрированных параллелепипедов минимумов, то испытываемая тройка Д-векторов (множество $А_2$ на рис. 3) не может быть тройкой МД-векторов.

Выпишем все 10 Д-векторов вида α_{ijk}. Заметив, что выбор любой пары из них безразличен (см. множество $А_3$ на рис. 3), возьмем, например, пару α_{123}, α_{124}, считая ее парой $М$-векторов. Запрет МД-подмножеств вида $А_2$ позволяет присоединить к этой паре при построении из нее тройки $М$-векторов, а затем и большего их множества, не более 2 векторов из оставшихся 8 выписанных. Если их точно 2, то это либо пара α_{136}, α_{146}, либо пара α_{135}, α_{145}. И та, и другая полученные четверки образуют множество вида $А_1$. □

Лемма 7.3. МД-множество не может содержать ни одного из подмножеств вида $Б_1$—$Б_7$, рис. 3.

▷ Рассмотрим суммы вида (4.1а):

$$M[\alpha_{ij}+\alpha_{ik}+\alpha_{jk}]+\alpha_0=2(\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r),$$

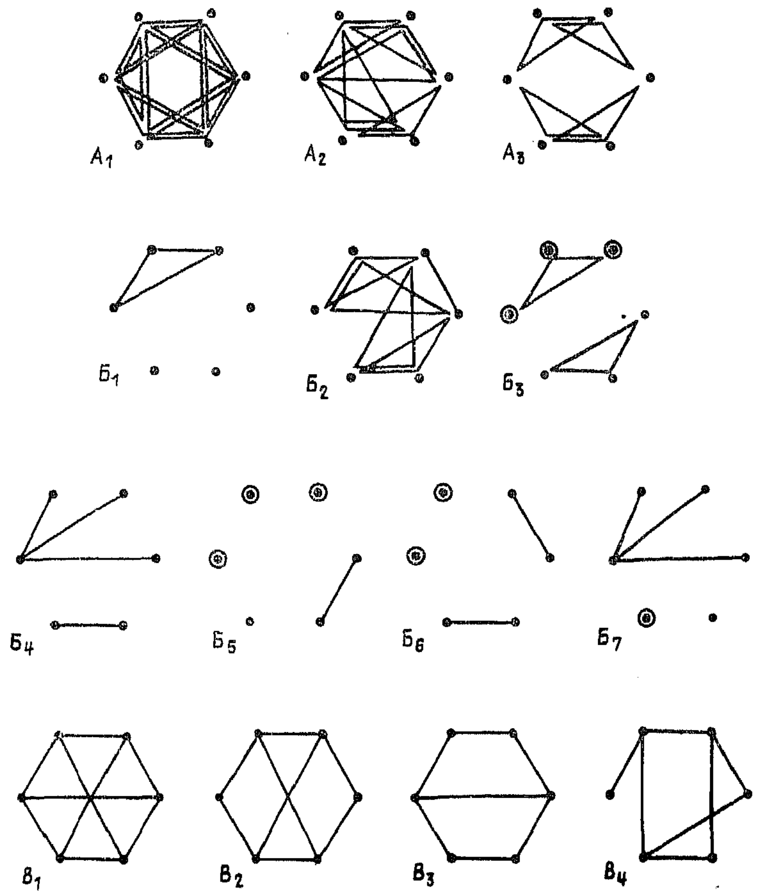


Рис. 3

$$M\,[\alpha_{ijk}+\alpha_{ijp}+\alpha_{kp}]+\alpha_0=2\,(\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_j),$$
$$M\,[\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k+\alpha_{pq_r}]=2\,(\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r),$$
$$M\,[\alpha_{ij}+\alpha_{ik}+\alpha_{ip}+(-\alpha_{q_r})]=2\,(-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r),$$
$$M\,[\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k+\alpha_{pq}]+(-\mathbf{e}_r)=2\alpha_0,\quad M\,[\alpha_i+\alpha_j+\alpha_{kp}+\alpha_{q_r}]=2\alpha_0,$$
$$M\,[\alpha_{ij}+\alpha_{ik}+\alpha_{ip}+(-\alpha_q)]+\mathbf{e}_r=2\,(-\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_q+\mathbf{e}_r).$$

Все испытываемые в этих суммах множества (это множества $Б_1$—$Б_7$ рис. 3) не могут быть подмножествами из МД-векторов, так как все они влекут за собой центрируемые параллелепипеды минимумов размерности меньше 6. □

Лемма 7.4. Множество МД-векторов вида α_i у совершенных центрировок состоит не более чем из 3 векторов.

▷ Совокупность из 6 или 5 МД-векторов вида α_i полностью исключает МД-векторы вида α_{ij} (лемма 7.3, множество $Б_5$) и вида α_{ijk} (лемма 7.3, множество $Б_3$). Таким образом, в обоих случаях общее число МД-векторов (7 и 6 соответственно) оказывается меньше 15.

Согласно лемме 7.3 (множества $Б_1$ и $Б_5$) совокупность из 4 МД-векторов α_i, α_j, α_k, α_p позволяет быть М-векторами не более чем четырем (из 15) векторам вида α_{ij}, например, векторам α_{ij}, α_{ik}, α_{kp}, α_{ip}. Всего, согласно лемме 7.2, МД-множество состоит в этом случае не более чем из 13 векторов, что для совершенных центрировок недостаточно. □

Лемма 7.5. Множество МД-векторов вида α_{ij} совершенной центрировки может иметь только один из видов $В_1$—$В_4$ рис. 3.

▷ Так как совершенная центрировка должна иметь не менее 15 МД-векторов, а по леммам 7.2 и 7.4 всего М-векторов видов α_i и α_{ijk} может быть не более 8, то количество МД-векторов вида α_{ij} совершенной центрировки должно быть не менее 7. Чтобы найти все виды подмножеств из МД-векторов α_{ij}, не запрещенных леммой 7.3, достаточно рассмотреть все подграфы с числом ребер не менее 7 полного 6-вершинного графа (см. Харари [8]) и выбрать те из них, которые не содержат подграфов, образованных ребрами символов $Б_1$ и $Б_4$. Нетрудный перебор приводит к 4 подграфам—символам $В_1$—$В_4$. □

Предложение 6. Тип $[Ц^{(6)}_{2,3}]$ не содержит совершенных центрировок.

▷ Будем дополнять множества $В_1$—$В_4$ как МД-подмножества векторами видов α_i и α_{ijk} с условием, чтобы и после дополнения они оставались МД-подмножествами. Прежде всего замечаем, что согласно лемме 7.3 (множества $Б_6$ и $Б_7$) ни одно из множеств $В_3$, $В_4$ нельзя дополнить более чем двумя векторами вида α_i, а множества $В_1$ и $В_2$—ни одним таким вектором. Ни в одном из 4 случаев не набирается 15 МД-векторов. □

3. Допустимыми векторами центровок типа $[Ц^{(6)}_{2,2}]$ являются 16 Д-векторов $\frac{1}{2}(1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1, 0)$, 32 С-вектора $\frac{1}{2}(\pm1, \pm1, \pm1, \pm1, \pm1, 2)$ и Ц-векторы. Содержащиеся в типе $[Ц^{(6)}_{2,2}]$ совершенные центрировки должны иметь не менее чем 15 МДП-векторов.

Всюду ниже в этом § набор букв i, j, k, p, q считаем перестановкой чисел $1, \ldots, 5$. Для удобства вместо $x^i e_i + x^j e_j + x^k e_k + x^p e_p + x^q e_q + x^6 e_6$ мы часто будем писать $\{x^i, x^j, x^k, x^p x^q, x^6\}$. Например, вектор $e_i + 2e_j + 3e_k + 4e_p + 5e_q + 6e_6$ запишем как строку $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Лемма 7.6. МЦ-векторы центрировок типа $[Ц_{2,2}^{(6)}]$ имеют либо вид (7.1), либо вид (7.2):

$$g(\varepsilon^i)=\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\mathbf{e}_6, \tag{7.1}$$

$$g(\varepsilon^i,\varepsilon^j)=\varepsilon^i\mathbf{e}_i+\varepsilon^j\mathbf{e}_j+\mathbf{e}_6. \tag{7.2}$$

$\triangleright$ Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 7.1. $\square$

Лемма 7.7. В множестве МЦ-векторов совершенной центрировки типа $[Ц_{2,2}^{(6)}]$ не может встретиться ни одно из следующих подмножеств:

(1) $g(\varepsilon^i)$, $g(\varepsilon^j,\varepsilon^k)$; (2) $g(\varepsilon^i\varepsilon^j)$, $g(\varepsilon^k,\varepsilon^p)$; (3) $g(\varepsilon^i,\varepsilon^j)$, $g(-\varepsilon^i,\varepsilon^k)$;
(4) $g(\varepsilon^i,\varepsilon^j)$, $g(\varepsilon^j,\varepsilon^k)$, $g(\varepsilon^i,\varepsilon^k)$.

$\triangleright$ Невозможность МЦ-подмножеств (1) и (2) следует из рассмотренных сумм вида (4.1а):

$$M[g(\varepsilon^i)+(-g(\varepsilon^j,\varepsilon^k))]+\mathbf{e}_p+\mathbf{e}_q=$$
$$=2\{\varepsilon^i/2,\ -\varepsilon^j/2,\ -\varepsilon^k/2, 1/2, 1/2, 0\},$$
$$M[g(\varepsilon^i,\varepsilon^j)+(-g(\varepsilon^k,\varepsilon^p))]+\mathbf{e}_q=$$
$$=2\{\varepsilon^i/2, \varepsilon^j/2,\ -\varepsilon^k/2,\ -\varepsilon^p/2, 1/2, 0\}.$$

Векторы множеств (3) и (4) дают соответственно следующие, противоречащие лемме 9, миноры в характеристических матрицах:

$$\begin{vmatrix}\varepsilon^i & 1\\ -\varepsilon^i & 1\end{vmatrix}=2\varepsilon^i,\qquad \begin{vmatrix}\varepsilon^i & \varepsilon^j & 0\\ \varepsilon^i & 0 & \varepsilon^k\\ 0 & \varepsilon^j & \varepsilon^k\end{vmatrix}=-2\varepsilon^i\varepsilon^j\varepsilon^k. \ \square$$

Из леммы 7.7 следует, что если в МЦ-множестве совершенной решетки векторов вида (7.2) более одного, то все векторы этого вида имеют общую координату, скажем, $x^i=\varepsilon^i$. Если при этом МЦ-множество содержит также и векторы вида (7.1), то последних только один, и это вектор $g(\varepsilon^i)$. Заметим еще, что в случаях, когда вектор вида (7.1) в множестве МЦ-векторов только один и в этом множестве есть векторы вида (7.2), то переходом от исходного выравненного репера к новому, в котором вектор $\mathbf{e}_6$ заменен на вектор $g(\varepsilon^i)$, а остальные векторы остались прежними, мы получим множество МЦ-векторов, состоящее только из векторов вида (7.1).

Из лемм 7.6 и 7.7 и сделанных после них замечаний выводим, что при поисках совершенных центрировок, не нарушая общности, можно ограничиться, что мы и сделаем, рассмотрением только следующих МЦ-множеств:

$$\begin{gathered}
1)\ \varnothing;\quad 2)\ g(\varepsilon^i);\quad 3)\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^j);\quad 4)\ g(\varepsilon^i),\ g(\varepsilon^j);\\
5)\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^k);\quad 6)\ g(\varepsilon^i),\ g(\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^k);\\
7)\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^i),\ g(\varepsilon^j);\quad 8)\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^k),\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^p);\\
9)\ g(\varepsilon^i),\ g(\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^k),\ g(\varepsilon^p);\quad 10)\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^k),\\
g(\varepsilon^i,\varepsilon^p),\ g(\varepsilon^i,\varepsilon^q);\quad 11)\ g(\varepsilon^i),\ g(\varepsilon^j),\ g(\varepsilon^k),\ g(\varepsilon^p),\ g(\varepsilon^q).
\end{gathered} \tag{7.3}$$

Лемма 7.8. Если среди МЦ-векторов совершенной центрировки есть векторы $g(\varepsilon^i)$, $g(\varepsilon^j)$, $g(\varepsilon^k)$, то среди ее МД-векторов не может быть таких, у которых

$$\{x^i, x^j, x^k\} = \pm\frac{1}{2}\{\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k\}. \qquad (7.4)$$

▷ Названные в лемме три вектора вместе с вектором, удовлетворяющим условию (7.4), дают в характеристической матрице противоречащий лемме 9 минор:

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^i & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \varepsilon^j & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \varepsilon^k & 1 \\ \varepsilon^i/2 & \varepsilon^j/2 & \varepsilon^k/2 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\varepsilon^i\varepsilon^j\varepsilon^k. \ \square$$

Лемма 7.9. Если среди МЦ-векторов совершенной центрировки есть векторы $g(\varepsilon^i, \varepsilon^j)$, $g(\varepsilon^i, \varepsilon^k)$, то среди ее МД- и МС-векторов не может быть таких, у которых

$$\{x^i, x^j, x^k\} = \pm\frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k\}. \qquad (7.5)$$

▷ Действительно, векторы $g(\varepsilon^i, \varepsilon^j)$, $g(\varepsilon^i, \varepsilon^k)$ и вектор, удовлетворяющий условию (7.5), дают в характеристической матрице минор

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^i & \varepsilon^j & 0 \\ \varepsilon^i & 0 & \varepsilon^k \\ -\varepsilon^i/2 & \varepsilon^j/2 & \varepsilon^k/2 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}\varepsilon^i\varepsilon^j\varepsilon^k. \ \square$$

Лемма 7.10. Если в множестве МДП-векторов есть Ц-вектор, у которого $x^i = \varepsilon^i$, то в этом множестве не может быть С-вектора с координатами $x^i = -\frac{\varepsilon^i}{2}$, $x^6 = 1$.

▷ Названные в лемме Ц- и С-вектор дают в характеристической матрице минор

$$\begin{vmatrix} \varepsilon^i & 1 \\ -\frac{\varepsilon^i}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}\varepsilon^i. \ \square$$

Лемма 7.11. Названные в списке (7.3) множества 8)—11) не могут быть МЦ-множествами совершенных центрировок.

▷ Считаем МЦ-множеством центрировки множество 8) из списка (7.3). Из всего множества С-векторов его можно дополнить, как МДП-множество, самое большее следующими двумя векторами $\frac{1}{2}\{\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \varepsilon^p, \pm 1, 2\}$ — из-за ограничений леммы 7.10. По лемме 7.9 не могут войти в такое множество и Д-векторы $\frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \pm 1, \pm 1, 0\}$ $\frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, \varepsilon^j, \pm 1, \varepsilon^p, \pm 1, 0\}$, $\frac{1}{2}(-\varepsilon^i, \pm 1,$

^{k}, ε^p, $\pm 1, 0\}$, среди которых различны 8. Таким образом, МДП-векторами могут быть не более $3+2+(16-8)=13$ векторов, откуда следует, что в случае МЦ-множества 8), и аналогично — МЦ-множества 10), центрировка не может являться совершенной решеткой.

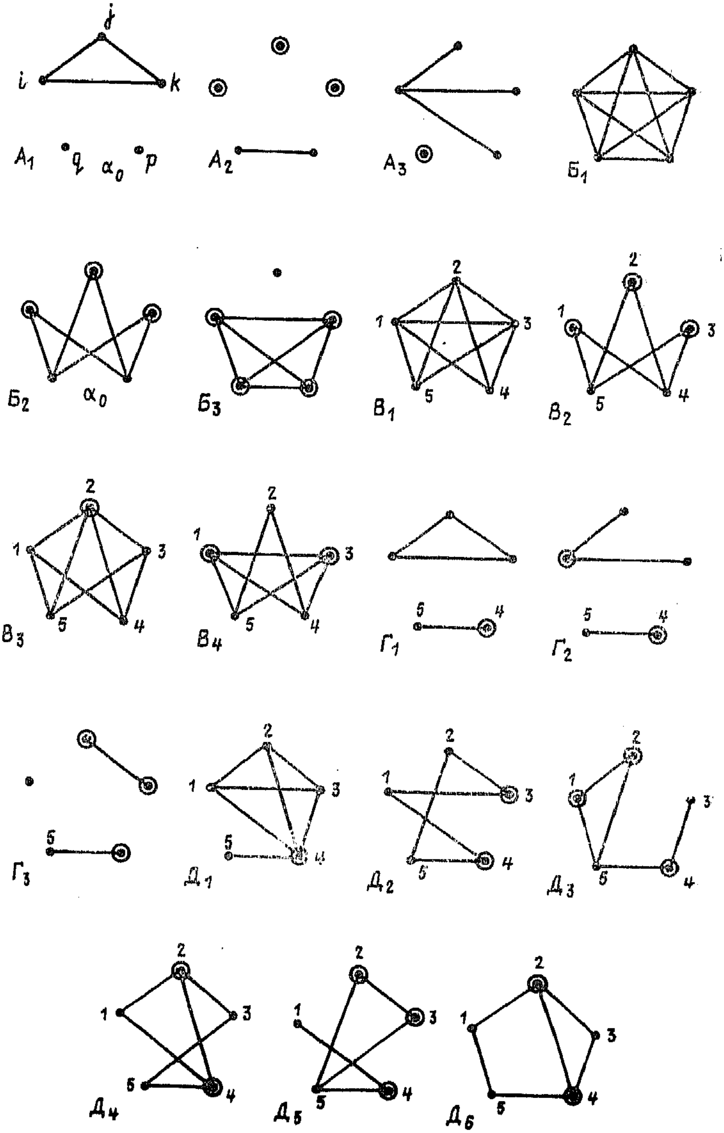
Считаем теперь МЦ-множеством множество 9). Лемма 7.10 позволяет дополнить это множество, как множество М-векторов, не более чем двумя С-векторами. Лемма 7.8 запрещает быть векторами такого множества следующим 10 Д-векторам: $\frac{1}{2}\{\varepsilon^l, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \pm 1, \pm 1, 0\}$, $\frac{1}{2}\{-\varepsilon^l, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \varepsilon^p, \pm 1, 0\}$, $\frac{1}{2}\{\varepsilon^l, -\varepsilon^j, \varepsilon^k, \varepsilon^p, \pm 1, 0\}$, $\frac{1}{2}\{\varepsilon^l, \varepsilon^j, -\varepsilon^k, \varepsilon^p, \pm 1, 0\}$. Тем самым, для МДП-множества остается не более $4+2+(16-10)=12$ векторов. Следовательно, случай множества 9), и аналогичным образом — множества 11), при поисках совершенных центрировок из рассмотрения исключаются. □

Для Д-векторов примем обозначения: $\alpha_0=\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 0)$, $\alpha_i=\alpha_0-\mathbf{e}_i$, $\alpha_{ij}=\alpha_0-\mathbf{e}_i-\mathbf{e}_j$. Для изображения множеств из Д-векторов воспользуемся символами, описанными в § 5, п. 3 Дополнительно потребуем только, чтобы в случае присутствия в множестве Д-векторов вектора α_0 у нижних вершин символа ставилась буква α_0.

Кроме символов, из п. 3 § 5 мы, заменив 5-мерные векторы $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$ на 6-мерные $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, 0)$, воспользуемся леммой 5.4 и некоторыми следствиями из нее. Таким способом получим следующую лемму, последнее утверждение которой доказывается непосредственным подсчетом:

Лемма 7.12. *Множество МД-векторов центрировок тип* $[Ц_{2,2}^{(6)}]$ *не содержит подмножеств вида* $А_1, А_2$ *и* $А_3$ *(см. рис. 4) и состоит не более чем из 10 векторов. Если МД-множество состоит ровно из 10 векторов, то оно относится к одному из трех видов* $Б_1, Б_2, Б_3$, *рис. 4. Эти три вида переходят друг в друга подходящим изменением направлений векторов* $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ *основного репера центрируемой решетки.*

Лемма 7.13. *Если в центрировке* $\Lambda(\mathscr{E})$ *типа* $[Ц_{2,2}^{(6)}]$ *есть МС-вектор, скажем, вектор* $\alpha+\mathbf{e}_6$, *где* $\alpha=\frac{1}{2}(\delta^1, \ldots, \delta^5, 0)$ $|\delta^i|=1$, $i=1, \ldots, 5$, *и от выравненного репера* $\mathscr{E}=\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_6\}$ *перейти к новому выравненному реперу* $\mathscr{E}^*=\{\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_6^*\}$, $\mathbf{e}_i^*=\mathbf{e}_i$, $i=1, \ldots, 5$, $\mathbf{e}_6^*=\alpha+\mathbf{e}_6$, *то полученная центрировка* $\Lambda(\mathscr{E}^*)$ *(новой решетки) принадлежит тому же типу и МЦ-множество с присоединенным к нему вектором* $\mathbf{e}_6$ *центрировки* $\Lambda(\mathscr{E})$ *становится в центрировке* $\Lambda(\mathscr{E}^*)$ *МС-множеством, и наоборот, а всякий дробный вектор центрировки* $\Lambda(\mathscr{E})$ *переходит в тот же дробный вектор центрировки* $\Lambda(\mathscr{E}^*)$.



j
i
k
A_1
q
α_0
p
A_2
A_3
$Б_1$
$Б_2$
α_0
$Б_3$
B_1
B_2
B_3
B_4
$Г_1$
$Г_2$
$Г_3$
$Д_1$
$Д_2$
$Д_3$
$Д_4$
$Д_5$
$Д_6$
1
2
3
4
5

Рис. 4

▷ Доказательство проводится прямой подстановкой в формулы ${}^*x^i = x^i - \frac{1}{2}\delta^i x^6$, $i=1,\ldots,5$, ${}^*x^6 = x^6$, выражающие новые координаты через старые. □

Пусть $N_{\text{Ц}}, N_{\text{С}}, N_{\text{Д}}$ — соответственно количества МЦ-, МС- и МД-векторов совершенной центрировки типа $[Ц^{(6)}_{2,2}]$. Из леммы 7.12 имеем, что $N_{\text{Д}} \leqslant 10$, из леммы 7.11 и списка (7.3) — что $N_{\text{Ц}} \leqslant 3$. Поскольку $N_{\text{Ц}} + N_{\text{С}} + N_{\text{Д}} \geqslant 15$, то получаем, что $N_{\text{С}} \geqslant 2$.

Согласно лемме 7.13, в совершенных центрировках всегда можно так выбрать выравненный репер, чтобы $N_{\text{Ц}} \geqslant N_{\text{С}} - 1$. Имея это ввиду, дальнейшие поиски совершенных решеток будем вести только среди центрировок, у которых $N_{\text{С}} \leqslant N_{\text{Ц}} + 1$. Следовательно, возможными множествами МЦ-векторов совершенных центрировок далее будем считать только множества видов 4) — 7) списка (7.3).

Далее мы докажем несколько лемм (леммы 7.14—7.17), касающихся возможностей сочетания С- и Д-векторов в МДП-множествах. Кроме букв $\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^5$, считаем далее, что и буквы $\delta^1, \ldots, \delta^5$ имеют значения $+1$ или -1.

Лемма 7.14. Четыре ДП-вектора

$$\begin{aligned} &\alpha = \frac{1}{2}\{\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \varepsilon^p, \varepsilon^q, 0\}, \quad \alpha' = \frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, -\varepsilon^j, \varepsilon^k, \varepsilon^p, \varepsilon^q, 0\}, \\ &\beta = \frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, \varepsilon^j, \delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\}, \quad \beta' = \frac{1}{2}\{\varepsilon^i, -\varepsilon^j, \delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\} \end{aligned} \tag{7.6}$$

одновременно не могут быть М-векторами одной и той же центрировки.

▷ Убедившись, что эти 4 вектора линейно независимы, рассмотрим их сумму $M = [\alpha + \alpha' + \beta + \beta'] = 2\left\{0, 0, \frac{\varepsilon^k + \delta^k}{2}, \frac{\varepsilon^p + \delta^p}{2}, \frac{\varepsilon^q + \delta^q}{2}, 1\right\} = 2\mathbf{a}$. Поскольку вектор $\mathbf{a}$ целый, то он принадлежит центрировке. По лемме 3 получаем противоречие с тем, что рассматриваемые центрировки не содержат 4-мерных центрированных параллелепипедов минимумов. □

Лемма 7.15. Два С-вектора $\alpha = \frac{1}{2}\{\delta^i, \delta^j, \delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\}$, $\beta = \frac{1}{2}\{-\delta^i, -\delta^j, -\delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\}$ не могут быть М-векторами одной и той же центрировки.

▷ Вытекает из равенства $M[\alpha + \beta] - \delta^p \mathbf{e}_p - \delta^q \mathbf{e}_q = 2\mathbf{e}_6$. □

Лемма 7.16. Если МД-множество есть множество $Б_1$, то два С-вектора $\frac{1}{2}\{\delta^i, \delta^j, \delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\}$, $\frac{1}{2}\{-\delta^i, -\delta^j, \delta^k, \delta^p, \delta^q, 2\}$ при условии $\delta^i = \delta^j$ не могут быть оба М-векторами.

▷ МД-векторы α_{ik}, α_{jk} из множества $Б_1$ вместе с С-векторами, о которых говорится в лемме, образуют четверку, запрещенную леммой 7.14. □

Лемма 7.17. Если МДП-множество содержит 4 вектора

$$\frac{1}{2}\{\pm\delta^i,\ \pm\delta^j,\ \delta^k,\ \delta^p,\ \delta^q,\ 2\}, \tag{7.7}$$

то МД-векторов в этом множестве не более 8, а именно, в МД-множество попадает не более одного вектора из каждой названной в (7.8) пары Д-векторов:

$$\begin{array}{llll} 1)\ \alpha_0, \alpha_{ij}; & 2)\ \alpha_i, \alpha_j; & 3)\ \alpha_k, \alpha_{pq}; & 4)\ \alpha_p, \alpha_{kq}; \\ 5)\ \alpha_q, \alpha_{kp}; & 6)\ \alpha_{ik}, \alpha_{jk}; & 7)\ \alpha_{ip}, \alpha_{jp}; & 8)\ \alpha_{iq}, \alpha_{jq}. \end{array} \tag{7.8}$$

▷ Для каждой из пар (7.8) можно найти такие два вектора среди (7.7), что согласно лемме 7.14 полученная четверка не будет М-подмножеством. Следовательно, в каждой из 8 пар (7.8), по которым распределены все 16 Д-векторов, хотя бы один вектор не будет М-вектором. □

4. В этом пункте рассмотрим каждый из 4 видов 4)—7) МЦ-множеств с тем, чтобы дополнить это множество М-векторами до МДП-множества совершенной решетки.

Пусть МЦ-множество имеет один из видов 4), 5). Так как в обоих случаях $N_Ц = 2$, то $N_С \leqslant 3$. Следовательно, $N_С = 3$ и $N_Д = 10$. Не нарушая общности, считаем, что МД-множество имеет вид $Б_1$ и исследуем каждый из случаев 4) и 5) отдельно.

1) МЦ-множество вида 5). Согласно лемме 7.9 запрещены МД-векторы $\frac{1}{2}\{-\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k, \pm 1, \pm 1, 0\}$. Так как среди этих 4 векторов при любых $\varepsilon^i, \varepsilon^j, \varepsilon^k$ имеется хотя бы один вектор вида α_{ij}, то множество $Б_1$ не может быть МД-множеством. Следовательно, совершенные центрировки МЦ-множества вида 5) содержать не могут.

2) МЦ-множество вида 4). Пусть МЦ-векторы суть $(\varepsilon^1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(0, \varepsilon^2, 0, 0, 0, 1)$. Из леммы 7.10 вытекает, что МС-векторы принадлежат множеству из следующих 8 векторов: $\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \pm 1, \pm 1, \pm 1, 2)$.

Пусть $\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \delta^3, \delta^4, \delta^5, 2)$ — один из МС-векторов. Тогда согласно леммам 7.15 и 7.16 оставшиеся два МС-вектора будут, с точностью до нумерации координат x^3, x^4, x^5, либо

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \delta^3, 1, -1, 2),\quad \frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \delta^3, -1, 1, 2),\ \text{причем}\ \delta^4 = \delta^5,$$

либо

$$\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \delta^3, -\delta^4, -\delta^5, 2),\quad \frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, -\delta^3, -\delta^4, \delta^5, 2),$$

причем $\delta^3 = \delta^5 \neq \delta^4$.

Последний случай дает в сочетании с M-вектором α_{12} составленный из координат x^3, x^4, x^5, x^6 минор, по абсолютной величине равный 3/2, что противоречит лемме 9.

Исследуем первый случай. Использовав оставшуюся свободу в выборе направления вектора $\mathbf{e}_6$ (напоминаем, выбор определенного направления векторов $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_5$ мы использовали, взяв из множеств $Б_1$, $Б_2$, $Б_3$ в качестве МД-множества множество $Б_1$), положим $\delta^4=\delta^5=1$.

Мы получили, что в рассматриваемом случае возможно МДП-множество в точности из 15 перечисленных выше векторов. Исследуем центрировки, получающиеся при различных значениях ε^1, ε^2, δ^3.

Если $\varepsilon^1=-\varepsilon^2$, то векторы $\varepsilon^1\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6$, $\varepsilon^2\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_6$, α_{13}, α_{23} образуют центрированный 4-мерный куб, поскольку они линейно независимы и $\alpha_{13}+\alpha_{23}+(\varepsilon^1\mathbf{e}_6+\mathbf{e}_1)+(\mathbf{e}_2-\varepsilon^1\mathbf{e}_6)=2\alpha_3$. Аналогично, в случае $\varepsilon^1=\varepsilon^2=-\delta^3=1$ МДП-векторы образуют 6-мерный параллелепипед, центрированный с индексом 3:

$$(-\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6)+(-\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_6)+(\alpha_{12}+\mathbf{e}_6)+\alpha_{34}+\alpha_{35}+\alpha_{45}=3\mathbf{e}_6.$$

Следовательно, в названных случаях центрировки не принадлежат типу $[Ц_{2,2}^{(6)}]$.

Если принять $\varepsilon^1=\varepsilon^2=\delta^3=\delta=\pm1$, то координаты $x^1, \ldots, x^5$ векторов $\delta\alpha_4+\mathbf{e}_6$, $\delta\alpha_5+\mathbf{e}_6$, α_{12}, α_{13}, α_{23} образуют противоречащий лемме 9 минор — его модуль равен 3/2.

В оставшемся случае $\varepsilon^1=\varepsilon^2=-\delta^3=1$ подставляем координаты наших 15 МДП-векторов в форму вида (2.1). Из полученных уравнений однозначно вычисляются коэффициенты формы; полученная по их значениям центрированная форма следующая

$$\sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+\frac{1}{2}\sum_{\substack{i,j=1\\(i<j)}}^{5}x^ix^j-\left(x^1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{2}x^5\right)x^6. \tag{7.9}$$

Центрировка этой формы не имеет других M-векторов, кроме тех, по которым она определена, и удовлетворяет всем условиям типа $[Ц_{2,2}^{(6)}]$. По числу M-векторов и значению определителя соответствующей ей ПКФ (оно равно $13\cdot3^3\cdot2^{-12}$) устанавливаем, что она является допустимым представлением совершенной решетки $\Gamma_3^{(6)}$, определяемой классом эквивалентности ПКФ $\varphi_3^{(6)}=\varphi_0^{(6)}-\frac{1}{2}(x^1x^2+x^3x^4+x^5x^6)$.

3) МЦ-множество вида 6). Воспользовавшись леммами 7.8 и 7.12, устанавливаем, что в данном случае $N_Д<10$. Следовательно, поскольку $N_Ц\geqslant N_С-1$, то или $N_С=3$, или $N_С=4$. Примем $i=1$, $j=2$, $k=3$.

Если $N_С=4$, то МС-векторы суть $\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \pm1, \pm1, 2)$.

Согласно лемме 7.8 ни один вектор из четверки $\frac{1}{2}(\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \pm 1, \pm 1, 0)$ не может быть М-вектором. Далее пользуемся леммой 7.17. Убедившись, что запрещенная четверка образует две пары из списка (7.8), получим, что $N_Д \leqslant 6$. Следовательно, этот случай не содержит совершенных центрировок.

Пусть $N_C = 3$. Не нарушая общности, в качестве МЦ- и МС-векторов берем следующие: (1, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 1), $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 2)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, -1, 2)$, $\frac{1}{2}(1, 1, 1, -1, 1, 2)$. Согласно лемме 7.8 не могут быть М-векторами Д-векторы α_0, α_4, α_5, α_{45}; согласно лемме 7.14 в каждой из пар (α_1, α_{23}), (α_2, α_{13}), (α_3, α_{12}) не может быть более одного М-вектора. Поэтому собрать множество не менее чем из 9 МД-векторов можно только следующим способом: взять оставшиеся 6 Д-векторов α_{14}, α_{15}, α_{24}, α_{25}, α_{34}, α_{35}, которые не входят ни в одну из названных пар и не запрещены леммой 7.8, и добавить к ним по одному вектору из каждой пары. Выбирая эти три вектора всеми возможными способами, получим с точностью до нумерации координат 4 варианта МД-множеств $B_1 - B_4$, символы которых даны на рис. 4.

В случаях МД-множеств B_1 и B_2 координаты $x^1, \ldots, x^5$ соответственно векторов α_{12}, α_{13}, α_{23}, $\alpha_4 + e_6$, $\alpha_5 + e_6$ и векторов α_1, α_2, α_3, $\alpha_4 + e_6$, $\alpha_5 + e_6$ образуют определители, абсолютные значения которых равны 3/2. По лемме 9 эти случаи не подходят для допустимых центрировок.

В случаях B_3 и B_4 по МДП-векторам вычисляем коэффициенты форм вида (2.1). Они находятся однозначно и дают следующие центрированные формы:

$$B_3)\quad \sum_{l=1}^{6}(x^l)^2 + \frac{1}{2}\left[x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 + (x^4 + x^5)x^2 + x^4x^5\right] - \\ - \left(x^1 + x^2 + x^3 + \frac{x^4 + x^5}{2}\right)x^6, \qquad (7.10)$$

$$B_4)\quad \sum_{l=1}^{6}(x^l)^2 + \frac{1}{2}\left[x^1x^2 + x^1x^3 + x^2x^3 - (x^4 + x^5)x^2 + x^4x^5\right] - \\ - (x^1 + x^2 + x^3)x^6.$$

Оказывается, что центрировка первой формы имеет в дополнение к тем 21 М-вектору, по которым она определена, еще и М-вектор $\alpha_2 + e_6$. Поскольку это противоречит условиям вывода центрировок (7.10), рассматриваемая центрировка не принадлежит типу $[Ц_{2,2}^{(6)}]$. (Можно показать, что она является допустимым представлением совершенной формы $\varphi_5^{(6)}$ и принадлежит уже рассмотренному типу $Ц_3^{(6)}$). Центрировка второй формы есть совершенная форма с определителем $13\cdot 3^3\,2^{-12}$ и 21 M-вектором. Она является допустимым представлением решетки $\Gamma_3^{(6)}$, см. (7.9).

4) МЦ-множество вида 7). В этом случае имеем: $N_{\text{Ц}}=3$, $2\leqslant N_{\text{С}}\leqslant 4$, $8\leqslant N_{\text{Д}}\leqslant 10$. Не нарушая общности, МЦ-векторами считаем векторы $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_6$, $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_6$.

Пусть $\alpha=\frac{1}{2}(1,\ 1,\ \delta^3,\ \delta^4,\ \delta^5,\ 2)$ — один из МС-векторов. Перейдем к новому основному реперу заменой вектора $\mathbf{e}_6$ на вектор α и воспользуемся леммой 7.13. Согласно этой лемме, МД-векторы перейдут в себя, а МС-множеством в новом репере станут 4 вектора $\frac{1}{2}(\pm 1,\ \pm 1,\ -\delta^3,\ -\delta^4,\ -\delta^5,\ 2)$. По лемме 7.17, в МДП-множестве МД-векторов может быть не более 8. Следовательно, случаи $N_{\text{Д}}=10$ и $N_{\text{Д}}=9$ отпадают.

Итак, далее рассматриваем случай $N_{\text{Ц}}=3$, $N_{\text{Д}}=8$ и, следовательно, $N_{\text{С}}=4$. Согласно леммам 7.10 и 7.15 в качестве МС-векторов без ограничения общности, можно взять одно из четырех множеств

1) $\alpha_0+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{34}+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{35}+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{45}+\mathbf{e}_6;$

2) $\alpha_0+\mathbf{e}_6,\ \alpha_4+\mathbf{e}_6,\ \alpha_5+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{45}+\mathbf{e}_6;$

3) $\alpha_0+\mathbf{e}_6,\ \alpha_3+\mathbf{e}_6,\ \alpha_4+\mathbf{e}_6,\ \alpha_5+\mathbf{e}_6;$

4) $\alpha_0+\mathbf{e}_6,\ \alpha_5+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{35}+\mathbf{e}_6,\ \alpha_{45}+\mathbf{e}_6.$

В первом случае получаем противоречие с леммой 9. В последних двух, воспользовавшись леммой 7.13 (заменив вектор $\mathbf{e}_6$ на вектор $\alpha_0+\mathbf{e}_6$ в случае 3) и на вектор $\alpha_5+\mathbf{e}_6$ в случае 4)), при переходе к новому реперу получим уже исследованный вариант МЦ-множества вида 6).

Рассмотрим оставшийся случай. Согласно лемме 7.14 из каждой пары Д-векторов (7.8) при $i=4$, $j=5$, $k=1$, $p=2$, $q=3$ M-вектором может быть не более одного. В нашем случае этот M-вектор обязательно должен быть в каждой паре.

Не нарушая общности (выбором направлений и перенумерацией векторов $\mathbf{e}_4$ и $\mathbf{e}_5$), потребуем, чтобы из первых двух пар (7.8) M-векторами были векторы α_{45} и α_4. Тогда из следующих трех пар (7.8) выбор тройки α_1, α_2, α_3 запрещается леммой 7.12 (множество A_2) и после рассмотрения пар 1)—5) из (7.8) получаем, с точностью до перестановки индексов 1, 2, 3, только три возможности выбора M-векторов, представленных на рис. 4 как множества Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

Как следует из леммы 7.12, каждое из множеств Γ_1—Γ_3 можно дополнить из оставшихся пар 6)—8) списка (7.8) только единственным с точностью до нумерации координат x^1, x^2, x^3 способом. Наконец, учитывая, что в варианте 7) МЦ-множества координату x^3 нельзя менять местами ни с одной из координат x^1, x^2, а координаты x^1 и x^2 между собой можно переставлять, мы получаем 6 вариантов МД-множеств, представленных на рис. 4 как множества $Д_1$—$Д_6$.

По значениям координат 15 МДП-векторов отыскиваем в каждом из 6 вариантов коэффициенты центрируемых форм вида (2.1). В случаях $Д_1$—$Д_3$ они однозначно не определяются, то есть этим случаям не соответствуют совершенные решетки. Приводим для них результаты вычислений, где не названные коэффициенты равны 0:

$$Д_1)\ a_{13}=a_{24}=u,\ a_{14}=a_{23}=\frac{1}{2}-u,$$

$$u_{16}=a_{26}=a_{36}=a_{46}=-a_{34}=-\frac{1}{2};$$

$$Д_2)\ a_{23}=a_{24}=u,\ a_{36}=a_{46}=-\frac{1}{2}u,$$

$$-a_{16}=-a_{26}=a_{34}=a_{35}=a_{45}=\frac{1}{2};$$

$$Д_3)\ a_{13}=-a_{14}=u,\ a_{23}=-a_{24}=-\frac{1}{2}-u,$$

$$a_{16}=a_{26}=a_{34}=-a_{36}=a_{46}=-\frac{1}{2}.$$

В случаях $Д_4$—$Д_6$ по М-векторам восстанавливаются следующие центрируемые формы:

$$Д_4)\ \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+x^2x^3+x^2x^4+x^3x^4-x^6(x^1+x^2+x^3+x^4), \tag{7.11}$$

$$Д_5)\ \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2-x^1(x^3+x^4)+x^3x^4-x^6(x^1+x^2-x^3+x^4), \tag{7.12}$$

$$Д_6)\ \sum_{i=1}^{6}(x^i)^2+\frac{1}{2}x^1(x^4-x^5)+\frac{1}{2}x^2(x^4+x^5)-$$
$$-x^6\left(x^1+x^2+\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x^4\right). \tag{7.13}$$

Как видно из значений коэффициентов, центрируемые формы (7.11) и (7.12), помимо тех М-векторов, по которым они построены, имеют еще по нескольку МЦ-векторов (это векторы e_2—e_3, e_2—e_4, e_3—e_4, e_3+e_6, e_4+e_6 в случае формы (7.11), и векторы e_1+e_3, e_1+e_4, e_3—e_4, e_3—e_6, e_4+e_6 в случае формы (7.12)). Этот факт противоречит условиям вывода центрируемых форм и показывает тем самым, что центрировки в случаях $Д_4$ и $Д_5$ не принадлежат типу $[Ц_{2,2}^{(6)}]$.

Совершенная центрировка (7.13) в случае $Д_6$ не имеет других М-векторов, кроме тех, по которым она построена; определитель этой центрировки равен $7^3\cdot 2^{-12}$. Из совпадений количества M-векторов и значений определителей центрировки (7.13) и известной совершенной ПКФ

$$\varphi_6^{(6)} = \varphi_0^{(6)} - \frac{1}{2}(2x^1x^2 + x^1x^3 + x^1x^6 + x^2x^5 + x^4x^6 + 2x^5x^6) \quad (7.14)$$

(см., например, [7]) делаем вывод, что наша центрировка является допустимым представлением совершенной решетки $\Gamma_6^{(6)}$, определяемой ПКФ (7.14).

Как результат п.п. 3, 4 этого параграфа и предложения 5 получаем

Предложение 7. Тип $Ц_{2,2}^{(6)}$ содержит всего 2 совершенных решетки. Ими являются решетки $\Gamma_3^{(6)}$ и $\Gamma_6^{(6)}$, задаваемые соответственно центрируемыми формами (7.9) и (7.13).

5. Общим итогом § 6 и § 7 является

Теорема 6. При $n=6$ имеется всего 7 совершенных решеток $\Gamma_0^{(6)}, \Gamma_1^{(6)}, \ldots, \Gamma_6^{(6)}$; они соответствуют ПКФ $\varphi_0^{(6)}, \varphi_1^{(6)}, \ldots, \varphi_6^{(6)}$ из работ [10, 7]. У решетки $\Gamma_0^{(6)}$ все параллелепипеды минимумов основные. Решетка $\Gamma_1^{(6)}$ имеет параллелепипеды минимумов, центрируемые по типу $Ц_{2,4}^{(6)}$ — 6-мерные кубы. Допустимые представления решеток $\Gamma_2^{(6)}, \Gamma_4^{(6)}, \Gamma_5^{(6)}$ принадлежат типу $Ц_3^{(6)}$, то есть у них имеются параллелепипеды минимумов, центрируемые вектором $\frac{1}{3}(1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Допустимые представления решеток $\Gamma_3^{(6)}, \Gamma_6^{(6)}$ принадлежат типу $Ц_{2,2}^{(6)}$, то есть у них имеются параллелепипеды минимумов, центрируемые вектором $\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1, 1, 0)$,

ЛИТЕРАТУРА

1. *Владимиров В. С.*, О совершенных формах с шестью переменными. Мат. сб., 1958, *44*, № 2, 265—272 (РЖМат, 1960, 8563)
2. *Делоне Б. Н.*, Геометрия положительных квадратичных форм. Успехи мат. наук, 1937, *3*, 16—62; 1938, *4*, 102—164
3. —, Петербургская школа теории чисел. М.-Л., Изд-во АН СССР, 1947
4. *Захарова (Новикова) Н. В.*, Центрировки 8-мерных решеток, сохраняющие репер последовательных минимумов. Тр. Мат. ин-та АН СССР, 1980, *152*, 97—123 (РЖМат, 1980, 11А699)
5. *Рышков С. С.*, К проблеме отыскания совершенных квадратичных форм от многих переменных. Тр. мат. ин-та АН СССР, 1976, *142*, 215—239 (РЖМат, 1976, 2А171)
6. —, *Барановский Е. П.*, *С*-типы *n*-мерных решеток и пятимерные примитивные параллелоэдры (с приложением к теории покрытий). Тр. мат. ин-та АН СССР, 1976, 131 с. (РЖМат, 1976, 7А831)
7. —, —, Классические методы теории решетчатых упаковок. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 4, 3—63 (РЖМат, 1979, 11А590)
8. *Харари Ф.*, Теория графов. М.; Мир, 1973 (РЖМат, 1973, 12В406К)
9. *Barnes E. S.*, The complete enumeration of extreme senary forms. Phil. Trans. Roy, Soc., London, 1957, *A249*, № 969, 461—506 (РЖМат, 1958, 3527)

10. —, The construction of perfect and extreme forms. I. Acta arithm., 1959, *5*, № 1, 57—79 (РЖМат, 1961, 12A183)
11. —, The construction of perfect and extreme forms. II. Acta arithm., 1959, *5*, № 2, 205—222 (РЖМат, 1961, 12A184)
12. *Blichfeldt H. F.*, The minimum values of positive quadratic forms in six, seven and eight variables. Math. Z., 1934—1935, *39*, 1—15
13. *Coxeter H. S. M.*, Extreme forms. Canad. J. Math., 1951, *3*, 391—441
14. —, *Todd J. A.*, An extreme duodenary form. Can. J. Math., 1953, *5*, 384—392 (РЖМат, 1954, 2509)
15. *Hofreiter N.*, Zur Geometrie der Zahlen. Monatsh. Math. — Phys., 1933, *40*, 181—192; 1935, *42*, 101—112
16. *Korkine A.*, *Zolotareff G.*, Sur les formes quadratiques. Math. Ann., 1873, *6*, 366—389. (См. также Золотарёв Е. И., Полное собрание соч., вып. 1, 1931, изд-во АН СССР)
17. —, —, Sur les formes quadratiques positives. Math. Ann., 1877, *11*, 242—292. (См. также Золотарёв Е. И., Полное собрание соч., вып. 1, 1931, изд-во АН СССР)
18. *Larmouth J.*, The enumeration of perfect forms. В кн. Computers in number theory, 1971, London—New York, 237—239
19. *Rankin R. A.*, On the minimal points of perfect quadratic forms. Math. Z., 1964, *84*, 228—232 (РЖМат, 1965, 3A111).
20. *Scott P. R.*, On perfect and extreme forms. J. Austral. Mat. Soc., 1964, *4*, 56—77 (РЖМат, 1965, 3A110).
21. *Stacey K. C.*, The enumeration of perfect septenary forms. J. London Math. Soc., 1975, *10*, 97—104 (РЖМат, 1975, 10A168)
22. —, The perfect septenary forms with $\Delta_4=2$ J. Austral. Math. Soc., 1976, *22*, N 2, 144—164 (РЖМат, 1977, 5A102).
23. *Voronoi G.*, Sur quelques proprietes des formes quadratiques positives parfaites. J. reine und angew. Math., 1907, 133, 97—178 (Рус. перев. в кн. Г. Ф. Вороной, Собр. соч., т. 2, Киев: Изд-во АН УССР, 1952)
24. *Watson G. L.*, On the minimal points of a perfect septenary quadratic forms. Mathematika (Gr. Brit.), 1969, *16*, № 2, 170—177 (РЖМат, 1970, 7A148)
25. —, On the minimal points of a positive quadratic forms. Mathematika (Gr. Brit.), 1971, *18*, № 1, 60—70 (РЖМат, 1972, 3A131)

4—5006