Ю. Е. Шелудяк, В. А. Рабинович, О зависимости критических показателей от размерности пространства и числа компонентов параметра порядка, *ТВТ*, 1993, том 31, выпуск 6, 915–919

УДК 536.425/44

О ЗАВИСИМОСТИ КРИТИЧЕСКИХ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОТ РАЗМЕРНОСТИ ПРОСТРАНСТВА И ЧИСЛА КОМПОНЕНТОВ ПАРАМЕТРА ПОРЯДКА

© 1993 г. **Ю. Е. Шелудяк, В. А. Рабинович**

НИИПХ, ВНИЦСМВ Госстандарта Российской Федерации

Поступила в редакцию 25.06.93 г.

Получены уравнения, описывающие с высокой точностью современные оценки критических показателей в области изменения размерности пространства d от 1 до 4 и числа компонентов параметра порядка n от 0 до ∞.

В соответствии с современной теорией критических явлений значения критических показателей определяются размерностью системы d и числом компонентов параметра порядка n [1]. Полученные к 1984 г. теоретические оценки значений критических показателей при $d = 2$; 3; 4 и $n = 1$; 2; 3 в пределах указанной авторами погрешности воспроизводят предложенные в работе [2] формулы

$$\eta = \frac{4-d}{d^3+d^2-4}, \tag{1}$$

$$\nu = \frac{2}{d} + \frac{(d-2)\,(d-4)\,(2-n)}{d^3}. \tag{2}$$

Выражения для остальных критических показателей можно получить из (1) и (2), используя соотношения масштабной теории [3]

$$\alpha = 2 - d\nu, \tag{3}$$

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta), \tag{4}$$

$$\gamma = \nu(2-\eta), \tag{5}$$

$$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta}. \tag{6}$$

В последующие годы проведен ряд новых работ по определению критических показателей [4 - 8], охватывающих область от $n = 0$ до $n = 3$ и от $d = 1$ до $d = 4$, причем получены значения критических показателей и при нецелочисленных значениях размерности d.

В табл. 1 для трехмерных систем $d = 3$ с однокомпонентным параметром порядка $n = 1$ сопоставлены новые оценки значений критических показателей со средними значениями оценок критических показателей, полученных к 1984 г. В скобках приведены значения критических показателей, вычисленные по соотношениям (3) - (6) на основании оценок авторов. Новые оценки ν и η несколько выше значений, рассчитанных по уравнениям (1) и (2). Наиболее значительно изменились оценки показателя η, увеличившиеся почти на 0.01, тогда как увеличение ν составляет всего лишь 0.001.

Наряду с вытекающим из формулы (1) значением $\nu = 17/27$, хорошим приближением к теоретическим оценкам критического показателя ν при $d = 3$ и $n = 1$ является число Кантора $\ln 2/\ln 3$ – размерность множества точек, получаемого последовательным разбиением отрезка на три равные части и выбрасыванием средней части [9, 10]. Если записать число Кантора в виде

$$\nu = \ln 2/\ln d, \tag{7}$$

то полученная формула воспроизводит также точные значения критического показателя при $d = 4$, $\nu = 1/2$; при $d = 2$, $\nu = 1$ и дает правильную асимптомику при $d \longrightarrow 1$, $\nu \longrightarrow \infty$. Формулу (7) можно также записать в виде

$$d = 2^{1/\nu}. \tag{8}$$

Более точно новые оценки критического показателя η при $d = 3$ и $n = 1$ передает формула

$$\eta = \left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2. \tag{9}$$

Формула (9), как и формула (7), воспроизводит точные значения критического показателя при $d = 4$ $\eta = 0$, при $d = 2$ $\eta = 1/4$ и при $d = 1$ $\eta = 1$.

Используя соотношения (3) - (6), получим из уравнений (7) и (9) следующие выражения для зависимостей остальных критических показателей систем с однокомпонентным параметром порядка от размерности пространства:

$$\alpha = 2 - d\ln 2/\ln d, \tag{10}$$

$$\beta = \frac{\ln 2}{2\ln d}\left[d-2+\left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2\right], \tag{11}$$

Таблица 1. Теоретические оценки значений критических показателей для трехмерных систем с однокомпонентным параметром порядка

Источник данных; расчетные формулы	α	β	γ	δ	ν	η
[2]	0.1120 ± 0.0012	0.3245 ± 0.0005	1.2390 ± 0.0010	4.818 ± 0.005	0.6293 ± 0.0005	0.0312 ± 0.0007
(1, 2)	0.1111	0.3247	1.2396	4.818	0.6296	0.03125
[4]	(0.1085)	0.3265 ± 0.0025	1.2390 ± 0.0040	(4.786)	0.6305 ± 0.0025	0.037 ± 0.003
[5]	(0.1070)	0.3270 ± 0.0015	1.2390 ± 0.0025	(4.783)	0.6310 ± 0.0015	0.0375 ± 0.0025
[6]	(0.104)	(0.3285)	1.239 ± 0.003	(4.772)	$0.632^{+0.002}_{-0.003}$	(0.0396)
(7, 9)	0.1072	0.3281	1.2366	4.769	0.6309	0.04

$$\gamma = \frac{\ln 2}{\ln d}\left[2 - \left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2\right], \tag{12}$$

$$\delta = \left[d+2-\left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2\right] \Big/ \left[d-2+\left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2\right]. \tag{13}$$

В табл. 2 сопоставлены рассчитанные по формулам (7), (9) и (11), (12) значения критических показателей с оценками работы [5], полученными специальным методом суммирования рядов ε-разложения. Начиная с $d = 3.25$, расчетные значения критических показателей согласуются с оценками [5] в пределах их погрешности.

При $d = 1$ формула (11) обращается в неопределенность вида [0/0]. Раскрывая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\lim_{d \to 1} \beta = -\ln 2/6,$$

что отличается от предполагаемого в [5] значения $\beta = 0$ при $d = 1$.

Формулы (7) и (9) - (13) можно записать также в виде функции параметра $\varepsilon = 4 - d$. В частности, из формул (7) и (9) получим

$$\nu = \frac{1}{2}\Big/\left[1 + \frac{1}{2\ln 2}\ln\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{16\ln 2}\varepsilon + \frac{1}{128\ln 2}\left(1 + \frac{1}{\ln 2}\right)\varepsilon^2 + \ldots, \tag{14}$$

$$\eta = \frac{1}{36}\varepsilon^2\Big/\left(1 - \frac{\varepsilon}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}\varepsilon^2 - \frac{1}{108}\varepsilon^3 + \ldots, \tag{15}$$

тогда как из ε-разложения Вильсона [1] следует

$$\nu = \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\varepsilon + \frac{7}{162}\varepsilon^2 - \ldots, \tag{16}$$

$$\eta = \frac{1}{54}\varepsilon^2 + \frac{109}{5842}\varepsilon^3 - \ldots . \tag{17}$$

Ввиду различия первых членов рядов (14), (16) и (15), (17), при малых ε наблюдаются систематические отклонения рассчитанных по формулам (7) и (9) - (13) значений критических показателей от оценок [5]. Максимальное отклонение наблюдается для показателя β при $d = 3.5$ $\Delta\beta = 0.003544$.

Простые аппроксимационные формулы можно также подобрать и для зависимости критических показателей от числа компонентов параметра порядка. Как видно из приведенных в табл. 3 данных [4], в пределах погрешности оценок критический показатель η не зависит от n, а разность критических показателей ν для соседних значений n близка к η. Поэтому оценки значений критического показателя ν при различных d и n можно воспроизвести уравнением

$$\nu = \frac{\ln 2}{\ln d} + (n-1)\left(\frac{4-d}{2+d}\right)^2, \tag{18}$$

а остальные критические показатели вычисляются по уравнению (9) и соотношениям (3) - (6).

Однако для описания критических показателей сферической модели, соответствующей $d = 3$ и $n = \infty$, формулы для $\eta(d, n)$ и $\nu(d, n)$ должны давать $\eta = 0$ и $\nu = 1$ при $n \longrightarrow \infty$ [11]. Можно предложить следующее видоизменение формул (7) и (9), обес-

Таблица 2. Сопоставление рассчитанных по формулам (7), (9), (11), (12) значений критических показателей (первая строка) с оценками [5] (вторая строка), третья строка – погрешность оценок [5]*

d	γ	ν	β	η
4	1	0.5	0.5	0
3.75	1.047639	0.524414	0.459457	0.002268
	1.046060	0.523405	0.458355	0.001435
	±0.000030	±0.000015	±0.000020	±0.000010
3.5	1.10202	0.55329	0.41954	0.008264
	1.10055	0.55215	0.41600	0.00685
	±0.00035	±0.00020	±0.00020	±0.00020
3.25	1.1642	0.5881	0.3736	0.0204
	1.1642	0.5873	0.3723	0.0180
	±0.0015	±0.0010	±0.0010	±0.0010
3	1.2366	0.6309	0.3281	0.04
	1.2390	0.6310	0.3270	0.0375
	±0.0025	±0.0015	±0.0015	±0.0025
2.75	1.3229	0.6852	0.2807	0.0693
	1.328	0.686	0.2800	0.067
	±0.005	±0.003	±0.0030	±0.006
2.5	1.4289	0.7565	0.2311	0.1111
	1.436	0.758	0.2305	0.11
	±0.008	±0.005	±0.0030	±0.01
2.25	1.5646	0.8548	0.1793	0.1696
	1.571	0.857	0.1790	0.17
	±0.010	±0.005	±0.0025	±0.01
2	1.75	1	0.125	0.25
1.875	1.8737	1.1027	0.0969	0.3007
	1.862	1.10	0.097	0.30
	±0.015	±0.01	±0.003	±0.03
1.75	2.0313	1.2386	0.0681	0.36
	1.99	1.23	0.068	0.35
	±0.04	±0.03	±0.006	±0.05
1.65	2.1945	1.3841	0.0447	0.4145
	2.11	1.37	0.045	0.40
	±0.08	±0.07	±0.010	±0.10
1.5	2.5468	1.7095	0.00872	0.5102
	2.35	1.65	0.010	0.50
	±0.20	±0.20	±0.015	±0.15
1.375	3.0365	2.1766	−0.0218	0.6049
	2.6	2.1	−0.02	0.55
	±0.4	±0.5	±0.03	±0.25
1.25	3.9885	3.1063	−0.05284	0.7160
	3.0	3.0	−0.05	0.65
	±1.0	±1.5	±0.05	±0.35
1	∞	∞	−0.11552	1
	∞	∞	0	1

* Для $d = 4$ и $d = 2$ указаны точные значения критических показателей.

Таблица 3. Сопоставление рассчитанных по формулам (9, 18) (первая строка) и (19, 20) (вторая строка) значений критических показателей с оценками [4] (третья строка), четвертая строка – погрешность оценок [4]

d	n	γ	ν	β	η
2	0	1.3125	0.75	0.09375	0.25
		1.3475	0.7565	0.08274	0.21875
		1.39	0.76	0.065	0.21
		±0.04	±0.03	±0.015	±0.05
2	1	1.75	1	0.125	0.25
		1.75	1	0.125	0.25
		1.73	0.99	0.120	0.26
		±0.03	±0.04	±0.015	±0.05
3	0	1.1582	0.5909	0.3073	0.04
		1.1293	0.5757	0.2989	0.0385
		1.160	0.5885	0.3025	0.031
		±0.004	±0.0015	±0.0025	±0.003
3	1	1.2366	0.6309	0.3281	0.04
		1.2366	0.6309	0.3281	0.04
		1.239	0.6305	0.3265	0.037
		±0.004	±0.0025	±0.0025	±0.003
3	2	1.3150	0.6709	0.3489	0.04
		1.3204	0.6732	0.3496	0.0387
		1.315	0.671	0.3485	0.040
		±0.007	±0.005	±0.0035	±0.003
3	3	1.3934	0.7109	0.3697	0.04
		1.3883	0.7067	0.3659	0.0356
		1.390	0.710	0.368	0.040
		±0.010	±0.007	±0.004	±0.003

печивающее правильный переход к значениям критических показателей сферической модели:

$$\eta = \left(\frac{4-d}{d+2}\right)^2 \frac{2n-1+d^3}{n^2+d^3}, \qquad (19)$$

$$\nu = \ln 2/\ln\left(d\frac{2n+1+d^2}{3n+d^2}\right). \qquad (20)$$

Вычисленные по уравнению (19) и (20) значения критических показателей хорошо согласуются с оценками работы [4], и только при $d = 3$ и $n = 0$ отклонения для ν и γ превышают погрешность оценок [4].

Таким образом, с помощью простых эмпирических уравнений можно с высокой точностью воспроизвести оценки значений критических показателей в зависимости от размерности пространства и числа компонентов параметра порядка в области от $d = 1$ до $d = 4$ и от $n = 0$ до $n = \infty$. Это дает основания предположить, что существует универсальная аналитическая зависимость критических показателей от d и n. Поэтому, наряду с дальнейшим уточнением оценок значений критических показателей, целесообразно проведение работ по отысканию точного вида их зависимости от размерности пространства и числа компонентов параметра порядка.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вильсон К., Когут Дж.* Ренормализационная группа и ε-разложение. М.: Мир, 1975. 256 с.
2. *Рабинович В.А., Шелудяк Ю.Е.* Современные теоретические оценки значений критических показателей // ИФЖ. 1986. Т. 51. № 5. С. 758.
3. *Паташинский А.З., Покровский В.Л.* Флуктуационная теория фазовых переходов. М.: Наука, 1982. 382 с.

4. *Le Guillou J.C., Zinn-Justin J.* Accurate critical exponents from ε-expansion // J. de Physique Lett. 1985. V. 46. № 4. P. L137.
5. *Le Guillou J.C., Zinn-Justin J.* Accurate critical exponents for Ising like systems in non-integer dimensions // J. de Physique. 1987. V. 48. № 1. P. 19.
6. *Guttmann A.J.* The high-temperature susceptibility and spin-spin correlation function of the three-dimensional Ising model // J. Phys. A.: Math. and Gen. 1987. V. 20. № 7. P. 1855.
7. *Schloms R., Dohm V.* Minimal renormalization without ε-expansion: Critical behavior in three dimensions // Nucl. Phys. B: Field Theory and Statistical Systems. 1989. V. 328. № 3. P. 639.
8. *Kunz Herve, Zumbach Gil.* Critical exponents of *n*-component model via renormalization group recursion for dimension between 2 and 4 // J. Phys. A.: Math. and Gen. 1990. V. 23. № 6. P. 999.
9. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. М.: Мир, 1990. 342 с.
10. *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. М.: Мир, 1991. 367 с.
11. *Стенли Г.* Фазовые переходы и критические явления. М.: Мир, 1973. 419 с.