A. A. Zinger, A. M. Kagan, Sample mean as an estimator of the location parameter in case of the Laplacian loss function, in presence of the nuisance scale parameter, *Zap. Nauchn. Sem. LOMI*, 1974, Volume 43, 15–29

ВЫБОРОЧНОЕ СРЕДНЕЕ КАК ОЦЕНКА ПАРАМЕТРА СДВИГА ПРИ ЛАПЛАСОВСКОМ УЩЕРБЕ И МЕШАЮЩЕМ МАСШТАБНОМ ПАРАМЕТРЕ

А.А.Зингер, А.М.Каган

§ I. Введение

Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$ – повторная выборка из совокупности с функцией распределения (ф.р.) $F\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$, зависящего от сдвигового параметра $\theta\in R^1$, подлежащего оцениванию, и мешающего масштабного параметра $\sigma\in R^1_+$. Определим риск $R(\tilde\theta;\theta,\sigma)$ оценки $\tilde\theta=\tilde\theta(x_1,\ldots,x_n)$ параметра θ следующим образом:

$$R(\tilde\theta;\theta,\sigma)=E_{\theta,\sigma}|\tilde\theta-\theta|, \tag{I}$$

где $E_{\theta,\sigma}$ обозначает математическое ожидание, отвечающее мере

$$P_{\theta,\sigma}(A)=\int\limits_A dF\left(\frac{x_1-\theta}{\sigma}\right)\ldots dF\left(\frac{x_n-\theta}{\sigma}\right).$$

Как обычно, мы назовем оценку $\tilde\theta$ допустимой, если не существует другой оценки $\tilde\theta_1$, для которой

$$R(\tilde\theta_1;\theta,\sigma)\leqslant R(\tilde\theta;\theta,\sigma),\quad(\theta,\sigma)\in R^1\times R^1_+$$

со строгим неравенством хотя бы для одной пары (θ,σ).

Данная работа посвящена выяснению условия допустимости выборочного среднего $\bar x=\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)$ как оценки θ относительно риска (I). В теореме 2 показано, что при $n\geqslant 15$ и некоторых априорных условиях на $F(x)$, наиболее неприятным из которых является унимодальность, допустимость $\bar x$ оказывается характеристическим свойством нормального закона.

В одной из предыдущих работ авторов [I] (см.также [2, гл. 7]) исследовалось условие допустимости $\bar x$ как оценки θ при лапласовском ущербе в ситуации, когда мешающий параметр σ отсутствует, другими словами, когда значение σ известно. Как было показано там, при $n\geqslant 6$ и почти тех же априорных условиях на $F(x)$, что и в теореме 2, допустимость $\bar x$ как оценки θ имеет место только для нормально распределенных величин x_i. Поскольку допустимость $\bar x$ как оценки θ при наличии мешающего параметра σ является более слабым свойством оценки, чем ее допустимость при фиксированном σ, то теорема 2 усиливает, в случае $n\geqslant 15$, соответствующий результат из [I].

Отметим также, что условие допустимости $\bar x$ как оценки θ при квадратическом ущербе и мешающем σ исследовалось независимо в недавних работах [3 , 4] и [5], где показано, что при $n \geqslant 6$ и $\text{v.p.} \int x\,dF(x)=0$ допустимость $\bar{x}$ эквивалентна тому, что $F(x)$ - ф.р. нормального закона со средним нуль. К сожалению, лапласовский ущерб с аналитической точки зрения гораздо менее удобен сравнительно с квадратическим, что и объясняет появление дополнительных априорных условий на $F(x)$ и объем выборки.

Укажем также, что наши результаты с небольшими изменениями могут быть перенесены на тот случай, когда риск оценки $\tilde{\theta}$ имеет вид

$$R(\tilde{\theta};\theta,\sigma)=E_{\theta,\sigma}\tau(\tilde{\theta}-\theta),$$

где

$$\tau(u)=\begin{cases}\lambda_1 u, & u \geqslant 0,\\ -\lambda_2 u, & u \leqslant 0,\end{cases}$$

$\lambda_1>0$, $\lambda_2>0$ - некоторые постоянные (ср. I).

§ 2. Вывод основного уравнения.

Перейдем к выводу необходимого условия допустимости $\bar{x}$ как оценки θ. Прежде всего заметим, что если оценка $\bar{x}$ допустима, то должно быть

$$\int |x|\,dF<\infty.$$

Действительно, в противном случае лапласовский риск тривиальной оценки $\tilde{\theta}\equiv 0$ был бы при всех (θ,σ) меньше, чем риск оценки $\bar{x}$.

Рассмотрим класс оценок вида

$$\tilde{\theta}=\bar{x}+s\varphi(Z), \tag{2}$$

где $s^2=\sum_1^n(x_i-\bar{x})^2$, $Z=(z_1,\ldots,z_n)=\left(\frac{x_1-\bar{x}}{s},\ldots,\frac{x_n-\bar{x}}{s}\right)$.

Чтобы с вероятностью I было $s^2>0$, достаточно считать $F(x)$ непрерывной; мы же, имея в виду дальнейшее, предположим сразу, что

$$F(x) \text{ абсолютно непрерывна, } F'(x)=f(x). \tag{3}$$

Для оценок вида (2), в число которых входит и $\bar{x}$, имеем

$$E_{\theta,\sigma}|\tilde{\theta}-\theta|=\sigma E_{0,1}|\tilde{\theta}|.$$

Поэтому, если оценка $\bar{x}$ допустима, она должна быть оптимальной среди оценок (2):

$$E|\bar{x}|=\min_{\varphi} E|\bar{x}+s\varphi(Z)|,$$

где мы положили $E_{0,1}=E$. В частности, поскольку

$$E|\bar{x}+s\varphi(Z)| = E\left\{E\left(|\bar{x}+s\varphi(Z)|\,\big|\,Z\right)\right\},$$
то при почти каждом Z (по мере $P_{0,1}$) должно быть

$$E(|\bar{x}|\,|\,Z) = \min_{c\in R^1} E(|\bar{x}+cs|\,|\,Z). \tag{4}$$

<u>Лемма I</u>. Пусть ξ, η - случайные величины с совместной плотностью $f(x,y)$, удовлетворяющие условию $E|\xi|<\infty$, $E|\eta|<\infty$. Тогда значение c, минимизирующее $E|\xi - c\eta|$, удовлетворяет уравнинию

$$\int_0^\infty y\,dy\int_{cy}^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^\infty y\,dy\int_{-\infty}^{cy} f(x,y)\,dy.$$

В частности, для того, чтобы $E|\xi| = \min_c E|\xi + c\eta|$, необходимо, чтобы

$$\int_0^\infty y\,dy\int_0^\infty f(x,y)\,dx = \int_0^\infty y\,dy\int_{-\infty}^0 f(x,y)\,dx.$$

Эта лемма доказывается непосредственно.

Воспользуемся теперь (см.напр., [6]) выражением для совместной плотности величин $(\bar{x}, s, Z)$, имеющей вид $const\cdot s^{n-2}\prod_1^n f(\bar{x}+sz_i)$. Применяя лемму I, из соотношения (4) получаем следующее необходимое условие допустимости $\bar{x}$ как оценки θ при лапласовском ущербе:

$$\int_0^\infty v^{n-1}dv\int_0^{+\infty}\prod_1^n f(u+vz_i)\,du = \int_0^\infty v^{n-1}dv\int_{-\infty}^0\prod_1^n f(u+vz_i)\,du \tag{5}$$

для почти всех $z_1,\dots,z_n$, связанных условиями

$$z_1+\dots+z_n=0,\quad z_1^2+\dots+z_n^2=1.$$

Полагая

$$w(u) = \begin{cases} -1, & u<0,\\ 1, & u>0,\end{cases}$$

запишем уравнение (5) в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)\,du\int_0^\infty v^{n-1}\prod_1^n f(u+vz_i)\,dv = 0. \tag{6}$$

1397 2

§ 3. Формулировка результатов.

<u>Теорема I</u>. Пусть $n \geqslant 15$, $\int |x| dF < \infty$ и выполнено условие (3). Предположим дополнительно, что

(i) $f(x)$ непрерывно дифференцируема,

(ii) $f'(x) \geqslant 0$ при $x < 0$ и $f'(x) \leqslant 0$ при $x > 0$.

Тогда единственным вероятностным решением $f(x)$ уравнения (6) является плотность нормального закона со средним нуль.

<u>Теорема 2</u>. Пусть $(x_1, \ldots, x_n)$ – повторная выборка объема $n \geqslant 15$ из совокупности с плотностью распределения $\frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right)$, $\theta \in R^1$, $\sigma \in R^1_+$, причем $f(x)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) теоремы I. Тогда допустимость $\bar{x}$ как оценки θ при мешающем σ относительно риска (I) является характеристическим свойством плотности нормального закона со средним нуль.

Сделаем несколько замечаний к теореме 2. Как мы видели в п.2, из допустимости $\bar{x}$ как оценки θ следует условие $\int |x| dF < \infty$ и соотношение (6). Далее, если $f(x)$ – плотность нормального закона со средним нуль, то, как показали Фокс и Рубин [7], $\bar{x}$ является допустимой оценкой θ даже при фиксированном σ. Таким образом, в доказательстве нуждается только теорема I.

§ 4. Доказательство теоремы I.

Перейдем к исследованию уравнения (6). Прежде всего, заметим, что если (6) выполняется для каких-то $z_1, \ldots, z_n$, то оно выполняется и для $\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n$ при произвольном $\lambda > 0$. Поэтому $z_1, \ldots, z_n$ можно считать связанными только условием

$$z_1 + \ldots + z_n = 0. \tag{7}$$

Далее, нам будет полезна

<u>Лемма 2</u>. Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы I, $0 < k < 2l-3$ $(l > 1)$, $z_1, \ldots, z_n$ попарно различные. Тогда при всех $u \in R^1$

$$\int_0^\infty \prod_1^l f(u+vz_i)\cdot v^k dv \leqslant C_Z(1+u^{2l-2})^{-\frac{2l-3-k}{2l-2}}, \tag{8}$$

где C_Z зависит от $Z = (z_1, \ldots, z_n)$, l и k (зависимость от l и k мы не подчеркиваем).

Доказательство леммы. Из условий леммы следует, что найдется постоянная C ж), для которой $f(x) \leqslant \frac{C}{1+x^2}$, $x \in R^1$. Тогда

$$\prod_{i=1}^l f(u+vz_i) \leqslant \frac{C^l}{\prod_1^l \{1+(u+vz_i)^2\}}.$$

Положим

$$u = r\cos\varphi,\ v = r\sin\varphi\ ,\quad r = \sqrt{u^2+v^2}\ ,\quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi.$$

Обозначим еще

$$z_i = -\operatorname{ctg}\alpha_i\ ,\quad 0 < \alpha_i < \pi\ ,\quad i = 1, 2, \ldots, l.$$

Имеем

$$u + vz_i = r(\cos\varphi - \sin\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha_i) = -\frac{r}{\sin\alpha_i}\sin(\varphi-\alpha_i)$$

Далее,,

$$\prod_{i=1}^l \left[1+(u+vz_i)^2\right] \geqslant 1 + \sum_{k=1}^l \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^l (u+vz_j)^2 =$$

$$= 1 + r^{2l-2}\sum_{k=1}^l \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^l \frac{1}{\sin^2\alpha_j}\cdot\sin^2(\varphi-\alpha_j) \geqslant 1 + r^{2l-2}\sum_{k=1}^l \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^l \sin^2(\varphi-\alpha_j).$$

Положим $\min_{i \neq j} |\alpha_i - \alpha_j| = \delta$; поскольку $z_1, \ldots, z_n$ попарно различны, $\delta > 0$. Для любого $\varphi \in (0, \pi)$ (соотв. $\varphi \in (\pi, 2\pi)$) среди $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ можно выбрать $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_{l-1}}$ так, чтобы

$$\frac{\delta}{2} < |\varphi - \alpha_{i_\nu}| < \pi - \frac{\delta}{2}\ ,\quad \nu = 1, \ldots, l-1,$$

ж) Здесь и далее через C обозначаются некоторые подходящие константы, не обязательно одни и те же.

(соотв. $\pi - \frac{\delta}{2} < |\varphi - \alpha_{i_\nu}| < 2\pi - \frac{\delta}{2}$) и тем самым

$$|\sin(\varphi - \alpha_{i_\nu})| > \delta_1,$$

где $\delta_1 > 0$ определяется по δ . Таким образом, при всех $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \prod_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{\ell} \sin^2(\varphi - \alpha_j) \geqslant \delta_1^{2(\ell-1)}$$

и

$$\prod_{j=1}^{\ell} \left[1 + (u + v z_j)^2\right] \geqslant 1 + \tau^{2\ell-2} \delta_1^{2\ell-2}.$$

Оценим теперь искомый интеграл:

$$\int_0^\infty \prod_1^\ell f(u + v z_i) v^k dv \leqslant C^\ell \int_0^\infty \frac{v^k\, dv}{1 + (u^2 + v^2)^{\ell-1} \delta_1^{2\ell-2}} \leqslant$$

$$\leqslant C(\ell, \delta_1) \int_0^\infty \frac{v^k\, dv}{1 + u^{2\ell-2} + v^{2\ell-2}} = C(\ell, \delta_1) \frac{(1 + u^{2\ell-2})^{\frac{k+1}{2\ell-2}}}{1 + u^{2\ell-2}} \int_0^\infty \frac{v^k\, dv}{1 + v^{2\ell-2}} =$$

$$= C(\ell, k, \delta_1)(1 + u^{2\ell-2})^{-\frac{2\ell-3-k}{2\ell-2}},$$

что и доказывает лемму, поскольку $\delta_1 = \delta_1(Z)$.

Отметим следующие факты, вытекающие из леммы 2, которые будут использованы в дальнейшем.

<u>Следствие I</u>. При $\tau \in (0,1)$ и всех $u \in R^1$

$$\int_0^\infty v^{1-\tau} f(u+v) f(u-v)\, dv \leqslant C(1+u^2)^{-\frac{\tau}{2}}. \tag{9}$$

<u>Следствие 2</u>. При $n \geqslant 4$ интеграл

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_1^n f(u + v z_i) v^{n-1}\, du\, dv$$

существует в области $D = \{ Z : z_i \neq z_j,\ i \neq j \}$ и представляет там непрерывную функцию $z_1, \ldots, z_n$.

<u>Следствие 3</u>. При $n \geqslant 7$ интеграл

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u + v z_i)| \prod_2^n f(u + v z_i) v^n\, du\, dv$$

существует в D и сходится равномерно по $z_1, \ldots, z_n$ у любого замкнутого подмножества области D.

Следствие I непосредственно получается из леммы 2 при $k = 1-\tau$, $l=2$; $z_1 = -z_2 = 1$.

Для доказательства следствия 2 нужно проинтегрировать по $u \in R^1$ неравенство

$$\int_0^\infty v^{k-1} \prod_1^n f(u+vz_i)\,dv \le C_z (1+u^{2n-2})^{-\frac{n-2}{2n-2}},$$

получающееся из (8) при $k = n-1$, $l = n$. Если Z пробегает замкнутое подмножество D, то, просматривая доказательство леммы 2, легко увидеть, что C_z ограничена сверху. Тогда, очевидно, $\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_1^n f(u+vz_i) v^{n-1} du\,dv$ сходится равномерно для таких Z и представляет собой непрерывную функцию в D

Перейдем к доказательству следствия 3. Из условий леммы легко вывести, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^2 |f'(u)|\,du < \infty . \tag{10}$$

Преобразуем (пока формально) интересующий нас интеграл к виду

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u+vz_1)| \prod_2^n f(u+vz_i) v^n du\,dv = \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} |f'(u)| \prod_2^n f(u+vz_i') v^n du\,dv,$$

где $z_i' = z_i - z_1$. К интегралу по v, стоящему в правой части, применим лемму 2 с $k=n$, $l=n-1$:

$$\int_0^\infty v^n \prod_2^n f(u+vz_i')\,dv \le C_z (1+u^{2n-4})^{-\frac{n-5}{2n-4}}. \tag{11}$$

Умножая (II) на $|f'(u)|$ и интегрируя по u, получим с учетом (I0) искомое утверждение.

Вернемся теперь к уравнению (6). Прежде всего, заметим, что поскольку плотность распределения вектора $(z_1, \ldots, z_n)$, равная

$$const \cdot \int_0^\infty v^{n-2} dv \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_1^n f(u+vz_i)\,du$$

(см. [6, 8]), очевидно, положительна и, согласно следствию 2, непрерывна при $(z_1, \ldots, z_n) \in D$, то (6) выполняется для всех (а не только для почти всех) $(z_1, \ldots, z_n) \in D$, удовлетворяющих условию (7).

Зафиксируем $z_2, \ldots, z_{n-1}$ и продифференцируем (6) по z_1 (это возможно в силу следствия 3). Получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} f'(u+vz_1)\prod_2^n f(u+vz_i)v^n dv -$$
$$-\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} f'(u+vz_n)\prod_1^{n-1} f(u+vz_i)v^n dv = 0.$$

Заменяя здесь z_1 поочередно на $z_2, \ldots, z_{n-1}$, придем к соотношениям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} f'(u+vz_j)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^n f(u+vz_i)v^n dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} f'(u+vz_k)\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^n f(u+vz_i)v^n dv. \tag{12}$$

для всех j, $k=1,\ldots,n$. Из (12) получаем, что

$$n\int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} f'(u+vz_1)\prod_2^n f(u+vz_i)v^n dv =$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} w(u)du \int_0^{\infty} \frac{d}{du}\left[\prod_1^n f(u+vz_i)\right]v^n dv. \tag{13}$$

Положим

$$\Psi(u) = \int_0^{\infty} \prod_1^n f(u+vz_i)v^n dv. \tag{14}$$

Тогда из леммы 2 и (14) нетрудно получить, что

1) $\Psi(u)$ дифференцируема по $u \in R^1$, причем

$$\Psi'(u) = \int_0^{\infty} \frac{d}{du}\left[\prod_1^n f(u+vz_i)\right]v^n dv.$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty} |\Psi'(u)|du < \infty.$$

3) $$\Psi(-\infty) = \Psi(+\infty) = 0.$$

Теперь (I3) можно записать в виде

$$n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(u)du\int\limits_0^{\infty} f'(u+vz_1)\prod_2^n f(u+vz_i)v^n dv =$$

$$=\int\limits_0^{\infty}\Psi'(u)du-\int\limits_{-\infty}^{0}\Psi'(u)du=-2\Psi(0)$$

или

$$n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(u)du\int\limits_0^{\infty} f'(u+vz_1)\prod_2^n f(u+vz_i)v^n dv+2\int\limits_0^{\infty}\prod_1^n f(vz_i)v^n dv=0. \qquad (I5)$$

Запишем (I5) для следующих значений $z_1,\dots,z_n$:

$$z_1=0,\ z_2=-z_3=\xi_1,\ z_4=-z_5=\xi_2,\ z_6=-z_7=\xi_3,\ z_8=-z_9=\xi_4,$$

а остальные z_i пусть будут выбраны произвольно, но так, чтобы $Z\in D$ и удовлетворялось условие (7). Умножим обе части полученного соотношения на $\prod_1 \xi_i^{1-\tau_i}$, где $0<\tau_i<1$, $i=$ I,2,3,4 и проинтегрируем полученное равенство по области $(\xi_1>0,\dots,\xi_4>0)$

Если положить

$$\Phi(u,\tau)=\int\limits_0^{\infty} v^{1-\tau}f(u-v)f(u+v)dv,\quad u\in R^1,\ \tau\in(0,1),$$

$$\Phi_1(u,\tau)=\int\limits_0^{\infty}\prod_1^n f(u+vz_i)v^{n-8+\tau}dv,$$

$$\bar{\tau}=\tau_1+\tau_2+\tau_3+\tau_4$$

и воспользоваться очевидным тождеством

$$\int\limits_0^{\infty}\xi^{1-\tau}f(u-v\xi)f(u+v\xi)d\xi=v^{-2+\tau}\Phi(u,\tau),$$

то результатом указанного преобразования будет соотношение

$$n\int\limits_{-\infty}^{+\infty} w(u)f'(u)\prod_1^4\Phi(u,\tau_i)\Phi_1(u,\bar{\tau})du=-2f(0)\prod_1^4\Phi(0,\tau_i)\Phi_1(0,\bar{\tau}) \qquad (I6)$$

Согласно следствию I, $\Phi(u,\tau)$ имеет смысл при всех рассматриваемых u,τ. При каждом u функция $\Phi(u,\tau)$ может быть продолжена как аналитическая функция в полосу $0<\mathrm{Re}\,\tau<1$ комплексной плоскости.

Взяв в лемме 2 $k=n-8$, $l=n-9$, получим, что при $n\geq$ I5 функция $\Phi_1(u,\tau)$ имеет смысл при $\tau\in$ (0,I) и установим справедливость соотношения (I6) для $\tau_i > 0$, $\bar{\tau} \in (0,1)$.

Запишем теперь (I6) для следующих трех групп значений $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_1,\ \tau_2$$

$$\tau_3,\ \tau_4,\ \tau_3,\ \tau_4$$

$$\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\ ,$$

где $\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 + \tau_4$, $0 < \tau_i < 1$. Используя получающиеся соотношения, легко находим с помощью приема, уже работавшего в подобных задачах [I, 8] :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} w(u) f'(u) \left[\frac{\Phi(u,\tau_1)\Phi(u,\tau_2)}{\Phi(0,\tau_1)\Phi(0,\tau_2)} - \frac{\Phi(u,\tau_3)\Phi(u,\tau_4)}{\Phi(0,\tau_3)\Phi(0,\tau_4)} \right]^2 \Phi_1(u,\bar{\tau})\,du = 0. \tag{I7}$$

Поскольку при всех $u \in R^1$

$$w(u) f'(u) \leq 0\ ,\quad \Phi_1(u,\bar{\tau}) > 0\ ,$$

из (I7) находим, что при тех u , при которых $f'(u) \neq 0$,

$$\frac{\Phi(u,\tau_1)}{\Phi(0,\tau_1)}\ \frac{\Phi(u,\tau_2)}{\Phi(0,\tau_2)} = \frac{\Phi(u,\tau_3)}{\Phi(0,\tau_3)}\ \frac{\Phi(u,\tau_4)}{\Phi(0,\tau_4)}$$

или, иначе,

$$\frac{\Phi(u,\tau_1)}{\Phi(0,\tau_1)}\ \frac{\Phi(u,\tau_2)}{\Phi(0,\tau_2)} = \Xi(u,\tau_1 + \tau_2) \tag{I8}$$

для τ_1, τ_2 под условием

$$\tau_i > 0\ ,\quad \tau_1 + \tau_2 < \frac{1}{2}$$

(поскольку $\tau_1 + \tau_2 = \tau_3 + \tau_4 = \frac{1}{2}\bar{\tau}$, а $\bar{\tau} < 1$).

Уравнение (I8) представляет собой хорошо известное функциональное уравнение Коши и, с учетом непрерывности $\Phi(u,\tau)$ по τ , из (I8) имеем

$$\frac{\Phi(u,\tau)}{\Phi(0,\tau)} = g(u) e^{h(u)\tau} \tag{I9}$$

для $\tau \in (0,\varepsilon)$ при подходящем $\varepsilon > 0$.

Преобразуем (I9), вспомнив определение $\Phi(u,\tau)$:

$$\int_0^\infty v^{1-\tau} f(u-v) f(u+v)\,du = g(u) e^{h(u)\tau} \int_0^\infty v^{1-\tau} f(-v) f(v)\,dv. \tag{20}$$

Положим в (20) $v = e^x$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau x} f(u+e^x) f(u-e^x) e^{2x} dx = g(u) e^{h(u)\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau x} f(e^x) f(-e^x) e^{2x} dx. \quad (2I)$$

Заменим в правой части (2I) x на $x + h(u)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau x} f(u-e^x) f(u+e^x) e^{2x} dx = g(u) e^{2h(u)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\tau x} f(-e^{x+h(u)}) f(e^{x+h(u)}) e^{2x} dx \quad (22)$$

Соотношение (22) справедливо в полосе $0 < \operatorname{Re}\tau < \varepsilon$, согласно отмеченному выше свойству функции $\Phi(u,\tau)$.

Выберем некоторое $\tau_0 \in (0,\varepsilon)$ и рассмотрим (22) на прямой $\tau = \tau_0 - it,\ t \in R^1$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(u-e^x) f(u+e^x) e^{(2-\tau_0)x} dx =$$

$$= g_1(u) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(-e^{x+h(u)}) f(e^{x+h(u)}) e^{(2-\tau_0)x} dx. \quad (23)$$

По теореме единственности для преобразования Фурье из (23) заключаем, что

$$f(u-v) f(u+v) = g_2(u) f(-v e^{h(u)}) f(v e^{h(u)}) \quad (24)$$

при всех u с условием $f'(u) \neq 0$. При $v \to 0$ получаем

$$g_2(u) = f(u)^2 \,/\, f(0)^2.$$

Полагая $f_1(u) = f(u) \,/\, f(0)$, запишем (24) в виде

$$f_1(u-v) f_1(u+v) = f_1(u)^2 f_1(-v e^{h(u)}) f_1(v e^{h(u)}). \quad (25)$$

Тем же самым приемом, что в [9], легко выводится из (25), что $f_1(u) \neq 0$ и тем самым $f(u) \neq 0$ при $u \in R^1$. Обозначая $w(u) = \log f_1(u)$, получим из (25)

$$w(u-v) + w(u+v) - 2w(u) = w(-v e^{h(u)}) + w(v e^{h(u)}). \quad (26)$$

Уравнение (26) того же типа, что рассмотренное Аносовым в [I0]; его методом можно установить, что существует конечная производная $w''(u)$. Дифференцируя теперь (26) дважды по v и полагая $v = 0$, придем к равенству

$$\omega''(u) = C e^{2h(u)}. \quad (27)$$

Из (27) получаем, что при всех $u \neq 0$

$$f'(u) \neq 0.$$

Действительно, $\omega(u)$ монотонна на каждой из полуосей $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$ вместе с $f(u)$ и сохраняет на каждой из них благодаря (27) характер вогнутости. Значит $\omega'(u) \neq 0$ при всех $u = 0$; такова же $f'(u)$.

Таким образом, соотношение (26) имеет место при всех $-\infty < u < \infty$; нам еще будет полезно записать его в виде

$$\omega(u - a(u)v) + \omega(u + a(u)v) - 2\omega(u) = \omega(-v) + \omega(v), \tag{28}$$

где мы положили $a(u) = e^{-h(u)}$.

Покажем теперь, что функция $a(u)$ также должна быть дифференцируемой. Сначала отметим, что

$$\omega'(v) - \omega'(-v) \not\equiv 0. \tag{29}$$

Если бы это было не так, то $\omega(u)$ была бы нечетной функцией, удовлетворяющей уравнению

$$\omega(u+v) + \omega(u-v) - 2\omega(u) = 0, \quad -\infty < u < \infty, \quad v > 0,$$

откуда немедленно следовало бы, что $\omega(u)$ – полином степени не выше первой и, значит,

$$\omega(u) = Cu,$$

что невозможно.

Воспользовавшись формулой конечных приращений и непрерывностью $a(u)$, легко усмотреть из (26), что $a(u)$ на самом деле дифференцируема и

$$\frac{1}{a(u)} = \frac{\omega'(u + a(u)v) + \omega'(u - a(u)v) - 2\omega'(u)}{v a u[\omega'(v) - \omega'(-v)]}, \tag{30}$$

где v таково, что

$$\omega'(v) - \omega'(-v) \neq 0. \tag{31}$$

Из (30) легко следует существование $a''(u)$; но тогда с учетом (27) получим, что существует и $\omega^{(4)}(u)$.

Продифференцируем (26) четыре раза по v и положим $v = 0$. В результате найдем

$$\omega^{(4)}(u) = \frac{C}{a(u)^4}. \tag{32}$$

Комбинируя (32) с (27) и исключая тривиальный случай

$$\omega''(u) = 0$$

(которому отвечает $f(u)$, не являющаяся плотностью вероятности), получим следующее дифференциальное уравнение для $\omega(u)$:

$$\omega^{(4)}(u) = C\left[\omega''(u)\right]^2. \tag{33}$$

Если в (33) $C = 0$, то $\omega(u)$ – полином не выше 3-ей степени, а

$$f(u) = C \exp \omega(u). \tag{34}$$

Среди функций вида (34) плотностью вероятности является только плотность нормального закона.

Рассмотрим теперь случай $C \neq 0$ в уравнении (33). Покажем, что этому случаю не соответствует никакого решения, имеющего вероятностный смысл. Положим

$$\omega''(u) = \frac{1}{C} z(u)$$

тогда $z(u)$ удовлетворяет уравнению

$$z''(u) = z(u)^2. \tag{35}$$

Рассмотрим уравнение (35) с начальными условиями

$$z(0) = \alpha \quad , \quad z'(0) = \beta. \tag{36}$$

Умножая обе части (35) на $z'(u)$ и интегрируя по $(0, u)$, получим с учетом начальных условий

$$\frac{1}{2}\left(z'(u)\right)^2 = \frac{1}{3} z(u)^3 + A, \tag{37}$$

где $A = \frac{1}{2}\beta^2 - \frac{1}{3}\alpha^3$.

Из (37) получаем

$$z' = \pm\sqrt{\frac{2}{3} z^3 + A}, \tag{38}$$

что справедливо по крайней мере в области $z \geq \alpha$. Выберем для определенности в (38) знак + (такой выбор не умаляет общности рассмотрения) и проинтегрируем (38) в интервале $(0, u)$:

$$\int\limits_{\alpha}^{z} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{3} t^3 + A}} = u. \tag{39}$$

Полученное соотношение определяет $u = u(z)$ в промежутке $[\alpha, \infty)$.

При этом $u(z)$ оказывается монотонно возрастающей функцией и

$$\lim_{z\to\infty} u(z) = u_0 = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{\frac{2}{3}t^3 + A}} < \infty . \qquad (40)$$

Обратная функция $z(u)$, удовлетворяющая, как легко видеть, уравнению (35) при начальных условиях (36), в силу (40) имеет при $u = u_0$ бесконечный разрыв, что противоречит свойству $\omega''(u)$.

Таким образом, в случае $C \neq 0$ в уравнении (33), уравнение (35) имеет только тривиальное непрерывное решение $z(u) = 0$, которому отвечает $\omega''(u) = 0$. Выше уже было отмечено, что такому случаю не отвечает никакой плотности вероятности $f(u)$.

Итак, единственной функцией $\omega(u) = \log f(u) - \log f(0)$, которой отвечает вероятностная плотность $f(u)$, является полином 2-ой степени; в этом случае $f(u)$ – плотность нормального закона со средним нуль, ввиду условия (ii). Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что если $f(x)$ – плотность нормального закона со средним нуль, то соотношение $(6)_n$ выполняется тождественно по $(z_1, \ldots, z_n)$, связанным условиями $\sum_1^n z_i = 0$, $\sum_1^n z_i^2 = 1$. Теорема I доказана тем самым полностью.

ЛИТЕРАТУРА

[I] Kagan A.M.,Zinger A.A. Sample mean as an estimator of location parameter. Case of nonquadratic loss functions .- Sankhya, Ser.A, 1971, 33, 3.

[2] Каган А.М., Линник Ю.В., Рао С.Р. Характеризационные задачи математической статистики. М., 1972.

[3] Зингер А.А., Каган А.М. Некоторые статистические задачи для семейств с параметрами сдвига и масштаба. В кн.: Тезисы Международн.конференции по теор.вероятн. и мат.статистики, Вильнюс, 1973.

[4] Kagan A.M., Zinger A.A. Sample mean as an estimator of the location parameter in presence of the nuisance scale parameter. - Sankhya, Ser.A, 1973, 35, 4.

[5] Bondesson L. Characterizations of the normal and the gamma distributions. - Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 1973, 26, 4.

[6] Крамер Г. Математические методы статистики. М., 1948.

[7] Fox M., Rubin H. Admissibility of quantile estimates of a single location parameter. - Ann.Math.Stat., 1964, 35, 3.

[8] Зингер А.А. Об одной задаче А.Н.Колмогорова. - Вестник Ленинград.университет., сер.матем., мех., астр., 1956, № I.

[9] Линник Ю.В. Линейные формы и статистические критерии. I – Украинский матем.журнал, 1953, 5, 2

[10] Аносов Д.В. Об интегральном уравнении, встречающемся в статистике. – Вестник Ленинград.университ., сер. матем., мех., астр., 1964, № 7.