

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

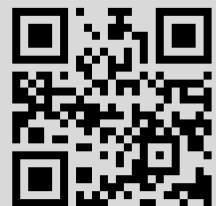
В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева, Блоховский электрон во внешнем поле, *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 2, 1–29

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.89

23 марта 2025 г., 11:19:41



В. С. Буслаев, Л. А. Дмитриева

БЛОХОВСКИЙ ЭЛЕКТРОН ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Для уравнения $H\psi = E\psi$, где $H = -\partial_x^2 + p(x) - \epsilon x$; $p(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — гладкая периодическая функция, $p(x+a) = p(x)$; $\epsilon > 0$ — параметр, E — спектральный параметр, изучена задача рассеяния. Основным объектом исследования является аналог функции Йоста $M(E)$ и коэффициент отражения $r(E) = \overline{M(E)}/M(E)$. При дополнительных предположениях об аналитических свойствах периодического потенциала p изучены аналитические свойства решений рассматриваемого уравнения, функции M и коэффициента отражения r ; исследовано распределение резонансов — нулей и полюсов коэффициента отражения — на комплексной плоскости E . На основе предварительного изучения асимптотического поведения решений уравнения $H\psi = E\psi$ при $\epsilon \rightarrow 0$ получена асимптотическая формула для функции M и установлена связь между цепочками резонансов и известными в связи с обсуждаемой проблематикой лестницами Ванье–Штарка. Изучен спектральный смысл резонансов и прослежена трансформация при $\epsilon \rightarrow 0$ однократного лебегова спектра оператора H в двухкратный лакунный спектр оператора $H_0 = -\partial_x^2 + p(x)$.

§ 1. Введение

Объектом исследования будет оператор вида

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x) - \epsilon x,$$

действующий на функциях $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Здесь p — гладкая вещественнозначная периодическая функция на оси, пусть $a > 0$ — ее период; ϵ — параметр.

Оператор H можно толковать как квантовомеханический оператор энергии электрона в кристалле, помещенном во внешнее однородное электрическое поле; потенциал p соответствует эффективному внутреннему полю в кристалле. Суммарный потенциал изображен на рис. 1. Мы ограничиваем наше рассмотрение одномерным случаем. Типичные физические параметры таковы, что ϵ следует считать малым.

Оператор H стал объектом интенсивного исследования в физической литературе с начала 50-х годов. Основные результаты были получены благодаря переходу от оператора H к „эффективным гамильтонианам”

$$H_{\text{eff}} = \mathfrak{E}_l(-i\frac{d}{dx}) - \epsilon x, \quad l = 1, 2, \dots$$

Здесь $\mathfrak{E}_l(k)$ — ветви так называемой дисперсионной функции, порождаемой оператором

$$H_0 = -\frac{d^2}{dx^2} + p(x)$$

с чисто периодическим потенциалом.

Ключевые слова: оператор Шредингера, периодический потенциал, спектральная концентрация, рассеяние, резонансы, коэффициент отражения, асимптотическое поведение, лестницы Ванье–Штарка.

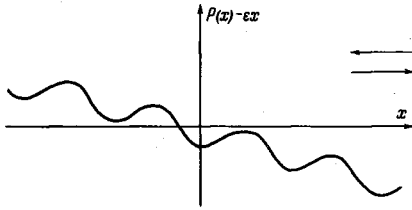


Рис. 1.

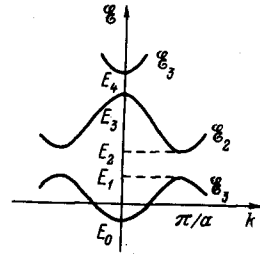


Рис. 2.

1.1. Для дальнейшей дискуссии нам понадобятся некоторые общие сведения об операторе H_0 . Ограничим оператор H_0 на множество функций вида

$$\psi(x, k) = e^{ikx} \varphi(x, k),$$

φ – периодична по x с периодом a , $k \in \mathbf{R}$ – фиксированный параметр. Спектр этого оператора состоит из бесконечной последовательности точек $\varepsilon_l(k)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, $-\infty < \varepsilon_l(k) \leq \varepsilon_m(k)$, $l < m$, $\varepsilon_l(k) \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$. Функции $k \rightarrow \varepsilon_l(k)$ – гладкие периодические с периодом $a^* = 2\pi/a$. Они обладают характерными свойствами монотонности, которые отражены на рис. 2. Последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ (рис. 2) удовлетворяет условию $E_0 < E_1 \leq E_2 < E_3 \leq \dots$.

Спектр оператора H_0 в пространстве $L_2(\mathbf{R})$ является гладким, двукратным и имеет зонную структуру. Последнее означает в точности, что он состоит из спектральных интервалов $\Delta_1 = [E_0, E_1]$, $\Delta_2 = [E_2, E_3]$, ..., разделенных лагунами $\bar{\Delta}_1 = (E_1, E_2)$, $\bar{\Delta}_2 = (E_3, E_4)$, ...

При малых ε коэффициент оператора H_{eff} меняется медленно и это позволяет применить к исследованию H_{eff} асимптотический ВКБ-метод. Одним из следствий асимптотических рассмотрений является возникновение „условий квантования”, связывающих с каждым спектральным интервалом некоторую периодическую последовательность (цепочку) значений спектрального параметра

$$E_n^{(l)} = E^{(l)} + \varepsilon a n, \quad n \in \mathbf{Z},$$

l – номер интервала. Подобные цепочки получили название лестниц Ванье–Штарка.

Достаточный для предварительного ознакомления с указанным направлением исследований список публикаций можно найти в [1].

Длительное время, однако, оставалась невыясненной даже структура спектра оператора H . Были неясны смысл перехода от H_0 к H_{eff} , а также спектральная интерпретация лестниц Ванье–Штарка. Позднее было установлено, что спектр оператора при $\varepsilon \neq 0$ является гладким, однократным и заполняет всю ось (см. [2, 3]). Этот результат сделал вопрос о лестницах Ванье–Штарка еще более интригующим.

Постепенно сложилось убеждение, что лестницы Ванье–Штарка описывают вещественные части серий резонансов, т. е. особенностей аналитического продолжения по E ядра резольвенты (см. [4–12]). Такое убеждение, однако, порождало новый вопрос – как согласовать ограниченность спектрального интервала Δ_l с тем, что лестница Ванье–Штарка равномерно распространяется на бесконечную спектральную ось.

В последнее время удалось развить систематическое обобщение всех элементов стандартных ВКБ-построений на уравнения вида

$$\mathcal{L}(\varepsilon x, x, -i \frac{d}{dx}) \psi = 0,$$

символ которых $\mathcal{L}(\xi, x, p)$ – периодическая функция второго аргумента. На этой основе полностью прояснился смысл перехода от оператора H к оператору H_{eff} (см. [1]) и возникла достаточная база для полного изучения свойств оператора H при $\varepsilon \rightarrow 0$.

В настоящей статье, основанной на [1, 13, 14], мы сможем точно исследовать спектральный смысл лестницы Ванье—Штарка и прояснить парадокс, создаваемый ограниченностью спектрального интервала и неограниченностью соответствующей лестницы.

С оператором H можно связать задачу рассеяния: волны, падающие на потенциал (рис. 1) из $(+)$ бесконечности (если $\epsilon > 0$), рассеиваются на потенциале и вновь убегают в $(+)$ бесконечность. Это рассеяние можно охарактеризовать коэффициентом отражения $r(E)$. Главной целью настоящей работы в конечном счете является изучение свойств этого коэффициента при $\epsilon \rightarrow 0$. Как мы увидим, они оказываются довольно экзотическими.¹

Это обстоятельство, конечно, не является случайным. Объясняется оно тем, что спектры операторов H при $\epsilon \neq 0$ и H_0 существенно отличаются друг от друга. Для таких ситуаций как раз и характерно возникновение резонансов (см., например, [15, 16], где описан целый набор разнообразных примеров подобного типа). Пример, которому посвящена настоящая статья, следует считать в ряде отношений несколько необычным. Появляющиеся в этом случае резонансы, по-видимому, не могут быть проконтролированы (даже асимптотически) методами обычной теории возмущений; как уже отмечалось, они характеризуются условиями квантования, возникающими в рамках ВКБ-приближения.

1.2. Кратко опишем содержание работы. Следующий параграф посвящен описанию основных объектов, в том числе коэффициента отражения. Завершается параграф выводом формулы следа, которая связывает определитель возмущения (или функцию спектрального сдвига) с коэффициентом отражения. В этом параграфе малость ϵ не предполагается. Третий параграф, напротив, посвящен систематическому изложению асимптотической теории решений уравнения $H\psi = E\psi$ при $\epsilon \rightarrow 0$. Почти все факты, которые нам понадобятся, можно найти в литературе, однако на многих деталях мы вынужденно останавливаемся здесь более подробно. В конечном счете этот параграф является центральным в техническом отношении и дальнейшие результаты возникают как следствия проведенных здесь построений. Четвертый параграф содержит асимптотическое описание при $\epsilon \rightarrow 0$ коэффициента отражения. Здесь, в частности, выясняется точный смысл лестницы Ванье—Штарка. Наконец, последний параграф посвящен выяснению спектрального смысла резонансных состояний и сопоставлению спектральных разложений для операторов H и H_0 при $\epsilon \rightarrow 0$.

Список литературы очень лаконичен, но мы надеемся, что по указанным источникам можно достаточно полно восстановить литературу, относящуюся к теме статьи.

§ 2. Коэффициент отражения

В этом параграфе будет изучаться уравнение

$$-\psi_{xx} + p(x)\psi - \epsilon x\psi = E\psi. \quad (2.1)$$

Будут описаны решения с характерным поведением при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$ и установлены связи между ними. Как следствие возникнут коэффициент отражения и функция, подобная обычной функции Йоста. Сделав дополнительные предположения относительно функции p , мы сможем ввести в рассмотрение резонансы. В заключение будет установлена связь между коэффициентом отражения и определителем возмущения (формула следа). Параметр ϵ не будет предполагаться малым, мы будем считать лишь, что $\epsilon > 0$. Кроме того, на протяжении всей работы в дальнейшем будет считаться выполненным условие нормировки

$$\int_0^a p(x) dx = 0. \quad (2.2)$$

Это условие не ограничивает общности рассмотрений.

¹ Нам неизвестны другие работы, посвященные изучению $r(E)$.

2.1. Решение g . Определим голоморфную ветвь корня $z \rightarrow \sqrt{z}$ на плоскости с разрезом $z = x - i0, x \geq 0$ так, что $\text{Im} \sqrt{z} > 0$.

Предложение 2.1. При $E \in \mathbb{C}$ существует единственное с точностью до нормировочного множителя решение $g(x, E)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $g(x, E) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow -\infty$. Оно может быть нормировано асимптотическим соотношением

$$g(x, E) = \frac{1}{\sqrt{-2i\sqrt{E+ex}}} \exp(-E\epsilon) \exp\left(i \int_x^{\epsilon} \sqrt{E+et} dt\right) [1 + o(1)]. \quad (2.3)$$

Решение g и его производная g по x — целые функции. Асимптотическое представление (2.3) можно дифференцировать любое число раз по x и E . При $E \in \mathbb{R}$ g вещественно. Решение g удовлетворяет соотношению

$$g(x+a, E) = g(x, E+ea). \quad (2.4)$$

Формула (2.4) может быть представлена в следующем виде:

$$g(x, E) = g_1(x, E + \xi),$$

причем g_1 зависит от первого аргумента периодически.

Доказательство предложения носит стандартный характер, поэтому мы лишь наметим его план. Первый шаг состоит в использовании подстановки Лиувилля:

$$x \rightarrow \xi = i \int_x^{x_0} \sqrt{E+et-p(t)} dt,$$

$$\psi(x) \rightarrow y(\xi) = \sqrt{-2i\sqrt{E+ex-p(x)}} \psi(x).$$

Функция y удовлетворяет уравнению

$$y_{\xi\xi} - y - Q(\xi, E)y = 0,$$

где

$$Q = \frac{1}{2(E+ex-p(x))} S,$$

S — производная Шварца функции $\xi(x)$:

$$S = \frac{\xi'''}{\xi'} - \frac{3}{2} \left(\frac{\xi''}{\xi'}\right)^2 = \frac{1}{2E+ex-p} - \frac{5}{8} \frac{(e-p)^2}{(E+ex-p)^2}.$$

Считая, что E принадлежит фиксированному кругу $|E| < R$, можно выбрать $x_0 = x_0(R)$ достаточно большим отрицательным, так что функция $E+ex-p(x)$ не будет иметь корней при $x \leq x_0$. Интервалу $x \leq x_0$ на плоскости ξ будет соответствовать контур Γ , расположенный в некоторой окрестности полуоси $\xi \leq 0$. Функция $Q = Q(\xi, E)$ окажется при этом голоморфной функцией E . Легко видеть, что при $\xi \rightarrow -\infty$ Q имеет порядок $|\xi|^{-4/3}$, поэтому для функции y , убывающей при $\xi \rightarrow -\infty$, можно выписать вольтеровское интегральное уравнение

$$y(\xi) = e^{\xi} + \int_{-\infty}^{\xi} \text{sh}(\xi - \xi') Q(\xi') y(\xi') d\xi'.$$

Контур интегрирования, соединяющий точки $-\infty$ и ξ , лежит на Γ . Стандартное рассмотрение этого уравнения показывает, что оно имеет решение с асимптотикой $\exp \xi$ при $\xi \rightarrow -\infty$, голоморфное относительно E , $|E| < R$. Как следствие, отвечающее этому решению, решение ψ уравнения (2.1) стремится к нулю при $x \rightarrow -\infty$, имеет асимптотику, продиктованную связью между y и ψ , и является голоморфным относительно E . Данные Коши этого решения в какой-либо точке $x \leq x_0$ — голоморфные функции E . Это значит, что решение ψ определено и голоморфно относительно E при $x \in \mathbb{R}$.

Перенормируем построенное решение, положив

$$g(x, E) = e^{i\Phi(E)} \psi(x, E),$$

где

$$\begin{aligned} \Phi &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\int_x^{-E/\epsilon} \sqrt{E + \epsilon t} dt - \int_x^{x_0} \sqrt{E + \epsilon t - p(t)} dt \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{x_0} (\sqrt{E + \epsilon t} - \sqrt{E + \epsilon t - p(t)}) dt - \int_{x_0}^{-E/\epsilon} \sqrt{E + \epsilon t} dt. \end{aligned}$$

Первый интеграл

$$\int_{-\infty}^{x_0} [\sqrt{E + \epsilon t} - \sqrt{E + \epsilon t - p(t)}] dt = \int_{-\infty}^{x_0} \frac{p(t)}{\sqrt{E + \epsilon t} + \sqrt{E + \epsilon t - p(t)}} dt$$

сходится в силу условия нормировки (2.2). Решение g имеет асимптотику (2.3) и по-прежнему является голоморфным при $|E| < R$. Поскольку это решение уже не зависит от x_0 и тем самым от R , оно фактически — целая функция E .

Существование решения g с асимптотическим поведением и аналитическими свойствами, объявленными в предложениях 2.1, доказано. Остальные свойства решения g не нуждаются в особых комментариях.

2.2. Решение f . Справедливо

Предложение 2.2. При $\text{Im } E \geq 0$ существует решение $f(x, E)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее асимптотическому условию

$$f(x, E) = \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{E + \epsilon x}}} \exp\left(i \int_{-E/\epsilon}^x \sqrt{E + \epsilon t} dt\right) [1 + o(1)]. \quad (2.5)$$

Решения f и его производная f' по x — непрерывные функции голоморфны относительно E при $\text{Im } E > 0$. Асимптотическое представление (2.5) можно любое число раз дифференцировать по x и E . Решение f удовлетворяет соотношению

$$f(x + a, E) = f(x, E + \epsilon a). \quad (2.6)$$

Как и выше, последнее соотношение означает, что решение может быть представлено в виде

$$f(x, E) = f_1(x, E + \xi),$$

где f_1 периодически зависит от первого аргумента.

План доказательства в существенном повторяет план доказательства предложения 2.1. Поскольку, однако, в дальнейшем нам придется анализировать это доказательство более детально, повторим некоторые его эпизоды явным образом.

Подстановку Лиувилля на этот раз зададим формулами

$$x \rightarrow \xi = \int_{x_0}^x \sqrt{E + \epsilon t - p(t)} dt,$$

$$\psi(x) \rightarrow y(\xi) = \sqrt{2\sqrt{E + \epsilon x - p(x)}} \psi(x).$$

Уравнение для y имеет вид

$$y_{\xi\xi} + y - Qy = 0,$$

где

$$Q = \frac{1}{2(E + \epsilon x - p(x))} S, \quad S = -\frac{1}{2} \frac{p''}{E + \epsilon x - p} - \frac{5}{8} \frac{(\epsilon - p')^2}{(E + \epsilon x - p)^2}.$$

Выпишем явно интегральное уравнение для y :

$$y(\xi) = e^{i\xi} - \int_{\xi}^{+\infty} \sin(\xi - \xi') Q(\xi') y(\xi') d\xi'. \quad (2.7)$$

Контур интегрирования, соединяющий точки ζ и $+\infty$, является образом интервала $[x, \infty)$, его вид зависит от E . Если $\text{Im } E \geq 0$, то $\text{Re } (i\zeta) \leq 0$. Это позволяет без затруднений исследовать интегральное уравнение и установить существование решения с асимптотикой $e^{i\zeta}$. На других деталях мы не будем останавливаться.

Наряду с решением f при $\text{Im } E \leq 0$ определено решение

$$f^*(x, E) = \overline{f(x, \bar{E})};$$

черта обозначает комплексное сопряжение. При $\text{Im } E = 0$ решения f и f^* образуют фундаментальную систему

$$w(f, f^*) \equiv f f^* - f' f^* = -i. \quad (2.8)$$

Для того чтобы выявить резонансы, о которых шла речь во Введении, потребуются дополнительные предположения относительно периодического потенциала p . Мы будем считать в дальнейшем выполненным

Условие А: функция $p(x)$ голоморфна в полосе $|\text{Im } x| < \alpha$ при некотором α .

При выполнении условия А справедливо

Предложение 2.3. Решение f допускает аналитическое продолжение по E в полосу $\text{Im } E > -\epsilon\alpha$.

Поясним это утверждение. Повторяя план доказательства предложения 2.2, обратимся к интегральному уравнению (2.7) для функции u . Непосредственному переносу стандартных рассуждений, с помощью которых устанавливается разрешимость уравнения, на случай $\text{Im } E < 0$ препятствует то обстоятельство, что в этом случае $\text{Re } i\zeta \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \infty$. Легко сообразить, что это лишает смысла интегральное уравнение на классе функций, которые ведут себя асимптотически как свободный член уравнения. Вспомним, однако, об условии А и, пользуясь аналитичностью свободного члена и ядра уравнения по x (вначале при $\text{Im } E \geq 0$), заменим контур интегрирования Γ на новый контур Γ' , который в переменной x при достаточно большом x совпадает с прямой $\text{Im } x = \alpha_1$, $0 < \alpha_1 < \alpha$. На новом контуре $\text{Re } i\zeta \rightarrow -\infty$. В самом деле,

$$\zeta = \int_{x_0}^x \sqrt{E + et - p(t)} dt = \int_{x_0}^x [\sqrt{E + et - p(t)} - \sqrt{E + et}] dt + \int_{x_0}^x \sqrt{E + et} dt.$$

Первый интеграл ограничен в силу условия (2.2), из которого благодаря аналитичности и периодичности p следует

$$\int_0^a p(x_1 + ix_2) dx_1 = 0, \quad |x_2| < \alpha.$$

Это значит, что неограниченность $\text{Re } i\zeta$ полностью определяется вторым интегралом:

$$\text{Re } i\zeta \sim -\frac{1}{\epsilon} (\epsilon x_1)^{1/2} (E_2 + \epsilon x_2),$$

$E = E_1 + iE_2$, $x = x_1 + ix_2$. Отсюда видно, что $\text{Re } i\zeta$ ограничена при $E_2 + \epsilon x_2 \geq 0$. Таким образом, рассматривая уравнение (2.7) на Γ' , мы можем повторить построения, гарантирующие существование решения u с асимптотикой $e^{i\zeta}$ при $E_2 \geq 0$, а также рассмотреть его аналитическое продолжение в полосу $E_2 \geq -\epsilon x_2$, т. е. в конечном счете в полосу $\text{Im } E > -\epsilon\alpha$. Нет необходимости развивать эти пояснения более подробно, ограничимся ими.

При выполнении условия А функция f^* допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\text{Im } E < \epsilon\alpha$. В полосе $|\text{Im } E| < \epsilon\alpha$ определены оба решения f и f^* , они образуют в этой полосе фундаментальную систему и удовлетворяют соотношению (2.8).

2.3. Коэффициент отражения. Существует такая функция $M = M(E)$, $E \in \mathbf{R}$, что справедливо соотношение

$$g(x, E) = M(E) \overline{f(x, E)} + \overline{M(E)} f(x, E). \quad (2.9)$$

Справедливо представление

$$M = \frac{1}{i} w(g, f). \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что M определена при $\text{Im } E \geq 0$ и голоморфна при $\text{Im } E > 0$. Поскольку решения f и g заведомо линейно независимы при $\text{Im } E \geq 0$, то $M(E) \neq 0$. Благодаря (2.4) и (2.6) M обладает свойством периодичности

$$M(E + \epsilon a) = M(E). \quad (2.11)$$

Отношение

$$r(E) = \frac{\overline{M(E)}}{M(E)}$$

может быть названо коэффициентом отражения. Коэффициент отражения обладает свойством

$$|r(E)| = 1 \text{ и, вследствие (2.11), } r(E + \epsilon a) = r(E).$$

При выполнении условия А соотношение (2.9) распространяется на полосу $|\text{Im } E| < \epsilon a$:

$$g = Mf^* + M^*f, \quad M^*(E) = \overline{M(\overline{E})}. \quad (2.12)$$

Функция M допускает аналитическое продолжение на полуплоскость $\text{Im } E > -\epsilon a$ и может иметь корни в полосе $-\epsilon a < \text{Im } E < 0$. Пусть $E_0^{(l)}$, $l = 1, 2, \dots, L$ – корни, расположенные в „фундаментальной области” $-\epsilon a < \text{Im } E < 0$, $0 \leq \text{Re } E < \epsilon a$ и упорядоченные по уменьшению $\text{Im } E$. Число корней L может быть равно $0, 1, 2, \dots, \infty$. Каждому подобному корню соответствует бесконечная периодическая цепочка корней функции M

$$E_n^{(l)} = E_0^{(l)} + \epsilon a n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

расположенных в полосе $-\epsilon a < \text{Im } E < 0$. Во всякой подполосе вида $-\epsilon a' < \text{Im } E < 0$, $\alpha' < \alpha$, функция M может иметь лишь конечное число таких цепочек корней с номерами $l = 1, 2, \dots, L(\alpha')$. При $\text{Im } E > -\epsilon a'$ функция M допускает факторизацию

$$M(E) = dM(E) \prod_{l=1}^{L(\alpha')} \left(e^{\frac{i2\pi(E - E_0^{(l)})}{\epsilon a}} - 1 \right),$$

где $dM(E)$ – периодическая функция, не имеющая корней.

Резольвента $R(E) = (H - EI)^{-1}$ определена при $\text{Im } E \neq 0$. Ее ядро дается формулами

$$R(x, y, E) = \begin{cases} -\frac{N_+(x, y, E)}{iM(E)}, & \text{Im } E > 0, \\ \frac{N_-(x, y, E)}{iM^*(E)}, & \text{Im } E < 0, \end{cases} \quad (2.13)$$

где $N_+(x, y, E)$, $N_-(x, y, E)$ – голоморфные функции в полуплоскостях $\text{Im } E > -\epsilon a$ и $\text{Im } E < \epsilon a$ соответственно:

$$\begin{aligned} N_+(x, y, E) &= g(x, E)f(y, E) \quad \text{при } x \leq y, \\ N_-(x, y, E) &= g(x, E)f^*(y, E) \quad \text{при } x \leq y. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Последние формулы показывают, что аналитическое продолжение ядра резольвенты из верхней полуплоскости имеет полюсы в корнях $E_n^{(l)}$ функции M , аналитическое продолжение ядра из нижней полуплоскости имеет полюсы в корнях $E_n^{(l)*} = \overline{E_n^{(l)}}$ функции M^* . Таким образом, в согласии со стандартной терминологией корни $E_n^{(l)}$ и $E_n^{(l)*}$ могут быть названы резонансами.

2.4. Формула следа. Введем в рассмотрение оператор с чисто линейным потенциалом

$$H^0 = -\frac{d^2}{dx^2} - \epsilon x.$$

Заметим, что операторы H и H^0 в $L_2(\mathbb{R})$ имеют одинаковые спектры. Ядро $R^0(x, y, E)$ резольвенты $R^0(E) = (H^0 - EI)^{-1}$ при $\text{Im } E \neq 0$ дается формулами (2.14), (2.13) с заменой $g \rightarrow g_0$, $f \rightarrow f_0$, $M \rightarrow M_0$. Здесь g_0 и f_0 – решения дифференциального уравнения $H^0 \psi = E \psi$, фиксируемые асимптотическим поведением (2.3) при $x \rightarrow -\infty$ и (2.5) при

$x \rightarrow +\infty$ соответственно. Решения g_0 и f_0 , очевидно, выражаются через стандартные функции Эйри. Для $M_0 = iw(f_0, g_0)$ легко получить

$$M_0 = e^{i\pi/4}.$$

Рассмотрим при $\text{Im } E > 0$ след разности резольвент $R(E) - R^0(E)$, понимаемый как след интегрального оператора:

$$\text{tr} [R(E) - R^0(E)] = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{g(x, E)f(x, E)}{-iM(E)} - \frac{g_0(x, E)f_0(x, E)}{-iM_0} \right] dx. \quad (2.15)$$

Справедливо

Предложение 2.3. При $\text{Im } E > 0$ $\text{tr} [R(E) - R^0(E)]$ конечен и связан с функцией M соотношением

$$\text{tr} [R(E) - R^0(E)] = -\frac{d}{dE} \ln M(E).$$

Очевидным следствием предложения является соотношение

$$2i \text{Im} \text{tr} [R(z) - R^0(z)] \Big|_{z=E+i0} = \frac{d}{dE} \ln r(E).$$

Доказательство сформулированного предложения, основываясь на стандартной схеме доказательства подобных утверждений, требует, однако, введения дополнительных объектов. Фиксируем поэтому явно основные этапы.

Из дифференциального уравнения для f, g легко получить соотношение

$$fg = g''f - f''g = (\dot{f}g' - f'\dot{g})'$$

(аналогичное соотношение верно для f_0, g_0). Здесь точка означает дифференцирование по E , штрих — дифференцирование по x .

Выражение (2.15) после подстановки указанных соотношений запишется в виде

$$\text{tr} [R(E) - R^0(E)] = i \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{M} (\dot{f}g' - f'\dot{g}) \Big|_{-T}^T - e^{i\pi/4} (\dot{f}_0 g'_0 - f'_0 \dot{g}_0) \Big|_{-T}^T \right]. \quad (2.16)$$

Для проведения дальнейших вычислений введем решение h уравнения (2.1), которое экспоненциально растет при $x \rightarrow -\infty$. Это решение фиксируется асимптотическим соотношением

$$h(x, E) = \frac{1}{\sqrt{-2i\sqrt{E+ex}}} \exp\left(-i \int_x^{-E/\epsilon} \sqrt{E+et} dt\right) [1 + o(1)]$$

с точностью до слагаемого вида $\text{const} \cdot g$. Решение g и h образует фундаментальную систему

$$w(h, g) = 1. \quad (2.17)$$

Разлагая решение f по указанной системе, получим

$$f(x, E) = C(E)g(x, E) + D(E)h(x, E). \quad (2.18)$$

Понятно, что функция $C(E)$ определена неоднозначно и зависит от выбора h . Этот факт, однако, не оказывает влияния на результаты дальнейших вычислений. Функция $D(E)$ определена однозначно и связана с M соотношением

$$D = -iM. \quad (2.19)$$

Это следует из соотношения $w(f, g) = Dw(h, g)$ с учетом (2.10) и (2.17).

Полагая $p(x) \equiv 0$, т. е. рассматривая уравнение $H^0 \psi = E\psi$, получим

$$f_0 = C_0 g_0 + D_0 f_0,$$

причем

$$D_0 = e^{-in/4}. \quad (2.20)$$

Подставляя далее в (2.16) разложение (2.12) для функции g при $x = T$, разложение (2.18) для функции f при $x = -T$ и аналогичные формулы для g_0, f_0 , осуществим предельный переход при $T \rightarrow \infty$. При этом воспользуемся тем, что

$$\begin{aligned} g(-T, E) \rightarrow 0, g_0(-T, E) \rightarrow 0, \\ f^*(T, E) - f_0^*(T, E) \rightarrow 0, h(-T, E) - h_0(-T, E) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

если $T \rightarrow \infty$.

Кроме того, при $\text{Im } E > 0$ $f(T, E) \rightarrow 0, f_0(T, E) \rightarrow 0$, если $T \rightarrow \infty$.

Учитывая указанные предельные свойства решений, а также соотношения (2.17), (2.19), (2.20), после несложных преобразований получим требуемую формулу следа.

§ 3. Асимптотическое поведение решений при $\epsilon \rightarrow 0$

В этом параграфе собраны необходимые сведения об асимптотическом поведении решений уравнения (2.1) при $\epsilon \rightarrow 0$. Представленный здесь материал не вполне оригинален: мы следуем в основном собственным предшествующим статьям [1, 13, 14]. В способе представления материала мы, однако, отклоняемся от цитированных статей с тем, чтобы приспособить изложение к потребностям задачи. На доказательствах останавливаться мы почти не станем: помимо того что приведенные здесь результаты можно толковать лишь как переформулировки результатов из [1, 13, 14], у них есть образцы в стандартном ВКБ-подходе, следуя которому можно вести все доказательства.

3.1. Задача с периодическим потенциалом. Дополним сказанное во Введении о дисперсионной функции и структуре спектра оператора H_0 (см., например, [17, 18, 19]).

Некоторые из лагун в спектре оператора H_0 могут отсутствовать, и тогда разделяемые ими спектральные интервалы будут сливаться. Соответствующие ветви дисперсионной функции при этом могут быть объединены в единую гладкую ветвь, имеющую период $2a^*$. Возможно слияние и большего, в том числе бесконечного числа спектральных интервалов. Условимся объединять спектральные интервалы, не разделенные лагунами, в единый спектральный интервал и сопоставлять такому расширенному интервалу единую ветвь дисперсионной функции.

Спектр H_0 содержит $N, N = 0, 1, \dots, \infty$, конечных спектральных интервалов $\Delta_l = [E_{m-1}, E_m], E_m < E_{m+1}, m = 2l - 1,^2 l = 1, \dots, N$, разделенных невырожденными лагунами $\bar{\Delta}_l = (E_m, E_{m+1})$.³ Если N конечно, спектр содержит бесконечный спектральный интервал $\Delta_{N+1} = [E_{2N}, \infty)$.

Каждому спектральному интервалу Δ_l соответствует ветвь \mathcal{E}_l дисперсионной функции. Она имеет некоторый минимальный период $a_l^* = r_l a^*, r_l = 1, 2, \dots, +\infty$, является четной и на полуинтервале $(0, a_l^*/2)$ — строго монотонной.

Различные ветви \mathcal{E}_l могут быть объединены в единую аналитическую функцию $\hat{\mathcal{E}}$, устанавливающую соответствие между двумя двулиственными римановыми поверхностями E и K ; см. рис. 3, на котором изображены точки ветвления и разрезы. Введены обозначения $k_l = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^l a_j^*, b_l = k_l + ih_l, h_l > 0$ — некоторые положительные числа, зависящие от потенциала $p, b_0 = \infty$. Пунктирная кривая должна показывать, что точки E

² Это соотношение между l и m будет подразумеваться всюду в дальнейшем, если l и m встречаются в одном и том же соотношении.

³ Мы сохраняем обозначения § 1, хотя их смысл, конечно, несколько меняется.

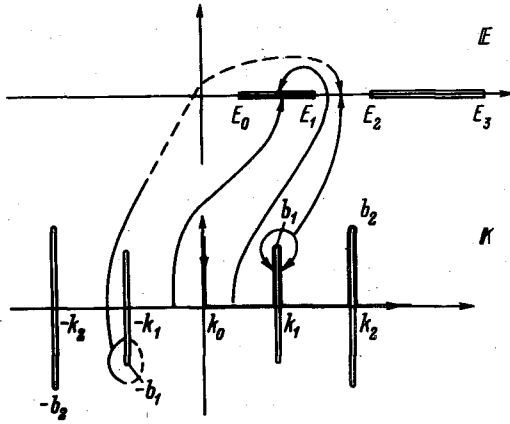


Рис. 3.

петлям, полуохватывающим разрезы, соответствуют последовательные лакуны.

Определим точки σ_m на \mathcal{K} соотношением $\xi(\sigma_m) = E_m$. Проекция точек σ_m и σ_{m+1} на плоскость S совпадают с k_1 .

Нам понадобятся также некоторые сведения о решениях вида

$$\psi(x, k) = e^{ikx} \varphi(x, k), \quad (3.1)$$

рассмотренных во Введении. Их можно нормировать по-разному. В частности, можно положить

$$\psi(x, k) = c(x, E) + m(E)s(x, E).$$

Здесь s и c — решения уравнения

$$-\psi'' + p(x)\psi = E\psi, \quad (3.2)$$

стандартно нормированные данными Коши: $c(0, E) = 1$, $c'(0, E) = 0$, $s(0, E) = 0$, $s'(0, E) = 1$. Через m обозначена функция

$$m(E) = [s'(E) - c(E) - \sqrt{F^2(E) - 1}] / 2s(E),$$

где $s(E) = s(a, E)$, $s'(E) = s'(a, E)$, аналогично для c . Корень $\sqrt{F^2 - 1}$ определен на римановой поверхности E . На спектральных интервалах $|F| \leq 1$, в их границах $F^2 = 1$, в лакунах $|F| > 1$. Функция F связана с дисперсионной функцией соотношением

$$F(E) = \cos ka.$$

Введем обозначения

$$w(f, g) = fg' - f'g, \quad \langle f, g \rangle = \int_0^a f(x)g(x)dx.$$

Для решений вида (3.1) справедливы соотношения (см., например, [18])

$$\langle \psi(k), \psi(-k) \rangle = -2F_E(E)/s(E),$$

$$w(\psi(k), \psi(-k)) = 2\sqrt{F^2(E) - 1}/s(E).$$

Последние формулы показывают, что

$$\frac{dk}{dE} w(\psi(k), \psi(-k)) = -\frac{i}{a} \langle \psi(k), \psi(-k) \rangle. \quad (3.3)$$

Будем считать известными также следующие асимптотические формулы

$$k(\xi) = \sqrt{\xi} - \frac{q(a)}{2a\sqrt{\xi}} - \frac{3iq^2(a)}{8a\xi} + O(\xi^{-3/2}), \quad (3.4)$$

лежат на „другом” листе римановой поверхности.

Рассмотрим на римановой поверхности K ориентированную кривую \mathcal{K} , помеченную на рисунке. Функция ξ , ограниченная на \mathcal{K} (на одном из листов поверхности K), монотонно отображает \mathcal{K} на R . Мнимой полуоси отвечает „бесконечная лакуна” $\Delta_0 = (-\infty, E_0)$. Последовательным отрезкам вещественной оси соответствуют последовательные спектральные интервалы, а ограничения функции ξ на эти отрезки совпадают с соответствующими (полу)ветвями дисперсионной функции. Последовательным

$$\varphi(x, k) = 1 + \frac{i}{2\sqrt{\varepsilon}} q(x) + O(\varepsilon^{-1}), \quad (3.5)$$

где

$$q(x) = \int_0^x p(t) dt.$$

Для их справедливости следует предположить $\text{Im} \sqrt{\varepsilon} \geq \kappa > 0$. Если выполнено (2.2), то формула (3.4) упрощается

$$k(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} + O(\varepsilon^{-3/2}). \quad (3.6)$$

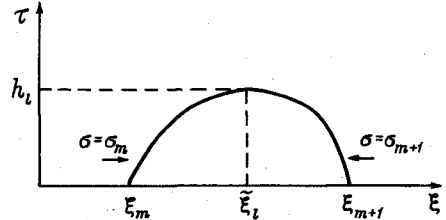


Рис. 4.

3.2. **Изоэнергетические кривые.** Обсудим структуру изоэнергетических кривых $I_l(E)$:

$$\varepsilon_l(k) - \xi = E \quad (3.7)$$

на плоскости (ξ, k) , $\xi, k \in \mathbf{R}$, а также изоэнергетической кривой $I(E)$:

$$\hat{\varepsilon}(k) - \xi = E \quad (3.8)$$

на множестве (ξ, k) , $\xi \in \mathbf{R}$, $k \in \mathcal{K}$.

В уравнениях (3.7) и (3.8) E является параметром, роль которого фактически сводится к сдвигу кривой по оси ξ на $-E$.

Уравнение (3.7) определяет на плоскости кривую, которая лишь сдвигом отличается от графика функции ε_l . Назовем точки $\xi_m = E_m - E$ точками поворота. Проекция $I_l(E)$ на ось ξ покрывает сдвинутый на $-E$ спектральный интервал $\Delta_l(E) = [\xi_{m-1}, \xi_m]$. Если $\xi \notin \Delta_l(E)$, уравнение (3.7) не имеет вещественных решений k . Пусть $\xi \in \Delta_l$, $\Delta_l = (\xi_m, \xi_{m+1})$ — сдвинутая лакуна. Решения k уравнения (3.8) в этом случае лежат на берегах разреза $k = k_l + it$, $0 < \tau \leq h_l$. Качественный характер связи между ξ и $k = \sigma + it$, $\sigma = \sigma_m, \sigma_{m+1}$ представлен на рис. 4.

Условимся обозначать вещественную ветвь кривой I , лежащую над Δ_l , через γ_l , комплексную ветвь, лежащую над $\bar{\Delta}_l$, через $\bar{\gamma}_l$.

3.3. **Асимптотическое решение f .** Отрезок γ изоэнергетической кривой, допускающий представление $k = \hat{k}(\xi)$, в котором $\xi \in \Delta = [\alpha, \beta]$ — некоторый интервал, а \hat{k} — гладкая функция, будем называть регулярно проектируемым на ось ξ . Всякому такому отрезку γ независимо от того, является он вещественным или комплексным, можно сопоставить некоторое формальное асимптотическое решение уравнения (2.1). Это решение имеет следующую структуру

$$f_\gamma(\xi, x, E, \varepsilon) = \exp\left(\frac{i}{\varepsilon} \int_{\gamma(\xi)} k d\xi\right) \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n f_n(\xi, x, E). \quad (3.9)$$

Здесь $\gamma(\xi) = \{(n, k) : (n, k) \in \gamma, n \in [\alpha, \xi]\}$. Функция (3.9) фиксируется уравнением (2.1) и условием периодичности (с периодом a) относительно x с точностью до произвольного множителя вида

$$N(E, \varepsilon) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n N_n(E).$$

Ряд N считается формальным.

Старший член ряда допускает явное описание

$$f_\gamma \sim f_0 |\hat{\varepsilon}(k)|^{-1/2} \exp\left(\int_{\gamma(\xi)} \left[\frac{i}{\varepsilon} k d\xi + \omega\right] \varphi(x, k)\right). \quad (3.10)$$

Здесь φ — периодический множитель решения (3.1), который может быть нормирован произвольно, но должен считаться гладко зависящим от k . Через ω обозначена дифференциальная форма

$$\omega = -\frac{\langle \varphi(-k), d\varphi(k) \rangle}{\langle \varphi(-k), \varphi(k) \rangle}. \quad (3.11)$$

Нормировки $\varphi(x, k)$ и $\varphi(x, -k)$ в принципе независимы. Неопределенность в выборе $\varphi(x, k)$ поглощается постоянной f_0 (см. [1]).

В пределах произвола в конструкции ряда (3.9) его можно выбрать так, что будет выполняться соотношение

$$f_\gamma(\xi, x, E, \epsilon) = f_\gamma(\xi + E, x, \epsilon).$$

В дальнейшем мы будем рассматривать преимущественно решения указанного вида. На этом классе решений неопределенный множитель N перестает зависеть от E .

Решение (3.9) сохраняет асимптотический характер вне $\epsilon^{2\beta-\gamma}$, $\gamma > 0$, — окрестностей точек поворота (в переменной ξ). В данном случае это означает, что в указанной области члены ряда (3.9) допускают оценки вида

$$|\epsilon^n f_n| \leq c_n \epsilon^n, r_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

На любом интервале Δ , лежащем вне указанных окрестностей точек поворота, существует точное решение f_γ уравнения (2.1), допускающее асимптотическое представление

$$f_\gamma \sim \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \int_{\gamma(\xi)} k d\xi\right) \left[\sum_{n \geq 0} \epsilon^n f_n + O(\epsilon^\infty) \right]. \quad (3.12)$$

В качестве линейно-независимого решения можно взять ряд $f_\gamma^{(-)}$, сопоставляемый ветви $\gamma_- = \{(\xi, k) : (\xi, -k) \in \gamma\}$. Старший член дается формулой

$$f_\gamma^{(-)} \sim f_0^{(-)} |\hat{\xi}(k)|^{-1/2} \exp\left(\int_{\gamma_-(\xi)} \left[\frac{i}{\epsilon} k d\xi + \omega\right]\right) \varphi(x, -k). \quad (3.13)$$

В дальнейшем условимся полагать

$$f_0 = f_0^{(-)} = \sqrt{a},$$

тогда в старшем порядке

$$w(f_\gamma, f_\gamma^{(-)}) \sim (-i) \hat{\xi}(k) |\hat{\xi}(k)|^{-1} \exp\left(\int_{\gamma(\xi)} \omega + \int_{\gamma_-(\xi)} \omega\right) \langle \psi(k), \psi(-k) \rangle_{k=\hat{\xi}(\omega)}. \quad (3.14)$$

Будем считать это соотношение выполненным во всех порядках за счет перенормировки решений. Возможные скачки отношения $\hat{\xi} |\hat{\xi}|^{-1}$ должны компенсироваться скачками экспоненциального множителя.

Решение f_γ обладает существенно различным характером в зависимости от того, лежит γ на вещественной или комплексной ветви изоэнергетической кривой. В первом случае экспоненциальный множитель, оставаясь равным 1 по модулю, быстро осциллирует, во втором — он быстро растет или убывает по модулю.

В дальнейшем будем считать, что $\gamma \in I(E)$.

Обратимся к случаю вещественной ветви. Изменив нормировку решений, можно предполагать, что

$$\varphi(x, -k) = \overline{\varphi(x, k)} \quad \text{и} \quad \langle \varphi(-k), \varphi(k) \rangle = 1. \quad (3.15)$$

В этих условиях (см. (3.11)).

$$\omega = i\omega_0, \quad \omega_0 = \text{Im} \langle \varphi(k), d\varphi(k) \rangle.$$

Ясно, что $f_\gamma^{(-)} = \bar{f}_\gamma$ и выполняется соотношение (см. (3.3), (3.14), (3.15))

$$w(f_\gamma, \bar{f}_\gamma) = -i. \quad (3.16)$$

Назовем подобные решения f_γ , отвечающие вещественной ветви изоэнергетической кривой, стандартными.

В случае комплексной ветви решение ψ можно считать вещественным. Благодаря этому может считаться вещественной форма ω .

Если решения $\psi(x, k)$ и $\psi(x, -k)$ выбраны общим образом, то множители $\varphi(x, k)$, $|\hat{\xi}|^{-1/2}$ и $\exp \int \omega$ могут утрачивать в отдельных точках гладкость. Все особенности компенсируются, однако, при совместном рассмотрении сингулярных компонент решения.

В случае комплексной ветви введем новые обозначения

$$h_\gamma = f_\gamma, \quad g_\gamma = f_\gamma^{(-)},$$

где для $f_\gamma, f_\gamma^{(-)}$ см. (3.10), (3.13) соответственно.

Рассмотрим $w(h_\gamma, g_\gamma)$. Интеграл $\langle \psi(k), \psi(-k) \rangle = -2F_E(E)/s(E)$ вблизи границ лакуны с помощью умножения $\psi(x, k)$ и $\psi(x, -k)$ на один и тот же положительный множитель можно отнормировать: $\langle \psi(k), \psi(-k) \rangle = 1$. Интеграл от сингулярной формы ω может и должен быть определен так, чтобы выражение

$$\hat{\xi}(k) |\hat{\xi}(k)|^{-1} \exp \left(\int_{\gamma(\xi)} \omega + \int_{\bar{\gamma}(\xi)} \omega \right)$$

при переходе через особые точки оставалось не зависящим от ξ (с учетом $k = \hat{k}(\xi)$), $\xi \in \bar{\Delta}_l(E)$. Это означает, что при α , близких к ξ_m , будет выполняться соотношение

$$w(h_\gamma, g_\gamma) = (-1)^m. \quad (3.17)$$

Решения h_γ и g_γ также будут называться стандартными.

3.4. Точка поворота. В окрестности точки поворота уравнение (2.1) имеет формальное асимптотическое решение вида

$$w(\zeta, x, E, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \epsilon^{n/3 - 1/6} w_n(\zeta, x, E),$$

в котором $\zeta = \epsilon^{-2/3}(\xi - \xi_m)$. Предполагается, что w — периодическая или антипериодическая функция x в зависимости от периодичности или антипериодичности фактора $\exp i\sigma_m x$. Решение w будет зависеть от ξ и E только через $\xi + E$, если оно не зависит явно от E :

$$w = w(\zeta, x, \epsilon) = \sum_{n \geq 0} \epsilon^{n/3 - 1/6} w_n(\zeta, x).$$

Именно такие решения мы преимущественно и будем рассматривать.

Старший член ряда w имеет вид

$$w \sim w_0 \epsilon^{-1/6} A(\zeta) \psi_m(x).$$

Здесь $\psi_m(x) = \exp(i\sigma_m x) \varphi(\sigma_m, x)$ — единственное с точностью до нормировки решение уравнения (3.2) при $E = E_m$, периодическое или антипериодическое. Его можно считать вещественным. Функция A удовлетворяет уравнению

$$-\frac{1}{2\kappa_m} A'' - \zeta A = 0, \quad (3.18)$$

в котором $\kappa_m^{-1} = \hat{\xi}''(\sigma_m)$ — так называемая эффективная масса точки σ_m . Если $m = 2l - 1$, то $\kappa_m < 0$; если $m = 2l$, то $\kappa_m > 0$. Уравнение (3.18) сводится к стандартному уравнению Эйри (см. [20]):

$$A_{zz} = zA, \quad z = -\text{sign } \kappa_m (2|\kappa_m|)^{1/3} \zeta.$$

Решение w сохраняет асимптотический характер в $\epsilon^{7/12 + \gamma}$, $\gamma > 0$, — окрестности точки поворота (в переменной ξ). Это утверждение требует несколько более сложной интерпретации, чем формула (3.12), но мы не станем уточнять его, поскольку оно не понадобится нам в явном виде. В столь же несколько более сложном смысле верно и утверждение о существовании точного решения уравнения (2.1), для которого ряд w является асимптотическим разложением при $\epsilon \rightarrow 0$. Точные решения f_γ, h_γ и g_γ , соответствующие рядам f_γ, h_γ и g_γ , будут выбираться так, чтобы выполнялись соотношения, аналогичные (3.16) и (3.17).

Значение ряда w для нас состоит в том, что с его помощью в принципе можно устанавливать связь между формальными решениями вида f по разные стороны точки поворота. Для этого решение уравнения (3.18) следует заменить асимптотическим разложением при $\zeta \rightarrow \infty$ (см., например, [20]), после чего оно превращается в решение вида f или, может быть, в линейную комбинацию решений f, \bar{f} , различную при $\zeta \rightarrow +\infty$ и $\zeta \rightarrow -\infty$. Сопоставляя линейные комбинации, возникающие при $\zeta \rightarrow -\infty$ и $\zeta \rightarrow +\infty$, получим закон трансформации решений вида f при переходе через точку поворота.

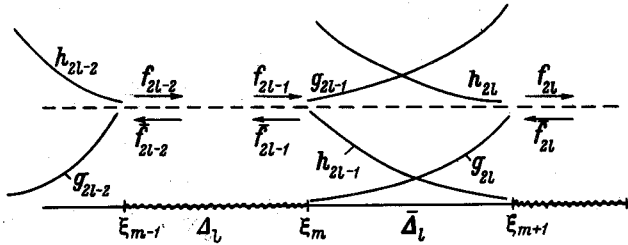


Рис. 5.

Введем вблизи точки поворота ξ_m по обе стороны от нее стандартные решения. Для этого в описании интервала $\Delta = [\alpha, \beta]$ положим $\alpha = \xi_m$. Обозначим полученные решения f_m, \bar{f}_m, h_m и g_m . Хотя эти решения утрачивают асимптотический смысл при $\xi \rightarrow \xi_m$, при $\xi \neq \xi_m$ они определены как корректные объекты. Рис. 5 поясняет качественный характер введенных решений.

Перейдем к описанию связи между решениями f_m, \bar{f}_m, h_m и g_m . Существует матрица $\hat{R}_m = \hat{R}_m(E, \epsilon)$, осуществляющая преобразование

$$\hat{R}_m \begin{pmatrix} f_m \\ \bar{f}_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Стрелка обозначает трансформацию формальных решений при переходе через точку поворота. Матрица \hat{R} имеет следующую структуру:

$$\hat{R}_m = E_m^{-1} R_m E_m,$$

где

$$E_m = \begin{pmatrix} \exp(i \frac{\sigma_m \xi_m}{\epsilon}) & 0 \\ 0 & \exp(-i \frac{\sigma_m \xi_m}{\epsilon}) \end{pmatrix},$$

а R не зависит от E . Структура матрицы R зависит от четности m :

$$R_m = \sigma^{m-1} X_m,$$

причем $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, а X_m зависит лишь от ϵ и имеет вид

$$X_m = \sum_{n \geq 0} X_{mn} \epsilon^n = \begin{pmatrix} u_m(\epsilon) & \overline{u_m(\epsilon)} \\ v_m(\epsilon) & \overline{v_m(\epsilon)} \end{pmatrix}.$$

Используя известные асимптотические формулы для решений уравнения Эйри, можно получить

$$X_{m0} = X_0 = \begin{pmatrix} e^{-i\pi/4} & e^{i\pi/4} \\ \frac{1}{2} e^{i\pi/4} & \frac{1}{2} e^{-i\pi/4} \end{pmatrix}.$$

Из (3.19) следует

$$\hat{R}_m \begin{pmatrix} f_m & f'_m \\ \bar{f}_m & \bar{f}'_m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} h_m & h'_m \\ g_m & g'_m \end{pmatrix},$$

поэтому в силу (3.16) и (3.17)

$$\det \hat{R}_m = i(-1)^m.$$

Соотношению (3.19) между формальными решениями отвечает соотношение между точными решениями

$$\hat{R}_m \begin{pmatrix} f_m \\ \bar{f}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix}, \quad \hat{R}_m = E_m^{-1} R_m E_m, \quad R_m = \sigma^{m-1} X_m.$$

при этом

$$X_m = \begin{pmatrix} u_m & \overline{u_m} \\ v_m & \overline{v_m} \end{pmatrix} \sim X_m(I + \epsilon^\infty).$$

Здесь ϵ^∞ обозначает матрицу, элементы которой убывают быстрее любой степени ϵ .

3.5. Переход через интервал. Пусть точки ξ_{m-1} и ξ_m разделены интервалом Δ_l . Несложно убедиться, что справедливо соотношение

$$\hat{Y}_l \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{m-1} \\ \overline{\mathbf{f}_{m-1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \overline{\mathbf{f}_m} \end{pmatrix},$$

причем матрица \hat{Y}_l имеет следующую структуру:

$$\hat{Y}_l = \begin{pmatrix} \hat{y}_l & 0 \\ 0 & \hat{y}_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_l^{-1} = \hat{y}_l, \quad \hat{y}_l = \exp i\hat{\Phi}_l,$$

$$\hat{\Phi}_l = -\int_{\gamma_l} \left(\frac{k}{\epsilon} d\xi + \omega_0 \right) + \Phi_l', \quad \Phi_l' = \sum_{n \geq 1} \Phi_{ln} \epsilon^n.$$

Объединяя этот результат с результатами предыдущего пункта, получим

$$\hat{S}_l \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{m-1} \\ \mathbf{g}_{m-1} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{h}_m \\ \mathbf{g}_m \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{S}_l = E_m^{-1} S_l E_{m-1}, \quad S_l = X_m Y_l X_{m-1}^{-1} \sigma, \quad Y_l = E_m \hat{Y}_l E_{m-1}^{-1}. \quad (3.20)$$

Матрица Y_l имеет вид

$$\begin{pmatrix} y_l & 0 \\ 0 & y_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad y_l = \exp i\Phi_l, \quad \Phi_l = \int_{\gamma_l} \left(\frac{\xi}{\epsilon} dk - \omega_0 \right) + \Phi_l'.$$

Выделим явно зависимость Φ_l от аргумента E , который входит только в первое слагаемое:

$$\Phi_l = \frac{a_l^*}{2\epsilon} (\Omega_l - E), \quad \Omega_l = \frac{2}{a_l^* \gamma_l} \left[\int_{\gamma_l} \hat{\xi}(k) dk - \epsilon \omega_0 \right] + \epsilon \Phi_l',$$

Ω_l не зависит от E .

Пусть теперь точки ξ_m и ξ_{m+1} разделены интервалом $\bar{\Delta}_l$. Тогда

$$\hat{Z}_l \begin{pmatrix} \mathbf{h}_m \\ \mathbf{g}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{m+1} \\ \mathbf{g}_{m+1} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{Z}_l = \begin{pmatrix} \hat{z}_l & 0 \\ 0 & -\hat{z}_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{z}_l = \exp \Psi_l,$$

$$\Psi_l = -\int_{\gamma_l} \left(i \frac{k}{\epsilon} d\xi + \omega \right) + \psi_l', \quad \psi_l' = \sum_{n \geq 1} \psi_{ln} \epsilon^n.$$

Интеграл от формы ω ввиду ее сингулярности в точке $\xi = \tilde{\xi}_l$ требует специального толкования: он должен пониматься в смысле главного значения. Заметим, что качественная структура матрицы \hat{Z}_l ясна из ее диагональности, из выражения для решения \mathbf{h} и из формулы (3.17).

Отсюда следует

$$\hat{T}_l \begin{pmatrix} \mathbf{f}_m \\ \overline{\mathbf{f}_m} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{f}_{m+1} \\ \overline{\mathbf{f}_{m+1}} \end{pmatrix},$$

где

$$\hat{T}_l = E_{m+1}^{-1} T_l E_m, \quad T_l = X_{m+1}^{-1} \sigma Z_l X_m, \quad Z_l = E_{m+1} \hat{Z}_l E_m^{-1}, \quad (3.21)$$

$$Z_l = \begin{pmatrix} z_l & 0 \\ 0 & -z_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad z_l = \exp \psi_l, \quad \psi_l = \int_{\gamma_l} \left(i \frac{\xi}{\epsilon} dk - \omega \right) + \psi_l'.$$

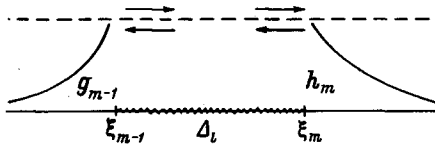


Рис. 6.

Нетрудно видеть, что матрица Z_l не зависит от E . Положим

$$\mu_l^0 = \frac{i}{\pi \epsilon} \int_{\xi} \xi dk = \frac{i}{\pi \epsilon} \int_{\gamma_l} \hat{\xi}(k) dk.$$

Легко видеть, что $\mu_l^0 > 0$. В дальнейшем будем записывать ψ_l в виде

$$\psi_l = \pi \hat{\mu}_l, \quad \hat{\mu}_l = \mu_l^0 - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma_l} \omega + \frac{1}{\pi} \psi_l'$$

Так же как и в случае матрицы R_m , существуют матрицы \hat{Y}_l, \hat{Z}_l , связывающие точные решения на границах интервалов:

$$\hat{Y}_l \begin{pmatrix} f_{m-1} \\ \bar{f}_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_m \\ \bar{f}_m \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}_l \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{m+1} \\ g_{m+1} \end{pmatrix},$$

$$\hat{Y}_l = \begin{pmatrix} \hat{y}_l & 0 \\ 0 & \hat{y}_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{Z}_l = \begin{pmatrix} \hat{z}_l & 0 \\ 0 & -\hat{z}_l^{-1} \end{pmatrix}, \quad \hat{y}_l = \hat{y}_l(1 + \epsilon^\infty), \quad \hat{z}_l = \hat{z}_l(1 + \epsilon^\infty).$$

Следуя цепочкам формул (3.20) и (3.21), по ним можно построить матрицы \hat{S}_l и \hat{T}_l .

$$\hat{S}_l \begin{pmatrix} h_{m-1} \\ g_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_m \\ g_m \end{pmatrix}, \quad \hat{T}_l \begin{pmatrix} f_m \\ \bar{f}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+1} \\ \bar{f}_{m+1} \end{pmatrix}.$$

Из предыдущих утверждений следуют оценки

$$\hat{S}_l \sim \hat{S}_l(1 + \epsilon^\infty), \quad \hat{T}_l \sim \hat{T}_l + \epsilon^\infty z_l.$$

3.6. Условие квантования. В дальнейшем нам понадобятся не столько преобразования базисов

$$B \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_1 \\ e'_2 \end{pmatrix},$$

сколько преобразования координат

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = B^t \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix}, \quad x_1 e_1 + x_2 e_2 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2,$$

t — знак транспонирования.

Выясним, при каких условиях решение g_{m-1} , убывающее (по экспоненциальному множителю) при удалении от точки ξ_{m-1} , после продолжения за интервал Δ_l перейдет в решение h_m , убывающее при удалении от точки ξ_m (см. символический рис. 6). Эти условия даются соотношением

$$S_l \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

γ — какое-либо число. Соотношение (3.22) можно назвать условиями квантования для интервала Δ_l . Придадим условиям квантования явный вид.

Выпишем элементы матрицы S_l :

$$S_l = \begin{pmatrix} s_l^{11} & s_l^{12} \\ s_l^{21} & s_l^{22} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} -u_m y_l \bar{u}_{m-1} + \bar{u}_m y_l^{-1} u_{m-1} & u_m y_l \bar{v}_{m-1} - \bar{u}_m y_l^{-1} v_{m-1} \\ -v_m y_l \bar{u}_{m-1} + \bar{v}_m y_l^{-1} u_{m-1} & v_m y_l \bar{v}_{m-1} - \bar{v}_m y_l^{-1} v_{m-1} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условия квантования могут быть представлены в форме

$$s_l^{11} = 0 \quad \text{или} \quad y_l^2 = \frac{\bar{u}_m u_{m-1}}{u_m \bar{u}_{m-1}}.$$

Их можно рассматривать как уравнение для спектрального параметра E . Положим

$$\frac{\bar{u}_m u_{m-1}}{u_m u_{m-1}} = e^{-2i\chi_l}, \quad \chi_l = \sum_{n \geq 1} \chi_{ln} \epsilon^n.$$

Тогда

$$E = E_l + \frac{\epsilon a n}{r_l}, \quad (3.23)$$

где

$$E_l = \Omega_l + \frac{\epsilon a}{\pi r_l} \chi_l.$$

Формула (3.23) и характеризует лестницу Ванье—Штарка, отвечающую интервалу Δ_l . Обрывая ряд E_l на том или ином порядке по ϵ , получим периодическую цепочку — лестницу Ванье—Штарка в соответствующем приближении. Ее спектральный смысл не может быть понят изолированно от глобальной краевой задачи для оператора H . Он будет обсуждаться в следующем параграфе.

3.7. Выход в комплексную область. Как ясно из § 2, решения уравнения (2.1) должны быть изучены не только при вещественных, но и при комплексных E , удовлетворяющих условию $|\text{Im } E| < \epsilon a$. При столь малых $\text{Im } E$ топология изоэнергетических кривых не претерпевает существенной трансформации, поэтому общий план асимптотических построений, развитый для вещественных E , сохраняет силу. Некоторого внимания могли бы требовать рассмотрения в малых окрестностях точек поворота: при $\text{Im } E \neq 0$ точки поворота не лежат на изоэнергетических кривых, но эти кривые могут пересекать линии Стокса (см., например, [20]). В тех окрестностях точек поворота, которые приходится рассматривать, сохраняют, однако, силу формальные решения п. 3.4, поэтому изменения, связанные с прохождением окрестности точки поворота, не вызывают дополнительных затруднений. Легко видеть также, что все построенные формальные решения и введенные матрицы перехода являются аналитическими относительно E . Полученные для них выражения непосредственно распространяются на рассматриваемую область комплексных E .

§ 4. Асимптотическое поведение функции M

В предыдущем параграфе единственным параметром задачи было число ϵ . При фиксированном периодическом потенциале p всякий конкретный спектральный интервал и всякая конкретная лакуна могли считаться широкими: если ϵ было достаточно мало, они отделяли друг от друга существенные окрестности соседних точек поворота и позволяли рассматривать эти точки независимо. В качестве меры длины спектрального интервала (по отношению к внешнему полю) можно взять число

$$\nu_l^0 = \frac{1}{\epsilon \pi} \int_{\gamma_l} \hat{\xi}(k) dk,$$

мерой длины лакуны можно считать число μ_l^0 . Для широкого спектрального интервала $\nu_l^0 \gg 1$, для широкой лакуны $\mu_l^0 \gg 1$.

Пусть $\delta_l = E_m - E_{m-1}$ — длина спектрального интервала, $\bar{\delta}_l = E_{m+1} - E_m$ — длина лакуны. Если число конечных спектральных интервалов $N = \infty$, то при $l \rightarrow \infty$ $\delta_l \rightarrow \infty$ и $\bar{\delta}_l \rightarrow 0$. Это означает, что спектральные интервалы всегда могут считаться широкими. С лакунами дело обстоит иначе — для далеких лакун параметр

$$\mu_l^0 \sim \frac{a^* l}{32k_l^2} \cdot \frac{\bar{\delta}_l^2}{\epsilon}$$

перестает быть большим и существенные окрестности точек поворота ξ_m и ξ_{m+1} начинают перекрываться. В таких условиях приведенное выше выражение для матрицы перехода T_l теряет смысл, оно должно быть заменено гораздо более сложным (см. [14]). Возникающие вследствие этого трудности вполне преодолимы, но их обсуждение выходит за рамки настоящей работы. Мы ограничимся далее рассмотрением аналитически

более простого случая $N < \infty$, иными словами, периодический потенциал p будет считаться конечнозонным (см., например, [21]). Некоторые из наших формул в случае конечнозонного потенциала могут быть записаны более явно, но мы не станем развивать здесь эту линию.

Несколько обогащая точку зрения § 3, включим в этом параграфе в число (независимых) параметров наряду с ϵ и (конечнозонный) потенциал p . Это означает, в частности, что числа μ_l^0 и ν_l^0 становятся независимыми от ϵ . Мы всегда будем предполагать, однако, что спектральные интервалы и лакуны являются широкими: $\mu_l^0, \nu_l^0 \gg 1$.

Итак, мы примем далее

Условие В. Число N конечных спектральных интервалов (и лакун) конечно, все спектральные интервалы и лакуны являются широкими.

В настоящем параграфе, действуя в рамках высказанных предположений, мы объединим результаты § 2 и 3, чтобы получить асимптотическое описание решений f и g , введенных в § 2, и, как следствие, асимптотическое описание функции M и ее корней.

4.1. Асимптотика решения g . Благодаря формулам (3.5) и (3.6) можно построить формальное решение $g_{-\infty}$ вида f , старший член которого при $\xi \rightarrow -\infty$ обладает асимптотикой

$$g_{-\infty} \sim \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{|\xi + E|}}} e^{-\frac{1}{\epsilon} \frac{2}{3} |\xi + E|^{3/2}}. \quad (4.1)$$

Можно считать, что (вещественный) экспоненциальный фактор этого решения дается формулой

$$e^{\pi\mu_0} e^{-\frac{i}{\epsilon} \int_{\xi_0}^{\xi} k d\xi},$$

в которой

$$\mu_0 = -\frac{i}{\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [k\Theta(\xi_0 - \xi) - \sqrt{\xi + E} \Theta(-\xi - E)] d\xi + \frac{1}{\pi} \int_{\gamma(\xi_0, -\infty)} \omega, \\ \hat{\xi}(k) = \xi + E, \quad t \geq 0: \Theta(t) = 1, \quad t < 0: \Theta(t) = 0.$$

Дальнейшие члены ряда $g_{-\infty}$ можно выбрать так, что формула (4.1) будет верна во всех порядках по ϵ . Чтобы убедиться в этом аккуратно, необходимо явно использовать рекуррентные формулы для последовательных членов решения вида f . На техническом языке это означает, что уравнения переноса для дальнейших членов ряда должны сопровождаться нулевыми данными Коши в точке $\xi = -\infty$. По существу результат, однако, предreshen, так как при $\xi \rightarrow -\infty$ скорость изменения экспоненциального множителя нарастает по сравнению со скоростью изменения коэффициентов уравнения, что в соответствии с общими концепциями ВКБ-подхода должно означать, что погрешность старшего члена ВКБ-асимптотики убывает. Доводить эту аргументацию до формального доказательства нет необходимости. Будем считать, что в итоге мы приходим к формальному решению $g_{-\infty}$, для которого при $\epsilon \rightarrow 0$ и $\xi < \xi_0 - \epsilon^{2\beta-\gamma}$ (равномерно относительно ξ) выполняется асимптотическое соотношение

$$g \sim g_{-\infty}(1 + \epsilon^\infty).$$

Опираясь на построения предыдущего параграфа, можно установить справедливость следующего

Предложения 4.1. Решение g лишь постоянным множителем отличается от решения g_0 :

$$g_0 = \frac{1}{z_0} g. \quad (4.2)$$

при этом

$$z_0 = \exp \pi\mu_0, \quad \mu_0 \sim \mu_0 + \sum_{n \geq 1} \mu_{0n} \epsilon^n.$$

Из рассмотрений § 3 вытекают также нижеследующие предложения.

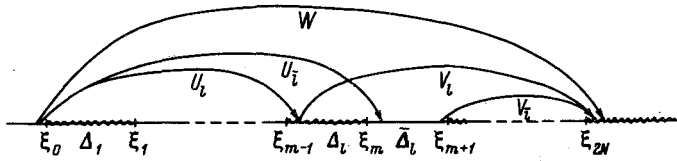


Рис. 7.

Предложение 4.2. На интервале $\Delta_l(E)$ вне $\epsilon^{2/3-\gamma}$ -окрестностей точек поворота ξ_{m-1}, ξ_m решение g_0 представимо в виде

$$g_0 = A_l f_{m-1}^{(1)} + \bar{A}_l \overline{f_{m-1}^{(1)}}, \quad (4.3)$$

$$f_{m-1}^{(1)} = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \sigma_{m-1} \xi_{m-1}\right) f_{m-1}.$$

При этом

$$U_l^t \begin{pmatrix} A_l \\ \bar{A}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

$$U_l = R_{m-1}^{-1} Z_l^{-1} S_1, \quad (4.5)$$

$$Z_l^1 = Z_l S_1 \dots Z_{l+1} S_{l+1} Z_{l+1} \text{ см. рис. 7.} \quad (4.6)$$

Ясно, что

$$\det U_l = -i.$$

Предложение 4.3. На интервале $\bar{\Delta}_l(E)$ вне $\epsilon^{2/3-\gamma}$ -окрестностей точек ξ_m, ξ_{m+1} решение g_0 представимо в виде

$$g_0 = A_{\bar{l}} h_m^{(1)} + B_{\bar{l}} g_m^{(1)}, \quad (4.7)$$

$$h_m^{(1)} = \exp\left(\frac{i}{\epsilon} \sigma_m \xi_m\right) h_m, \quad g_m^{(1)} = \exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \sigma_m \xi_m\right) g_m.$$

При этом

$$U_{\bar{l}}^t \begin{pmatrix} A_{\bar{l}} \\ B_{\bar{l}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где

$$U_{\bar{l}} = S_{\bar{l}} Z_{\bar{l}}^{-1} S_1.$$

Легко убедиться, что

$$\det U_{\bar{l}} = -1.$$

Асимптотические свойства матриц U_l и $U_{\bar{l}}$ можно исследовать, используя результаты § 3. Основной компонентой этих матриц, допускающей существенное упрощение, является Z_l^1 . Асимптотическому упрощению Z_l^1 посвящен п. 4.3.

4.2. Асимптотика решения f . Аналогично g_∞ существует решение f_∞ вида f , которое при $\xi \rightarrow +\infty$ обладает асимптотикой

$$f_\infty \sim \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{\xi+E}}} e^{\frac{i}{\epsilon} \frac{2}{3} |\xi+E|^{3/2}}.$$

Можно считать, что (фазовый) экспоненциальный фактор этого решения дается формулой

$$e^{i\pi\nu_{N+1}} e^{\frac{i}{\epsilon} \int_{\xi_{2N}}^{\xi} kd\xi},$$

в которой

$$\nu_{N+1} = -\frac{1}{\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} [k\Theta(\xi - \xi_{2N}) - \xi + E\Theta(\xi + E)] d\xi - \frac{1}{\pi} \int_{\gamma(\xi_{2N}, \infty)} \omega_0.$$

При $\epsilon \rightarrow 0$ и $\xi > \xi_{2N} + \epsilon^{2/3-\gamma}$ выполняется асимптотическое соотношение

$$f \sim f_\infty (1 + \epsilon^\infty).$$

Предложение 4.4. Решение f лишь постоянным множителем отличается от решения f_{2N} :

$$f = \kappa_{N+1} f_{2N}, \quad (4.9)$$

при этом

$$\begin{aligned} \kappa_{N+1} &= \exp(i\pi \vartheta_{N+1}), \\ \vartheta_{N+1} &= \nu_{N+1} + \sum_{n \geq 1} \nu_{N+1, n} \epsilon^n. \end{aligned}$$

Предложение 4.5. На интервале $\Delta_l(E)$ вне $\epsilon^{2\beta-\gamma}$ -окрестностей точек поворота ξ_{m-1}, ξ_m решение f_{2N} представимо в виде

$$f_{2N}^{(1)} = C_l f_{m-1}^{(1)} + D_l f_m^{(1)}, \quad (4.10)$$

$$f_m^{(1)} = \exp\left(i \frac{\sigma_m \xi_m}{\epsilon}\right) f_m.$$

При этом

$$V_l^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_l \\ D_l \end{pmatrix}, \quad (4.11)$$

где

$$V_l = R_{2N}^{-1} Z_l^N R_m Y_l. \quad (4.12)$$

Предложение 4.6. На интервале $\bar{\Delta}_l(E)$ вне $\epsilon^{2\beta-\gamma}$ -окрестностей точек поворота ξ_m, ξ_{m+1} решение f_{2N} представимо в виде

$$f_{2N}^{(1)} = C_{\bar{l}} h_{m+1}^{(1)} + D_{\bar{l}} g_{m+1}^{(1)}, \quad (4.13)$$

$$h_{m+1}^{(1)} = e^{i \frac{\sigma_{m+1} \xi_{m+1}}{\epsilon}} h_{m+1}, \quad g_{m+1}^{(1)} = e^{-i \frac{\sigma_{m+1} \xi_{m+1}}{\epsilon}} g_{m+1}.$$

При этом

$$V_{\bar{l}}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{\bar{l}} \\ D_{\bar{l}} \end{pmatrix},$$

где

$$V_{\bar{l}} = R_{2N}^{-1} Z_{l+1}^N S_{l+1}.$$

Нетрудно убедиться, что матрицы V_l и $V_{\bar{l}}$ могут быть выражены через коэффициенты C_l и D_l :

$$V_l = \begin{pmatrix} C_l & D_l \\ \overline{D_l} & \overline{C_l} \end{pmatrix}, \quad \det V_l = |C_l|^2 - |D_l|^2 = 1, \quad (4.14)$$

$$V_{\bar{l}} = \begin{pmatrix} C_{\bar{l}} & D_{\bar{l}} \\ \overline{C_{\bar{l}}} & \overline{D_{\bar{l}}} \end{pmatrix}, \quad \det V_{\bar{l}} = C_{\bar{l}} \overline{D_{\bar{l}}} - \overline{C_{\bar{l}}} D_{\bar{l}} = -i.$$

4.3. Асимптотическое упрощение $Z_{l_1}^l$. Матрица $Z_{l_1}^l$ определена формулой (4.6). Учитывая условие B , можно упростить выражение (4.6). Опуская малые матричные элементы диагональных матриц Z_j , примем для них приближение

$$Z_j \sim pz_j, \quad p = p_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

В этом приближении

$$Z_{l_1}^l \sim p \prod_{j=l_1}^l z_j \prod_{j=l_1+1}^l s_j^{11}.$$

Вычислим старшие поправочные члены. Они даются суммой выражений вида $Z_{l_1}^l$, в которых все сомножители Z_j , кроме одного, упрощаются в согласии с (4.15), а этот один заменяется на

$$Z_j \rightarrow -z_j^{-1} q, \quad q = p_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В итоге получим

$$Z_{l_1}^l = \prod_{j=l_1}^l z_j \left\{ p \prod_{j=l_1+1}^l s_j^{11} - z_l^{-2} p_{21} s_l^{21} \prod_{j=l_1+1}^{l-1} s_j^{11} - z_l^{-2} p_{12} \prod_{j=l_1+2}^l s_j^{11} \cdot s_{l_1+1}^{12} - \right. \\ \left. - \sum_{j=l_1+1}^{l-1} z_j^{-2} p s_j^{11} \dots s_{j+2}^{11} s_{j+1}^{12} s_j^{11} s_{j-1}^{11} \dots s_{l_1+1}^{11} + O\left(\sum_{j_1 \neq j_2} z_{j_1}^{-2} z_{j_2}^{-2}\right) \right\}. \quad (4.16)$$

где

$$p_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad p_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.4. Ф у н к ц и я M . Согласно определению,

$$g = M\bar{f} + \bar{M}f.$$

Это равносильно соотношению

$$g_0 = Ff_{2N}^{(1)} + \bar{F}\bar{f}_{2N}^{(1)},$$

причем

$$M = e^{-i \frac{\sigma_{2N} \xi_{2N}}{\epsilon}} z_{0, \kappa_{N+1}} \bar{F}. \quad (4.17)$$

Коэффициент F характеризуется равенством

$$U_{N+1}^t \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4.18)$$

из которого следует

$$\bar{F} = i u_{N+1}^{11},$$

u_{N+1}^{11} — соответствующий матричный элемент матрицы U_{N+1} .

Воспользуемся формулой (4.16):

$$\bar{F} = \prod_{j=1}^N z_j \left\{ \overline{u_{2N}} \left[\prod_{j=1}^N s_j^{11} - \sum_{j=1}^{N-1} z_j^{-2} s_N^{11} \dots s_{j+2}^{11} s_{j+1}^{12} s_j^{21} s_{j-1}^{11} \dots s_1^{11} \right] - \right. \\ \left. - \overline{v_{2N}} z_N^{-2} s_N^{21} \prod_{j=1}^{N-1} s_j^{11} + O\left(\sum_{j_1 \neq j_2} z_{j_1}^{-2} z_{j_2}^{-2}\right) \right\}. \quad (4.19)$$

В главном приближении

$$\bar{F} = \overline{u_{2N}} \prod_{j=1}^N z_j \left\{ \prod_{j=1}^N s_j^{11} + O\left(\sum_{j=1}^N z_j^{-2}\right) \right\}.$$

Заметим, что $\sigma_{2N} = k_N = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^*$, $\xi_{2N} = E_{2N} - E$, и вспомним асимптотические формулы для z_j , κ_{N+1} , v_{2N} , u_{2N} и s_j^{11} . Это приведет к соотношению

$$M \sim e^{i\pi/4} e^{-\frac{i}{\epsilon} k_N E_{2N}} \prod_{j=1}^{N+1} e^{i\pi\nu_j} \prod_{j=0}^N e^{\pi\mu_j} \left\{ \prod_{j=1}^N \left[e^{\frac{a_j^*}{\epsilon}(E-E_j)} - 1 \right] + O(\epsilon^\infty) + O\left(\sum_{j=1}^N e^{-2\pi\mu_j}\right) \right\} \left[1 + \sum_{n \geq 1} m_n \epsilon^n \right]$$

или

$$M \sim e^{i\pi/4} e^{\frac{i}{\epsilon} \int_{(0, \infty)} (\hat{\mathbb{K}}(k) - k^2) dk} e^{-i \int_{(0, \infty)} \omega_0} \prod_{j=0}^N e^{\pi\mu_j} \times \\ \times \left\{ \prod_{j=1}^N \left[e^{\frac{a_j^*}{\epsilon}(E-E_j)} - 1 \right] + O(\epsilon^\infty) + O\left(\sum_{j=1}^N e^{-2\pi\mu_j}\right) \right\} \left[1 + \sum_{n \geq 1} m_n \epsilon^n \right]. \quad (4.20)$$

Учитывая аналитические свойства функции M и стандартным образом используя теорему Руше, можно исследовать свойства нулей функции M .

Т е о р е м а 4.1. В полосе вида $|\operatorname{Im} E| < \epsilon\beta$, $\beta < \alpha$, функция M допускает асимптотическое представление (4.20). При достаточно малом β_0 (не зависящем от ϵ) в полосе $-\epsilon\beta_0 < \operatorname{Im} E < 0$ функция M имеет N периодических цепочек корней $E_n^{(j)}$, описываемых условиями квантования

$$E_n^{(j)} = E_l + \frac{\epsilon a}{r_l} n + O(\epsilon^\infty) + O\left(\sum_{j=1}^N e^{-2\pi\mu_j}\right).$$

Согласно теореме, все цепочки имеют период ϵa . Однако цепочка, порождаемая расширенным спектральным интервалом Δ_l , который возникает за счет слияния r_l первоначальных спектральных интервалов (см. п. 2.1), имеет меньший минимальный период $\epsilon a(1/r_l)$. Ее можно при желании рассматривать как r_l равномерно размещенных цепочек с основным периодом ϵa . Таким образом, можно считать, что число цепочек равно полному числу $2k_N/a^*$ первоначальных спектральных интервалов.

4.5. Мнимые части корней. Можно ли с помощью наших формул проконтролировать мнимые части цепочек $E_n^{(l)}$? Для цепочки $E_n^{(N)}$ это может быть сделано с помощью формулы (4.19).

Чтобы снять некоторые технические осложнения, будем предполагать в дальнейшем, что выполнено:

Условие С. Существует такое $\kappa > 0$, что $|\pi v_l^0 - \pi v_l^0 - ma| \geq \kappa$, $l, l' = 1, \dots, N$, $m \in \mathbb{Z}$.

Условие С означает, что никакие две цепочки не могут приближаться друг к другу на расстояние, меньшее $\kappa \epsilon$. Из условия С следует, что в корнях функции s_j^{11} функции s_j^{11} , $j \neq j_0$, отделены от нуля (независимо от ϵ и p). Это условие является (слабым) ограничением на структуру спектра H_0 и ограничением на допустимое множество значений ϵ , $\epsilon \rightarrow 0$.

Рассмотрим корни функции M , близкие к корням $E_n^{(N)}$. После отделения ненулевых множителей из формулы (4.19) можно заключить, что поправки к этим корням описываются уравнением

$$\overline{u_{2N}(s_{N-1}^{11} s_N^{11} - z_{N-1}^{-2} s_{N-1}^{21} s_N^{12})} = \overline{v_{2N} z_N^{-2} s_{N-1}^{11} s_N^{21}}.$$

Поскольку мы интересуемся поправками лишь в старшем порядке, коэффициенты u_{2N} , v_{2N} , z_N и матричные элементы s_j^{ij} можно заменить старшими членами при $\epsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \left[\sin \frac{a_N^*}{2\epsilon} (E - E_N) \sin \frac{a_N^*}{2\epsilon} (E - E_{N-1}) - \frac{1}{4} e^{-2\pi\mu N-1} \cos \frac{a_N^*}{2\epsilon} (E - E_N) \cos \frac{a_{N-1}^*}{2\epsilon} (E - E_{N-1}) \right] = \\ = \frac{i}{4} e^{-2\pi\mu N} \cos \frac{a_N^*}{2\epsilon} (E - E_N) \sin \frac{a_{N-1}^*}{2\epsilon} (E - E_{N-1}). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Второе слагаемое левой стороны влияет, очевидно, только на сдвиг вещественной части, правая сторона определяет мнимую часть корней. Вычислим мнимые части в старшем приближении:

$$\text{Im } E_n^{(N)} = -\frac{\epsilon}{a_N^*} e^{-2\pi\mu N}.$$

Выводя это выражение, мы пренебрегли погрешностью формулы (4.19). С учетом погрешности

$$\text{Im } E_n^{(N)} = -\frac{\epsilon}{a_N^*} e^{-2\pi\mu N} + O(\epsilon^\infty) + \epsilon O\left(\sum_{j \neq i} e^{-2\pi\mu j - 2\pi\mu i}\right),$$

фактически же

$$\text{Im } E_n^{(N)} = -\frac{\epsilon}{a_N^*} e^{-2\pi\mu N} [1 + O(\sum_{j < N} e^{-2\pi\mu j})] + O(\epsilon^\infty).$$

Полученный результат допускает простую интерпретацию: сдвиг цепочки $E_n^{(N)}$ в комплексную плоскость происходит вследствие туннелирования резонансных состояний через лауну $\bar{\Delta}_N$ в инфинитный спектральный интервал. Туннелирование через лауну $\bar{\Delta}_{N-1}$ в ближайший финитный спектральный интервал Δ_{N-1} , согласно (4.21), не вызывает сдвига цепочки в комплексную плоскость, но приводит к ее смещению вдоль вещественной оси.

Эта интерпретация позволяет предугадать и, в конечном счете доказать нижеследующее утверждение.

Теорема 4.2. Мнимые части цепочки $E_n^{(j)}$ имеют вид

$$\operatorname{Im} E_n^{(j)} \sim -j_1 \epsilon e^{-2\pi \sum_{j=1}^N \mu_j} + O(\epsilon^\infty).$$

В частности, $j_N = a_N^{*-1}$.

Если единственным параметром задачи считать число ϵ , экспоненциальные слагаемые в правых частях формул можно опустить по сравнению с $O(\epsilon^\infty)$. По-видимому, однако, именно это слагаемое $O(\epsilon^\infty)$ всегда может быть опущено, так что экспоненциальные слагаемые являются ведущими во всех случаях. Для доказательства этого факта требуется, впрочем, дальнейшее развитие методов настоящей работы.

§ 5. Спектральный смысл резонансов

В этом параграфе мы вернемся к исходной трактовке и будем считать потенциал p фиксированным, а число ϵ единственным параметром задачи.

Чтобы избежать излишней детализации, предположим здесь, что слившиеся конечные спектральные интервалы отсутствуют. Это будет означать, что минимальные периоды всех цепочек равны ϵa .

5.1. Вычеты резольвенты. В § 2 была приведена формула для ядра резольвенты $R(E) = (H - E \cdot I)^{-1}$:

$$R(x, y, E) = \begin{cases} \frac{g(x, E)f(y, E)}{-iM(E)}, & \operatorname{Im} E > 0, \\ \frac{g(x, E)f^*(y, E)}{iM^*(E)}, & \operatorname{Im} E < 0. \end{cases}$$

Предполагается, что $x \leq y$.

Используя эти выражения, легко получить спектральную теорему для оператора H . На символическом уровне:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+ \cup \Gamma_-} R(E) \varphi dE = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} [R(E + i0) - R(E - i0)] \varphi dE = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\cdot, E)}{M(E)M(E)} dE \int_{-\infty}^{\infty} g(y, E) \varphi(y) dy. \end{aligned}$$

Контур интегрирования изображен на рис. 8.

Аналитическое продолжение ядра из полуплоскости $\operatorname{Im} E > 0$ в полуплоскость $\operatorname{Im} E > -\epsilon a$ имеет полюсы в точках

$$E_n^{(j)} = E^{(j)} + \epsilon a n$$

с вычетами

$$R_n^{(j)}(x, y) = \frac{g(x, E_n^{(j)})f(y, E_n^{(j)})}{-iM(E_n^{(j)})},$$

— знак дифференцирования по E . В точках $E_n^{(j)}$

$$g(x, E) = M^*(E)f(x, E).$$

Аналитическое продолжение ядра из полуплоскости в полуплоскость $\operatorname{Im} E < -\epsilon a$ имеет полюсы в точках $\overline{E_n^{(j)}}$ с вычетами

$$\overline{R_n^{(j)}}(x, y) = \frac{g(x, \overline{E_n^{(j)}})f^*(y, \overline{E_n^{(j)}})}{iM^*(\overline{E_n^{(j)}})}.$$

В точках $\overline{E_n^{(j)}}$

$$g(x, E) = M(E)f^*(x, E).$$

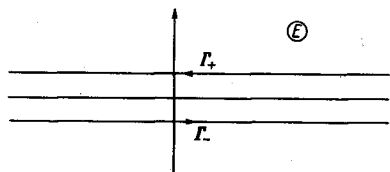


Рис. 8.

Изучим асимптотическое поведение вычетов при $\epsilon \rightarrow 0$, считая, что $|x|, |y| \leq K$. Заметим, что в этом случае $\xi = \epsilon x, \eta = \epsilon y \rightarrow 0$. Точка (ξ, k) изоэнергетической кривой

$$\hat{\xi}(k) = \xi + E$$

переходит в точку

$$\hat{\xi}(k) = E.$$

Точка $\xi = 0$ оказывается точкой поворота, если $E = E_m$.

Предположим, что полюс $E_n^{(p)}$ лежит под некоторым собственным подынтервалом Δ_l' спектрального интервала Δ_l : $\text{Re } E_n^{(p)} \in \Delta_l'$ (рис. 9). В этом случае вычет можно описать с помощью формул (4.2), (4.3), (4.9), (4.10), (4.17):

$$R_n^{(p)}(x, y) = \frac{(A_l^{(1)} \bar{A}_l^{(1)} + \bar{A}_l^{(1)} A_l^{(1)})_x (C_l^{(1)} \bar{D}_l^{(1)} + \bar{D}_l^{(1)} C_l^{(1)})_y}{-i \bar{F}(E_n^{(p)})}$$

Ради краткости мы не выписываем полностью аргументов и лишь снабдили первую скобку индексом x , а вторую y , чтобы помнить, что они вычисляются в соответствующих точках.

5.2. Коэффициенты A_l, C_l, D_l . Обсудим асимптотическое поведение коэффициентов A_l, C_l и D_l . Согласно (4.4),

$$\bar{A}_l = i u_l^{11}.$$

При $\epsilon \rightarrow 0$

$$\bar{A}_l \sim u_{m-1} \prod_{j=1}^{l-1} z_j \prod_{j=1}^{l-1} s_j^{11}.$$

Как следствие

$$A_l \sim u_{m-1} \prod_{j=1}^{l-1} z_j \prod_{j=1}^{l-1} s_j^{11} = \frac{u_{m-1}}{u_{m-1}} \bar{A}_l.$$

Согласно (4.11),

$$C_l = V_l^{11}, D_l = V_l^{12}.$$

При $\epsilon \rightarrow 0$

$$C_l \sim -i \bar{u}_{2N} \prod_{j=l}^N z_j \prod_{j=l+1}^N s_j^{11} u_m \bar{y}_l$$

$$D_l \sim -i \bar{u}_{2N} \prod_{j=l}^N z_j \prod_{j=l+1}^N s_j^{11} u_m \bar{y}_l.$$

Произведения $\bar{A}_l D_l$ и $A_l C_l$ допускают более точное описание. Легко видеть, что

$$U_{N+1} = V_l U_b,$$

поэтому в силу (4.14)

$$\begin{pmatrix} C_l & D_l \\ \bar{D}_l & \bar{C}_l \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_l \\ \bar{A}_l \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_l & -\bar{D}_l \\ -D_l & C_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_l \\ \bar{A}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix}.$$

Это соотношение равносильно одному скалярному

$$-D_l A_l + C_l \bar{A}_l = \bar{F}. \quad (5.1)$$

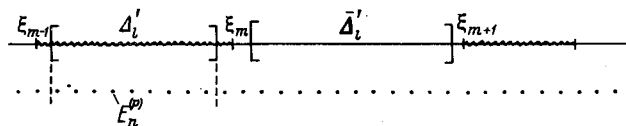


Рис. 9.

Введем функцию

$$\bar{G}_l = D_l A_l + C_l \bar{A}_l. \quad (5.2)$$

Ясно, что

$$\begin{pmatrix} \bar{C}_l & -\bar{D}_l \\ -D_l & C_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A_l \\ \bar{A}_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G_l \\ \bar{G}_l \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = W_l^l \begin{pmatrix} -G_l \\ \bar{G}_l \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

где

$$W_l = V_l \tau U_l, \quad \tau = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Благодаря (5.1) и (5.2)

$$C_l \bar{A}_l = \frac{1}{2}(\bar{G}_l + \bar{F}), \quad D_l A_l = \frac{1}{2}(\bar{G}_l - \bar{F}). \quad (5.5)$$

Формула (5.4) дает возможность изучить асимптотическое поведение W_l и тем самым функции G_l . Из (5.3) следует

$$\bar{G}_l = -iW_l^{11}.$$

В силу (4.5) и (4.12)

$$W_l^{11} = [R_{2N}^{-1} Z_l^N (R_m Y_l \tau R_{m-1}^{-1}) Z_l^{l-1} S_1]^{11}.$$

Сопоставляя это выражение с формулой (4.19) и опуская в асимптотике W_l^{11} некоторые поправочные при $\epsilon \rightarrow 0$ члены, получим

$$\bar{G}_l = -i \bar{u}_{2N} \prod_{j=1}^N z_j \left\{ \prod_{j=1}^{l-1} s_j^{11} \prod_{j=l+1}^N s_j^{11} (u_m y_l \bar{u}_{m-1} + \bar{u}_m y_l^{-1} u_{m-1}) + O(\epsilon^\infty) \right\}.$$

5.3. Спектральный смысл вычетов. Теперь мы можем подробнее проанализировать поведение вычетов при $\epsilon \rightarrow 0$. Четыре слагаемых, возникающих при раскрытии скобок в числителе, объединяются в две группы:

$$R_n^{(p)}(x, y) = \frac{A_l C_l (f_{m-1}^{(1)})_x (f_{m-1}^{(1)})_y + \bar{A}_l D_l (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_x (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_y}{-i \bar{F}(E_n^{(p)})} + \frac{A_l D_l (f_{m-1}^{(1)})_x (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_y + \bar{A}_l C_l (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_x (f_{m-1}^{(1)})_y}{-i \bar{F}(E_n^{(p)})}.$$

Мы выделим здесь факторы, которые ведут себя регулярно при $\epsilon \rightarrow 0$, и факторы, которые быстро меняются.

Ясно, что

$$(f_{m-1}^{(1)})_x \sim \sqrt{a} [\hat{\xi}(k)]^{-1/2} \psi(x, k) \exp\left(i \int_{\gamma(\xi_{m-1}, \xi)} \left(\frac{1}{\epsilon}(k - \sigma_{m-1}) d\xi + \omega_0\right) - \frac{i}{\epsilon}(k - \sigma_{m-1}) \xi\right).$$

Быстро меняющимся является интеграл

$$\frac{1}{\epsilon} \int_{\xi_{m-1}}^{\xi} (k - \sigma_{m-1}) d\xi - \frac{1}{\epsilon} (k - \sigma_{m-1}) \xi = -\frac{1}{\epsilon} \int_{\sigma_{m-1}}^k [\hat{\xi}(k) - E] dk + \dots$$

Многоточием заменены регулярные члены, явный вид которых не имеет значения. С учетом того, что полюсы удалены от вещественной оси на величину порядка $O(\epsilon^\infty)$, мы можем пренебречь комплексными добавками в этом интеграле. Вычет, таким образом, можно представить в следующем виде:

$$R_n^{(p)} = (R_n^{(p)})_1 + (R_n^{(p)})_2, \quad (5.6)$$

где

$$\begin{aligned} (R_n^{(p)})_1 &= a \frac{A_l D_l \psi(x, k) \overline{\psi(y, k)} + \overline{A_l C_l} \psi(x, k) \psi(y, k)}{-i \hat{\xi} \dot{\hat{F}}(E_n^{(p)})}, \\ (R_n^{(p)})_2 &= a \frac{A_l C_l \psi(x, k) \psi(y, k) \exp\left(-\frac{2i}{\epsilon} \int_{\sigma_{m-1}}^k [\hat{\xi}(k) - E] dk + 2i \int \omega_0\right)}{-i \hat{\xi} \dot{\hat{F}}(E_n^{(p)})} + \\ &+ a \frac{\overline{A_l} D_l \psi(x, k) \psi(y, k) \exp\left(2 \frac{i}{\epsilon} \int_{\sigma_{m-1}}^k [\hat{\xi}(k) - E] dk - 2i \int \omega_0\right)}{-i \hat{\xi} \dot{\hat{F}}(E_n^{(p)})}. \end{aligned}$$

Введем гладкую функцию $\eta_l: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{C}$, предполагая, что $\text{supp } \eta_l \subset \Delta_l'$. Составим выражение

$$P_p[\eta_l] = \sum_n \eta_l(\text{Re } E_n^{(p)}) R_n^{(p)}$$

и аналогично $(P_p[\eta_l])_1, (P_p[\eta_l])_2$.

Обсудим структуру $(R_n^{(p)})_2$. На основании асимптотических формул для F, A_l, C_l и D_l можно сделать следующие выводы. При вычислении вычетов в точках цепочки $E_n^{(p)}$ дифференцировать следует только множитель s_p^{11} , ибо множители s_j^{11} при $j \neq p$ в силу условия С отделены от нуля. Более того, можно утверждать, что

$$\frac{A_l C_l}{\dot{\hat{F}}(E_n^{(p)})} \sim -iy_l u_{m-1} u_m \frac{s_p^{11}}{s_l^{11}} \frac{1}{s_p^{11}}.$$

Если $l \neq p$, рассматриваемое отношение близко к нулю благодаря $s_p^{11} \approx 0$. Поскольку $1/s_p^{11} \sim \epsilon$ за счет специфики вхождения E , полный порядок отношения есть ϵ^2 . Это значит, что при $l \neq p$ соответствующие члены не дают вклада в предел $(P_p[\eta_l])_2$ при $\epsilon \rightarrow 0$. При $l = p$ отношение фактически не зависит от n . При этом быстрая зависимость $(R_n^{(p)})_2$ от E сохраняется только в экспоненциальных факторах (см. (5.6)).

В итоге при $\epsilon \rightarrow 0$ $(P_p[\eta_l])_2 \rightarrow 0$ (при фиксированных x и y или в слабом смысле). Для доказательства используем формулу Пуассона

$$P_p[\eta_l] = \sum_q \int d\eta_l(\text{Re } E_n^{(p)}) R_n^{(p)} e^{2\pi i q n} = \frac{1}{\epsilon a} \sum_q \int dE \eta_l(E) e^{2\pi i q \frac{E - \text{Re } E_n^{(p)}}{\epsilon a}} R_n^{(p)},$$

переменные E и n связаны соотношением

$$E = \text{Re } E_n^{(p)} + \epsilon a n.$$

Применим эту формулу к $(P_p[\eta_l])_2$. Осциллирующий фактор под знаком интеграла имеет вид

$$e^{2\pi i q \frac{E - \text{Re } E_n^{(p)}}{\epsilon a}} = \frac{e^{2\pi i q \frac{E - \text{Re } E_n^{(p)}}{\epsilon a}}}{e} \pm \frac{2i}{\epsilon} \int_{\sigma_{m-1}}^k [\hat{\xi}(k) - E] dk$$

Производная показателя экспоненты равна

$$\frac{2i}{\epsilon} \left[\frac{\pi q}{a} \mp (k - \sigma_{m-1}) \right].$$

Поскольку $0 < k - \sigma_{m-1} < a^*/2 = \pi/a$, то стационарные точки отсутствуют. Следовательно, все члены ряда для $(P_p[\eta_l])_2$ стремятся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$. Гладкость функции η гарантирует возможность предельного перехода под знаком ряда.

К интегралу $(P_p[\eta_l])_1$ эти рассуждения неприменимы. Обращаясь к $(R_n^{(p)})_1$, следует прежде всего преобразовать в полюсах $E_n^{(p)}$ коэффициенты:

$$\frac{A_l D_l}{\bar{F}} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\bar{G}_l}{\bar{F}}, \quad \frac{C_l \bar{A}_l}{\bar{F}} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{\bar{G}_l}{\bar{F}},$$

(см. (5.5)). Таким образом,

$$\begin{aligned} (R_n^{(p)})_1 &= \frac{1}{2} \frac{\bar{G}_l}{(-i)\bar{F}} \{ (f_{m-1}^{(1)})_x (f_{m-1}^{(1)})_y + (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_x (\bar{f}_{m-1}^{(1)})_y \} \sim \\ &\sim \frac{1}{2} \frac{\bar{G}_l}{\bar{F}} \frac{a}{(-i)\hat{\mathfrak{E}}(k)} [\psi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\psi(y, k)]. \end{aligned}$$

Обсудим отношение \bar{G}_l/\bar{F} . Если $l \neq p$, то \bar{G}_l содержит (в главном порядке) множитель, аннулирующийся в точках $E_n^{(p)}$. После этого прямая оценка с учетом того, что $\bar{F} \sim \epsilon^{-1}$ покажет, что при $l \neq p$

$$(P_p[\eta_l])_1 \rightarrow 0.$$

Пусть $l = p$. В этом случае

$$\frac{1}{2} \frac{\bar{G}_l}{\bar{F}} \sim \frac{1}{2i} \frac{(u_m y_l \bar{u}_{m-1} + \bar{u}_m y_l^{-1} u_{m-1})}{s_l^{11}} \sim \frac{\epsilon}{ia^*}.$$

Следовательно,

$$(R_n^{(p)})_1 \sim \frac{\epsilon a}{a^* \hat{\mathfrak{E}}} [\psi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\psi(y, k)].$$

Если теперь вновь воспользоваться формулой Пуассона, то будет видно, что ненулевой вклад в предел дает лишь один член ряда (при $q = 0$):

$$\begin{aligned} P_p[\eta_l] &\sim (P_l[\eta_l])_1 \rightarrow \frac{a}{2\pi} \int dE \eta_l(E) \hat{\mathfrak{E}}(k)^{-1} [\psi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\psi(y, k)] = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int dE \eta_l(E) \frac{[\psi(x, k)\bar{\psi}(y, k) + \bar{\psi}(x, k)\psi(y, k)]}{w(\psi(k), \bar{\psi}(k))} = \eta_l(H_0). \end{aligned}$$

Итак, доказана

Теорема 5.1. При $\epsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$P_p[\eta_l] = \sum_n \eta_l(\text{Re } E_n^{(p)}) R_n^{(p)} \rightarrow \delta_{lp} \eta_l(H_0).$$

Здесь $R_n^{(p)}$ — вычет резольвенты оператора H в n -ом полюсе p -той цепочки резонансов, $\eta_l \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\text{supp } \eta_l \subset \Delta_l^j$ (Δ_l^j — подынтервал спектрального интервала Δ_l). Предел понимается как предел ядер интегральных операторов при $|x|, |y| \leq K$ или как слабый предел операторов на финитных пробных функциях. Аналогично

$$\bar{P}_p[\eta_l] = \sum_n \eta_l(\text{Re } E_n^{(p)}) \bar{R}_n^{(p)} \rightarrow \delta_{lp} \eta_l(H_0).$$

5.4. Предел на лакунах. Вернемся к п. 5.1 и предположим, что полюс $E_n^{(p)}$ лежит под некоторым собственным подынтервалом $\bar{\Delta}_l^j$ лакуны $\bar{\Delta}_l$ (рис. 9). В этом случае вычет можно описать с помощью формул (4.2), (4.7), (4.9), (4.13) и (4.17):

$$R_n^{(p)}(x, y) = \frac{(A_l h_m^{(1)} + B_l g_m^{(1)})_x (C_l h_{m+1}^{(1)} + D_l g_{m+1}^{(1)})_y}{-i\bar{F}(E_n^{(p)})}.$$

Попарные произведения коэффициентов, возникающих в числителе при раскрытии скобок, содержат экспоненциально растущие при $\epsilon \rightarrow 0$ множители $z_1 \dots z_{l-1} z_{l+1} \dots z_N$,

знаменатель содержит полное произведение $z_1 \dots z_{l-1} z_l z_{l+1} \dots z_N$, которое компенсирует этот рост, оставляя запас убывания порядка z_l^{-1} . Экспоненциальный рост может сформироваться и за счет перемножения решений. Наиболее опасный член имеет вид

$$R_n^{(\varphi)}(x, y) \sim \frac{B_l^- C_l^- (g_m^{(1)})_x (h_{m+1}^{(1)})_y}{-i\bar{F}}$$

Все опущенные слагаемые являются экспоненциально малыми при $\epsilon \rightarrow 0$ и тривиальным образом дают нулевой вклад в оператор

$$P_p[\eta_l] = \sum_n \eta_l (\operatorname{Re} E_n^{(\varphi)}) R_n^{(\varphi)}$$

при $\epsilon \rightarrow 0$, $\operatorname{supp} \eta_l \subset \bar{\Delta}_l'$.

Рассмотрим подробнее произведение $B_l^- C_l^-$. В силу очевидной формулы

$$U_{N+1} = V_l^- Z_l U_l^-$$

и (4.8), (4.18)

$$\begin{pmatrix} A_l^- \\ B_l^- \end{pmatrix} = Z_l V_l^- \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$-i \begin{pmatrix} \bar{D}_l^- & -\bar{C}_l^- \\ -D_l^- & C_l^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_l} \cdot A_l^- \\ -z_l \cdot B_l^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \bar{F} \end{pmatrix}$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{z_l} A_l^- D_l^- + z_l B_l^- C_l^- = -\bar{F}.$$

Эта формула не содержит асимптотических упрощений и означает, что при $\bar{F} = 0$

$$B_l^- C_l^- = -\frac{1}{z_l^2} A_l^- D_l^-. \quad (5.7)$$

Нетрудно видеть, что растущий экспоненциальный фактор, выделяемый (при ограниченных x и y) произведением $(g_m^{(1)})_x (h_{m+1}^{(1)})_y$, имеет вид

$$\exp\left(-\frac{i}{\epsilon} \int_{\sigma_m}^{\sigma_{m+1}} \hat{\xi}(k) dk\right) \sim z_l.$$

С учетом формулы (5.7) это значит, что

$$\frac{B_l^- C_l^- (g_m^{(1)})_x (h_{m+1}^{(1)})_y}{-i\bar{F}} \sim \frac{1}{z_l^2}.$$

Отсюда, конечно, вытекает

Теорема 5.2. При $\epsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$P_p[\eta_l] \rightarrow 0,$$

$\eta_l \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\operatorname{supp} \eta_l \subset \bar{\Delta}_l'$. Предел следует понимать так же, как в теореме 5.1.

Объединяя утверждения теорем 5.1 и 5.2, можно утверждать, что для произвольной гладкой финитной η

$$P_l[\eta] \rightarrow \eta(H_0 E(\Delta_l)),$$

где $E(\Delta_l)$ — спектральный проектор оператора H_0 на интервал Δ_l .

Л и т е р а т у р а

- [1] Буслаев В. С. Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами // УМН. 1987. Т. 42, вып. 6 (258). С. 77–98.
- [2] Avron J., Zak J. Instability of the continuous spectrum: the N-band Stark ladder // J. Math. Phys. 1977. Vol. 18, N 5. P. 918–921.
- [3] Avron J., Gunter L., Zak J. Energy uncertainty in „Stark ladder” // Solid state Commun. 1975. Vol. 16, N 2. P. 189–191.
- [4] Herbst I. W., Howland J. S. The Stark ladder and other onedimensional external field problems // Commun. Math. Phys. 1981. Vol. 80, N 1. P. 23–40.
- [5] Nenciu A., Nenciu G. Dynamics of Bloch electrons in external electric field // J. Phys. A. 1981. Vol. 14, N 10. P. 2817–2827.
- [6] Ненчу А., Ненчу Г. Динамика блоховских электронов во внешнем электрическом поле. Существование лестничных резонансов. Препринт ОИЯИ, Е-17-82-208. Дубна: ОИЯИ, 1982.
- [7] Bentosela F., Grecchi V., Zirrony F. Oscillations of Wannier resonances // Phys. Rev. Lett. 1983. Vol. 50, N 1. P. 84–86.
- [8] Bentosela F., Grecchi V., Zirrony F. Approximate ladder of resonances in a semi-infinite crystal // J. Phys. C. 1982. Vol. 15, N 35. P. 7119–7131.
- [9] Avron J. The lifetime of Wannier ladder states // Ann. Phys. 1982. Vol. 143, N 1. P. 33–53.
- [10] Avron J. On the spectrum of $p^2 + V(x) + ex$ with V periodic and e -complex // J. Phys. A. 1979. Vol. 12. P. 2393.
- [11] Ferrari M., Grecchi V., Zironi F. Stark-Wannier states and Bender-Wu singularities // J. Phys. C. 1985. Vol. 18, N 31. P. 5825–5834.
- [12] Бережковский А. Н., Овчинников А. А. Истинная ширина электронных уровней в кристалле // ФТТ. 1976. Т. 18. С. 3273–3277.
- [13] Буслаев В. С. Адиабатическое возмущение периодического потенциала // ТМФ. 1984. Т. 58, № 2. С. 233–243.
- [14] Буслаев В. С., Дмитриева Л. А. Адиабатическое возмущение периодического потенциала. II // ТМФ. 1987. Т. 73, № 3. С. 430–442.
- [15] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982. 428 с.
- [16] Сусон Н. Л., Froese R. G., Kiesch W., Simon B. Schrödinger operators. Springer, 1987. 320 p.
- [17] Титчмарш Э. Ч. Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Т. 2. М.: Изд-во иностр. лит., 1961. 555 с.
- [18] Фирсова Н. Е. Риманова поверхность квазимульса и теория рассеяния для возмущенного оператора Хилла // Зап. науч. сем. ЛОМИ. 1975. Т. 51. С. 183–196.
- [19] Марченко В. А., Островский И. В. Характеристика спектра оператора Хилла // Мат. сб. 1975. Т. 97, вып. 4. С. 540–606.
- [20] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983. 352 с.
- [21] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега-де-Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31, вып. 1. С. 55–136.