A. M. Vershik, V. Ya. Gershkovich, Geodesic flow on $SL_2\mathbb{R}$ with non-holonomic constraints, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1986, Volume 155, 7–17

А.М.Вершик, В.Я.Гершкович

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ПОТОК НА $SL(2,\mathbb{R})$ С НЕГОЛОНОМНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

I. Введение. В этой работе изучается поведение геодезических на группе $SL(2,\mathbb{R})$, снабженной левоинвариантной метрикой, при наличии левоинвариантной неинтегрируемой (неголономной) связи. Общая теория таких потоков строится в [I,7] . Имеется в виду поток вариационных геодезических, т.е. кратчайших. В неголономном случае его нужно отличать от потока "прямейших" - геодезических в смысле усеченной связности [7] . Последний поток определяет динамическую систему в подрасслоении и является математическим эквивалентом механической системы с линейными связями. Первый же поток определен в так называемом смешанном распределении; он фактически не изучался с позиций теории динамических систем. Рассматриваемый ниже пример интересен еще и потому, что в нем гиперболичность, знакомая по обычному геодезическому потоку на поверхностях постоянной отрицательной кривизны, появляется несколько иначе, хотя причина в обоих случаях связана со структурой $SL(2,\mathbb{R})$ (см.п.IO).

2. Кратчайшие и уравнение Эйлера - Лагранжа. Пусть на группе $SL(2,\mathbb{R})$ задана левоинвариантная риманова метрика ρ и двумерное неголономное левоинвариантное распределение V . Левоинвариантное распределение на группе Ли G задается линейным подпространством v в ее алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и получается разнесением подпространства v с помощью левых сдвигов; неголономность означает, что наименьшая алгебра Ли, содержащая v , совпадает с $\mathfrak{g}$, в случае трехмерной группы Ли и двумерного распределения это просто означает, что $\mathfrak{g} = [v, v] + v$.

Кривая $\gamma: \mathbb{R}^1 \to G$ называется допустимой (относительно распределения V) если $\dot{\gamma} \in V$. Для любых двух точек x, $y \in G$ существует соединяющая их кратчайшая кривая γ , допустимая относительно неголономного распределения V (см. [I,2,7]). Кривая γ есть решение условной вариационной задачи на $SL(2,\mathbb{R})$, лагранжианом которой служит функционал длины: $x, y \in SL(2,\mathbb{R})$;

$$\inf_{\gamma \in S} \int_0^1 \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}(t) \rangle dt, \quad S = \{\gamma \mid \dot{\gamma} \in V, \gamma(0) = x, \gamma(1) = y\}. \quad (I)$$

Легко видеть, что экстремали этой условной задачи, т.е.

кратчайшие удовлетворяют следующему уравнению Эйлера - Лагранжа

$$\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma = \dot\lambda\omega + \lambda(\dot\gamma \lrcorner d\omega), \tag{2}$$

где ∇ ковариантная производная метрической связности на $SL(2,\mathbb{R})$, λ - множитель Лагранжа, ω - I-форма, аннулирующая распределение V; $(\dot\gamma \lrcorner d\omega)$ - I - форма, значение которой на векторном поле ξ определяется формулой $(\dot\gamma \lrcorner d\omega)\xi = d\omega(\dot\gamma, \xi)$. Здесь и далее мы отождествляем векторные поля и 1-формы с помощью метрического тензора.

Заметим, что уравнение (2) является дифференциальным по λ, поэтому начальными данными неголономной геодезической, выходящей из точки x, являются:

I) начальная скорость $v \in V_x$

2) начальное значение множителя Лагранжа λ, т.е. 1-форма из $V_x^\perp$ - аннулятора V_x.

3. Уравнения Эйлера - Лагранжа в ортогональном репере. Уравнения неголономных геодезических на группе Ли удобно записывать в базисе ортонормированных векторных полей. Пусть ξ_1, ξ_2 базис ортонормированных векторных полей распределения V. Поскольку распределение V неголономно, $[\xi_1, \xi_2] \notin V$. Заметим, что решение условной вариационной задачи зависит лишь от ограничения метрического тензора на распределение. Заменив тензор g на $\tilde g$-такой, что $g|_V = \tilde g|_V$, мы можем считать, что $[\xi_1, \xi_2] \perp V$. Отождествим ω с $[\xi_1, \xi_2] \equiv \xi_3$.

Поскольку $\dot\gamma \in V$, имеем $\dot\gamma = v_1\xi_1 + v_2\xi_2$; подставим выражение для $\dot\gamma$ в (2) и спроектируем векторное уравнение (2) на каждое из трех ортогональных направлений ξ_1, ξ_2, ξ_3. Получаем

$$\left\{\begin{aligned} \dot v_1 &= -\lambda v_2 + v_1 v_2 \langle \nabla_{\xi_1}\xi_2 + \nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_1\rangle \\ \dot v_2 &= \lambda v_1 + v_1 v_2 \langle \nabla_{\xi_1}\xi_2 + \nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_2\rangle \\ \dot\lambda &= \lambda\langle[\dot\gamma, \xi_3], \xi_3\rangle + v_1^2\langle \nabla_{\xi_1}\xi_1, \xi_3\rangle + \end{aligned}\right. \tag{3}$$

$$+ v_2^2\langle\nabla_{\xi_2}\xi_2, \xi_3\rangle + v_1 v_2\langle\nabla_{\xi}\xi_2 + \nabla_{\xi_2}\xi_1, \xi_3\rangle .$$

Замечание. Мы воспользовались формулой Маурера - Картана[4].

$$(\dot\gamma \lrcorner d\omega)(\xi) \equiv d\omega(\dot\gamma, \xi) = \omega([\dot\gamma, \xi]) - \dot\gamma\,\omega(\xi) + \xi\,\omega(\dot\gamma);$$

поскольку 1-форма ω и векторные поля $\dot{\gamma}$, ξ – левоинвариантны, $\omega(\dot{\gamma}) = const\, \omega(\xi) = const$, и $\dot{\gamma}\omega(\xi) = \xi\omega(\dot{\gamma}) = 0$.

4. Неголономный геодезический поток. Редукция.

Дифференциальное уравнение

$$\dot{\gamma} = v_1 \xi_1 + v_2 \xi_2 \tag{4}$$

вместе с системой (3) определяет неголономный геодезический (НГ) поток в расслоении над $SL(2,\mathbb{R})$, слоем которого над каждой точкой $x \in SL(2,\mathbb{R})$ будет прямая сумма $V \oplus V^{\perp}$ распределения V и его аннулятора $V^{\perp}$ в пространстве 1-форм (см. п.3; общий случай и более подробное изложение см. в [I,7]). Расслоение $V \oplus V^{\perp}$ мы будем называть смешанным расслоением и обозначать Ken_V („кентавр") . Смешанное расслоение над группой Ли параллелизуемо

$$Ken_V\, SL(2,\mathbb{R}) = SL(2,\mathbb{R}) \times (v \oplus v^{\perp}) .$$

Поскольку уравнения системы (3) имеют постоянные коэффициенты, они определяют поток на $v \oplus v^{\perp}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ I (редукция для НГ-потоков). НГ – поток как динамическая система на $SL(2,\mathbb{R}) \times v \oplus v^{\perp}$ – есть косое произведение: поток на базе $v \oplus v^{\perp}$ определен системой (3)); типовой слой есть $SL(2,\mathbb{R})$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение о редукции непосредственно переносится на НГ – поток на однородном пространстве $SL(2,\mathbb{R})$, то есть факторгруппе $SL(2,\mathbb{R})$ по дискретной подгруппе $\mathfrak{D}$. Базой НГ – потока на однородном пространстве по-прежнему будет $v \oplus v^{\perp}$, слоем $SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}$. Поток на базе рассмотрен в п.7.

5. Интеграл энергии. Начиная с этого места, будем использовать интеграл энергии, т.е. условие $|\dot{\gamma}| = const$, или $v_1^2 + v_2^2 = const$. Это условие выделяет инвариантное подмногообразие $SL(2,\mathbb{R}) \times (S^1 \oplus V^{\perp})$ в смешанном расслоении. Уравнения неголономных геодезических при этом существенно упрощаются.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для неголономной геодезической γ, удовлетворяющей условию $|\dot{\gamma}| = 1$, выполнены следующие соотношения

$$\langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1 , \quad \xi_1 \rangle = 0$$

$$\langle \nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1 , \quad \xi_2 \rangle = 0 .$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим первое уравнение системы (3) на v_1, второе на v_2 и сложим. Получаем

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{v_1^2+v_2^2}{2}\right)=v_1v_2<\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1, v_1\xi_1>+$$

$$+v_1v_2<\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1, v_2\xi_2>=v_1v_2<\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1,\dot\gamma> .$$

Таким образом, постоянный вектор $\psi=\nabla_{\xi_1}\xi_2+\nabla_{\xi_2}\xi_1$ ортогонален $\dot\gamma(t)$ для любой неголономной геодезической γ, отсюда $\psi\perp V$.

Система дифференциальных уравнений (3) приобретает следующий вид

$$\begin{cases}\dot v_1= & -\lambda v_2\\ \dot v_2=\lambda v_1 & \\ \dot\lambda=\lambda(v_1c_{13}^3+v_2c_{23}^3)-(v_1^2c_{13}^3+v_2^2c_{23}^2)+v_1v_2(c_{13}^2+c_{23}^1), & \end{cases}\qquad(5)$$

где $c_{ij}^k=([\xi_i,\xi_j],\xi_k>$ – структурные константы; мы воспользовались здесь предложением 2 и выражением символов Кристофеля $\Gamma_{ij}^k=<\nabla_{\xi_j}\xi_i,\xi_k>$ через структурные константы (см.[5]).

Поскольку $v_1^2+v_2^2=1$, положим $v_1=\cos\varphi(t)$, $v_2=\sin\varphi(t)$, $\varphi(t)\in S^1$, мы получим систему дифференциальных уравнений на цилиндре $S^1\oplus V^\perp\simeq S^1\times\mathbb{R}^1$, определяющих неголономные геодезические

$$\begin{cases}\dot\varphi=\lambda\\ \dot\lambda=\lambda(c_{13}^3\cos\varphi+c_{23}^3\sin\varphi)-(c_{13}^1\cos^1\varphi+c_{23}^2\sin^2\varphi)+\end{cases}\qquad(6)$$

$$+\frac{1}{2}(c_{13}^2+c_{23}^1)\sin 2\varphi .$$

6. <u>Левоинвариантные неголономные распределения на $SL(2,\mathbb{R})$ и метрические тензоры на них</u>. Структурные константы, входящие в последнее уравнение системы (6), определяются неголономным распределением V и метрическим тензором на V; в этом пункте мы дадим их классификацию. Динамическую систему, порожденную НГ-потоком на $SL(2,\mathbb{R})$ с ограничением V и метрическим тензором g, обозначим $T(V,g)$. Пусть $\mu\in Aut\, sl(2,\mathbb{R})$ – группа автоморфизмов алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$; тогда $\mu T(V,g)=$

$= T(\mu V, \mu g)$, поэтому мы будем изучать орбиты распределений и метрических тензоров на них относительно действия группы автоморфизмов $sl(2,\mathbb{R})$. В алгебре Ли $sl(2,\mathbb{R})$ – алгебре (2x2)-матриц с нулевым следом имеется естественный линейный базис:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Множество неголономных левоинвариантных двумерных распределений на $SL(2,\mathbb{R})$-есть объединение двух орбит относительно действия группы $Aut\, sl(2,\mathbb{R})$. Представителями орбит являются распределения $v_1 = Lin(\eta_1+\eta_2, \eta_1-\eta_2)$ и $v_2 = Lin(\eta_3, \eta_1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непосредственно проверяется, что всякое распределение

$$v = Lin(a_1\eta_1 + a_2\eta_2 + a_3\eta_3,\ b_1\eta_1 + b_2\eta_2 + b_3\eta_3),$$

либо переводится автоморфизмом $sl(2,\mathbb{R})$ в одно из распределений v_1 или v_2, либо интегрируемо.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пространство орбит левоинвариантных метрических тензоров относительно группы автоморфизмов $sl_2\mathbb{R}$ для каждого из двух (классов) распределений изоморфно $\mathbb{R}_+$. (Представителем класса $m \in \mathbb{R}_+$ является метрический тензор, заданный матрицей $g_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ в базисе распределений, указанном в предложении 3).

7. <u>Движение на базе косого произведения</u>. Предложения 3 и 4 дают возможность вычислить структурные константы, входящие в последнее уравнение системы (6). Получаем

$$\begin{cases} \dot\varphi = \lambda \\ \dot\lambda = f(m)\sin 2\varphi, \end{cases} \tag{7}$$

где

$$f(m) = \begin{cases} 2 - 2m^{-1} & \text{для распределения } V_1 \\ 2 + 2m & \text{для распределения } V_2 \end{cases}$$

m – параметр метрического тензора.

Опишем фазовый портрет системы (7) на цилиндре $S^1 \times R^1$. Выделим "особый" случай $m=1$ для распределения V_1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. В неособом случае (7) есть уравнения маятника. Фазовый портрет системы (7) на цилиндре описывается следующим образом.

I) Имеются четыре неподвижные точки z_i , $i = 0,1,2,3$, $z_i = (\varphi_i, 0)$, $\varphi_i = \frac{2\pi i}{4}$.

2а. Для распределения V_2 , а также для распределения V_1 при $m > 1$, точки z_1 и z_3 соединены четырьмя сепаратрисами.

2в. Для распределения V_1 при $m < 1$ четырьмя сепаратрисами соединены точки z_0 и z_2 .

3. Все траектории, отличные от неподвижных точек и сепаратрис, являются периодическими.

Периодические траектории образуют четыре семейства траекторий, непрерывно зависящих от параметра: τ :

(I-2) α_τ^+ (α_τ^-) – траектории в верхней (нижней) части цилиндра

(3-4) β_τ^+ (β_τ^-) – траектории обходящие неподвижную точку z_0 (z_2) для распределения V_1 и $m > 1$; и неподвижную точку z_1 (z_3) – в остальных случаях.

В качестве параметра τ можно взять значение множителя Лагранжа на прямой $\varphi \equiv \frac{\pi}{2}$ для распределения V_1 и $m > 1$ и $\varphi \equiv 0$ – в остальных случаях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. В особом случае $(V_1, m=1)$ портрет системы (7) описывается следующим образом $V_1, m=1)$

I) Все точки окружности, заданной условием $\lambda = 0$, являются неподвижными.

2) Все остальные траектории системы (7) замкнуты.

В особом случае замкнутые траектории образуют два семейства: α_τ^+ и α_τ^- .

ЗАМЕЧАНИЕ. Легко указать зависимость периода T_τ траектории α_τ от параметра τ . Пусть значение параметра τ_0 соответствует сепаратрисе. Тогда

I) $T_\tau \to \infty$ при $\tau \to \tau_0$.

2) $T_\tau \to 0$, $\tau \to \pm\infty$, более точно, $T_\tau \sim \frac{1}{|\tau|}$.

3) $T_\tau \to \sqrt{2|f(m)|}$ при $\tau \to 0$.

8. <u>Инвариантные компоненты. Отображение монодромии</u>. Результаты предыдущего пункта показывают, что множества уровня интеграла энергии – $SL(2,\mathbb{R}) \times (S^1 \times R^1)$ разбиваются в объединение трехмерных и четырехмерных инвариантных множеств. Перечислим их:

I–2) $\alpha_\tau^\pm \times SL(2,\mathbb{R})$

3–4) $\beta_\tau^\pm \times SL(2,\mathbb{R})$

5) $h_i \times SL(2,\mathbb{R})$, $i = 1,2,3,4$ (h_i - сепаратрисы системы (7);

6) $z_i \times SL(2,\mathbb{R})$, $i = 0,1,2,3$; . $\{z_i\}$ - набор неподвижных точек системы (7). Наша задача теперь - описать движение в слое косого произведения, т.е. на группе $SL(2,\mathbb{R})$. Начнем со случая движения над периодической траекторией на базе. Пусть $\varkappa(\cdot)$ одна из периодических траекторий на цилиндре $S^1 \times R^\perp$, τ ее период. Движение в слое - на группе $SL(2,\mathbb{R})$ задается уравнением

$$\gamma^{-1}\dot{\gamma} = \varkappa(t) \tag{8}$$

(см.п.4). Теорема Флоке ([8]) показывает, что отображение сдвига вдоль траекторий дифференциального уравнения (8) за время, равное периоду τ траектории $\varkappa(\cdot)$, не зависит от выбора начального момента времени, иначе говоря, для любых двух неголономных геодезических γ_1 и γ_2, выходящих из точки $x \in SL(2,\mathbb{R})$, таких, что их начальные данные (φ_1, λ_1) и (φ_2, λ_2) лежат на одном и том же периодическом решении системы (7) на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^\perp$, справедливо равенство $\gamma_1(\tau) = \gamma_2(\tau)$. Отображение $\Gamma: SL(2,\mathbb{R}) \circlearrowleft$, сопоставляющее точке x точку $\gamma(\tau)$, где $\gamma(\cdot)$ неголономная геодезическая, выходящая из точки x с начальными данными, лежащими на периодической траектории $\varkappa$, назовем <u>отображением монодромии</u>. Отображение монодромии есть правый сдвиг на $SL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma = R_{g_\varkappa}$, $g_\varkappa \in SL(2,\mathbb{R})$. Обозначим через $z_\tau^\pm$ элемент $g_{\alpha_\tau^\pm}$, через $y_\tau^\pm$ элемент $g_{\beta_\tau^\pm}$. Отображение монодромии, таким образом, позволяет описать динамику в слое. При обходе окружности $\alpha_\tau^\pm$ (или $\beta_\tau^\pm$) точка слоя $x \in SL(2,\mathbb{R})$ умножается справа на $z_\tau^\pm$ (или $y_\tau^\pm$). Для более полного описания динамики нам потребуется информация об элементах z_τ и y_τ.

9. <u>Подмногообразие монодромии</u>. Множество точек $\mathfrak{M} = \{z_\tau\} \cup \cup \{y_\tau\}$ - одномерное подмногообразие (с особенностями) в $SL(2,\mathbb{R})$, которое мы будем называть подмногообразием монодромии. Опишем его. Напомним, что элемент q алгебры Ли $sl(2,\mathbb{R})$ называется

I) гиперболическим, если q имеет вещественные собственные числа разных знаков,

2) параболическим, если q имеет нулевые собственные числа,

3) эллиптическим, если собственные числа q – комплексные.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть на $SL(2,\mathbb{R})$ задано распределение V_1 и левоинвариантная метрика, определенная тензором $g_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix}$ с $m \neq 1$. Тогда подмногообразие монодромии $\mathcal{M}$ есть объединение трех непересекающихся компонент

I) $\{z_\tau\}_{\tau \in \mathbb{R}^1}$ – однопараметрическая подгруппа в $SL(2,\mathbb{R})$ с гиперболическим генератором η_3 (гомеоморфная $\mathbb{R}$).

2) $\{y^+_\tau\}$ – луч на однопараметрической подгруппе с параболическим генератором $\xi = \frac{\eta_1+\eta_2}{2}$ или $\xi = \frac{\eta_1-\eta_2}{2}$, $y^+_\tau \in \{exp\, t_\xi, t > T_0\}$ – параболичен.

3) $\{y^-_\tau\}$ – луч на той же однопараметрической подгруппе, $y^-_\tau \in \{exp\, t_\xi, t < -T_0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть на $SL(2,\mathbb{R})$ задано распределение V_1 и левоинвариантная метрика с тензором $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathcal{M}$ есть однопараметрическая подгруппа в $SL(2,\mathbb{R})$ с гиперболическим генератором.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8. Пусть на $SL(2,\mathbb{R})$ задано распределение V_2 и произвольная левоинвариантная метрика. Тогда подмногообразие монодромии $\mathcal{M}$ есть несвязное объединение трех компонент

I) – однопараметрической подгруппы $\{z_\tau\} \in SL(2,\mathbb{R})$ с эллиптическим генератором $\eta_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ (гомеоморфной окружности).

2) $\{y^+_\tau\}$ на однопараметрической подгруппе с генератором η_3,

$$y^+_\tau \in \{exp\, t\eta_3,\ t > T_0\}$$

3) $\{y^-_\tau\}$ на той же однопараметрической подгруппе $y^-_\tau \in \{exp\, t\eta_3,\ t < -T_0\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Отображение монодромии дает возможность сразу получить описание НГ-потока на односвязной накрывающей $SL(2,\mathbb{R})$ – группе Ли – $\widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$, гомеоморфной $\mathbb{R}^3$. НГ-поток в этом случае с динамической точки зрения устроен тривиально: на базе обход окружности, на слое каждый обход окружности – правый сдвиг на элемент $h \in \widetilde{SL(2,\mathbb{R})}$ и, таким образом, все "траектории" уходят на бесконечность. Интерес, как обычно, представляет динамика на компактных однородных пространствах, к описанию которой мы переходим.

10. <u>Связь НГ-потока на $SL(2,\mathbb{R})$ с потоками на плоскости Лобачевского</u>. Пусть $\mathfrak{D}$ дискретная подгруппа $SL(2,\mathbb{R})$ такая, что $X = SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}$ – компактно. Мы опишем НГ-поток T на X. Как сказано выше (п.8), фазовое пространство НГ-потока распадается на четырехмерные и трехмерные инвариантные множества:

(1-2) $X \times \alpha_\tau^\pm$ (3-4) $X \times \beta_\tau^\pm$

(5) $X \times h_i$ (6) $X \times z_i$.

Определим на $(X \times \alpha_\tau^\pm)$, $(X \times \beta_\tau^\pm)$ меру $\mu = \chi \times \frac{d\varphi}{\lambda}$, где χ – мера Хаара на $SL(2,\mathbb{R})$, $d\varphi$ – равномерная мера на окружности S^1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Мера μ инвариантна относительно НГ-потока T на каждой из компонент $(X \times \alpha_\tau^\pm)$ и $(X \times \beta_\tau^\pm)$.

Поток T на четырехмерной компоненте $(X \times \alpha_\tau^\pm)$, $(X \times \beta_\tau^\pm)$ тесно связан с классическими потоками на плоскости Лобачевского. Напомним (см. [6]), что динамическая система Φ на $SL(2,\mathbb{R})$, порожденная сдвигом вдоль однопараметрической подгруппы с генератором $u \in sl(2,\mathbb{R})$

$$\Phi_u^t(x) = x \exp tu$$

естественно изоморфна с

а) геодезическим потоком на плоскости Лобачевского, если u – гиперболичен,

б) орициклическим потоком на плоскости Лобачевского, если u – параболичен.

Если u эллиптичен, то поток, определенный Φ^t – цикличен. Связь НГ – потока T с описанным выше потоком Φ основана на наличии у них общего каскада. Действительно, пусть T_τ период траектории α_τ (обозначим его $\tilde{t} = T_\tau$) и пусть z_τ соответствующий элемент подмногообразия монодромии. Тогда

$$T^{\tilde{t}}\Big|_{X \times \alpha_\tau} = \Phi^1_{\log z_\tau}.$$

Таким образом, потоки T и $\Phi_{\log z_\tau}$ имеют общий каскад. Свойства потока Φ описываются следующей классической теоремой [6].

ТЕОРЕМА. I. Геодезический поток на плоскости Лобачевского эргодичен и является K -системой.

2. Орициклический поток эргодичен.

Мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9. Пусть $\mathfrak{D}$ кокомпактная подгруппа $SL(2,\mathbb{R})$, $X = SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}$, $\alpha^{\pm}_{\tau}, \beta^{\pm}_{\tau}$ – решение системы (7) на цилиндре $S^1 \times \mathbb{R}^1$, z_τ, y_τ – соответствующий элемент подмногообразия монодромии. Тогда

I) Если $\log z_\tau$, $\log y_\tau$ гиперболичен, то поток T эргодичен на $X \times \alpha_\tau$, $X \times \beta_\tau$.

2) Если $\log z_\tau$ параболичен, то поток T эргодичен на $X \times \beta_\tau$.

3) Если $\log z_\tau$ эллиптичен, то $X \times \alpha_\tau$, $X \times \beta_\tau$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

I-2) Покажем, что из эргодичности каскада $\{T^{n\hat{t}}\} = \{\Phi^n_{\log z_\tau}\}$, $n \in \mathbb{Z}$, $T^{n\hat{t}} : SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D} \to SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}$ следует эргодичность потока T^t на $SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D} \times \alpha_\tau$. Действительно, если Y инвариантное множество потока T^t, то пересечение Y с каждым из слоев $SL(2,\mathbb{R}) \times \varphi_0$, есть инвариантное множество каскада, а значит, его мера Хаара равна 0 или I. Остается заметить, что меры всех таких пересечений равны между собой.

3) Если z_τ эллиптичен, то траектория в слое периодична; если периоды траекторий на базе и в слое соизмеримы, то это окружность, если нет, то всюду плотная обмотка двумерного тора.

II. <u>НГ-поток на компактных однородных пространствах</u>

Предложение 9 позволяет описать НГ-поток на каждой из неприводимых компонент, указанных в п.8.

ТЕОРЕМА I (об НГ-потоке на $\left(SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}, V_1\right)$). Пусть на $(SL(2,\mathbb{R}), V_1)$ задана левоинвариантная метрика g_m (с $m \neq 1$). Тогда НГ-поток эргодичен на каждой из инвариантных компонент $SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D} \times \alpha^{\pm}_{\tau}$, $SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D} \times \beta^{\pm}_{\tau}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Траектории, соответствующие неподвижным точкам на базе, всюду плотны на слое $SL(2,\mathbb{R})/\mathfrak{D}$, а траектории, соответствующие точкам сепаратрис, к ним неограниченно приближаются.

Случай метрики, соответствующей параметру $m = 1$ описывает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ IO. Пусть на $(SL(2,\mathbb{R}), V_1)$ задана левоинвариантная

тная метрика, соответствующая параметру $m = 1$. Тогда на каждой компоненте $(SL(2,\mathbb{R}), \mathcal{D})$ НГ-поток эргодичен.

ЗАМЕЧАНИЕ. Траектории, соответствующие неподвижным точкам (всем точкам окружности $\lambda = 0$, см.п.7), есть однопараметрические подгруппы h_φ с генераторами $\begin{pmatrix} 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi \in S^1$.

Подгруппа h_φ всюду плотна на $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D}$ при $\sin 2\varphi \geq 0$ периодична при $\sin 2\varphi < 0$.

ТЕОРЕМА 2 (Об НГ-потоке для $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D}, V_2$). Пусть на $SL(2,\mathbb{R})$ задано распределение V_2, $\mathcal{D}$ – равномерная подгруппа $SL(2,\mathbb{R})$. Тогда

I) Каждое из множеств $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D} \times \alpha_\tau$ распадается в объединение двумерных и одномерных инвариантных торов.

2) НГ-поток эргодичен на каждой из компонент $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D} \times \beta_\tau$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Однопараметрические подгруппы $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D} \times z_i$ всюду плотны в $SL(2,\mathbb{R})/\mathcal{D}$.

Литература

I. В е р ш и к А.М., Г е р ш к о в и ч В.Я. Неголономные динамические системы. Геометрия распределений и вариационные задачи. В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Динамические системы. -7. М.: ВИНИТИ, I986.

2. Г р и ф ф и т с П. А Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. - М., I986.

3. F r a n k l i n P., M o o r e C.L.E. Geodesics of Pfaffians. - Journ. of Math. and Phys., 1931, v.10, p.157-190.

4. С т е р н б е р г С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., I970.

5. Д у б р о в и н Б.А., Н о в и к о в С.П., Ф о м е н к о А.Т. Современная геометрия. М., I979.

6. К о р н ф е л ь д И.П., С и н а й Я.Г., Ф о м и н С.В. Эргодическая теория. М., I980.

7. В е р ш и к А.М., Г е р ш к о в и ч В.Я. Неголономные задачи и геометрия распределений. Дополнение к книге: Гриффитс П.А. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. М., I986.

8. Л е ф ш е ц С. Геометрическая теория дифференциальных уравнений. М., I965.