D. Z. Arov, On monotone families of J-contractive matrix functions,
Algebra i Analiz, 1997, Volume 9, Issue 6, 3–37

Алгебра и анализ
Том 9 (1997), вып. 6

О МОНОТОННЫХ СЕМЕЙСТВАХ J-СЖИМАЮЩИХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

© Д. З. Аров

В статье исследуются монотонные последовательности мероморфных J-сжимающих в единичном круге D матриц-функций (м. ф.) W_n, т.е. таких, что $\det W_n(z) \not\equiv 0$ и

$$J \geqslant W_n(z)JW_n^*(z) \geqslant W_{n+1}(z)JW_{n+1}^*(z),$$

где $J^* = J^{-1} = J \neq \pm I_m$. Матрицы J унитарно эквивалентны матрицам $j_{pq} = \operatorname{diag}[I_p, -I_q]$ при соответствующих p и q. В основу исследования положены введенные в §2 две нормировки j_{pq}-сжимающих м. ф. $W(\in \mathcal{P}(p,q))$. Они отличны от нормировки к J-модулю в фиксированной точке $z_0 \in D$, предложенной В. П. Потаповым и использованной в мультипликативной „J-теории". М. ф. $W = [W_{jk}]_1^2$ с диагональными блоками W_{11} и W_{22} порядков p и q соответственно относится к классу $\mathcal{P}_{z_0}^I(p,q)$, если $W \in \mathcal{P}(p,q)$ и выполнено условие нормировки

$$W_{21}(z_0) = 0, \qquad W_{11}(z_0) > 0, \qquad W_{22}(z_0) > 0.$$

Вторая нормировка основана на рассмотрении для $W \in \mathcal{P}(p,q)$ преобразования Потапова-Гинзбурга $S = [S_{jk}]_1^2 = PG(W)$ и левой и правой внутренне-внешней факторизаций $S_{11} = u\psi$, $S_{22} = \varphi v$, где

$$u \in S_{\text{in}}^{p\times p}, \qquad \psi \in S_{\text{out}}^{p\times p}, \qquad v \in S_{\text{in}}^{q\times q}, \qquad \varphi \in S_{\text{out}}^{q\times q}.$$

Включение $W \in \mathcal{P}_{z_0}^{II}(p,q)$ означает, что для W выполнено условие нормировки

$$u(z_0) > 0, \quad v(z_0) > 0, \quad \varphi(z_0) > 0, \quad \psi(z_0) > 0.$$

В §3 получены общие результаты о сходящихся монотонных последовательностях J-сжимающих м. ф.

В §4 исследуются монотонные последовательности J-внутренних м. ф.

Число наименований библиографии: 18.

Ключевые слова: J-сжимающая (J-contractive), J-внутренняя (J-inner), внутренняя (inner), внешняя (outer), матрица-функция (matrix-function), монотонная последовательность (monotone sequence), граничное значение (boundary value), предел (limit), условие нормировки (normalization condition).

§1. Постановка задачи

1.1. Пусть J-сигнатурная матрица m-го порядка с комплексными элементами, т.е. $J^* = J^{-1} = J$.

Через $\mathcal{P}(J)$ обозначим класс В. П. Потапова мероморфных в единичном круге

$$D = \{z : |z| < 1\}$$

матриц-функций (сокращенно — м. ф.) $A(z)$ m-го порядка, принимающих в точках голоморфности в D J-сжимающие значения, т.е. таких, что

$$A^*(z)\, J\, A(z) \leq J,$$

и определитель которых не обращается тождественно в нуль

$$\det A(z) \not\equiv 0.$$

М. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ образуют мультипликативную полугруппу. В фундаментальной работе В. П. Потапова [1] получено мультипликативное представление м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$, обобщающее известное представление Бляшке–Рисса–Херглотца голоморфных сжимающих в D скалярных функций. О роли „J-теории“ В. П. Потапова в различных вопросах математического анализа и его приложений см. [2, 3]. В разработанной В. П. Потаповым теории при исследовании сходимости бесконечных произведений J-сжимающих м. ф. и при получении представления голоморфной в D м. ф. $A(z)$ класса $\mathcal{P}(J)$ с $\det A(z) \neq 0$ в виде мультипликативного интеграла важную роль играет введенное В. П. Потаповым и изученное им понятие J-модуля J-сжимающей невырожденной матрицы. При этом сходимость рассматриваемой последовательности м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ достигается путем нормировки м. ф. в фиксированной точке z_0 ($\in D$) к J-модулю.

В настоящей работе исследуется сходимость монотонных семейств м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ с помощью других их нормировок.

Под монотонным понимается такое семейство $\{A_x\}$ м. ф. $A_x(z)$ класса $\mathcal{P}(J)$ с параметром x, пробегающим некоторый фильтр (кверху) X, для которого

$$A_{x'}^{-1} \cdot A_{x''} \in \mathcal{P}(J) \quad \text{при } x' < x''.$$

С самого начала потребность в развитии теории J-сжимающих м. ф. возникла в связи с тем, что к классу $\mathcal{P}(J)$ принадлежат характеристические функции неунитарных операторов с конечным рангом неунитарности. Теория характеристических функций неунитарных и несамосопряженных операторов была успешно развита М. С. Лившицем и его последователями, причем во взаимном влиянии с мультипликативной теорией В. П. Потапова [4, 5].

Эти же м. ф. являются резольвентными матрицами изометрических и симметрических операторов, введенными М. Г. Крейном для описания обобщенных резольвент [6, 7]. В широком круге задач (проблема моментов Гамбургера, проблемы интерполяции в специальных классах функций Шура, Неванлинны и Каратеодори, проблемы М. Г. Крейна продолжения положительно определенных и винтовых функций и далеко идущие их обобщения на случай м. ф., задачи описания спектральных функций краевых задач для дифференциальных операторов и канонических дифференциальных систем) описание решений в так называемом вполне неопределенном случае дается в виде семейства функций, получаемого в результате дробно-линейного преобразования над м. ф. (или парами м. ф.) определенного класса (Шура, Каратеодори или др.), играющими роль параметра, с матрицей коэффициентов (резольвентной матрицей, в терминологии М. Г. Крейна), являющейся м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ с соответствующей матрицей J.

Монотонные семейства м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ возникают при рассмотрении монотонных по вложению инвариантных подпространств оператора (см. [4, 5]), при исследовании интерполяционных задач в специальных классах путем предварительного рассмотрения „усеченных" задач (см. [8]), при исследовании сингулярных дифференциальных операторов путем предварительного рассмотрения этих операторов на „усеченных" промежутках их регулярности (см. [9]). Разнообразие этих задач показывает, что имеет смысл исследование монотонных семейств м. ф. $\{A_x\}$ с параметром $x \in X$, пробегающим не обязательно множество натуральных чисел ($X = \mathbb{N}$), конечный или полубесконечный промежуток ($X = (a, b)$), а, вообще говоря, некоторый направленный кверху фильтр X. Однако для упрощения изложения в настоящей статье результаты формулируются и доказываются для случая, когда $X = \mathbb{N}$. Читатель без особого труда может внести изменения в формулировки и доказательства соответствующих утверждений для случая произвольного X.

Исследованию монотонных семейств м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ ранее была посвящена фундаментальная работа С. А. Орлова [9].

Результаты настоящей работы относятся к индефинитному случаю, когда $J \neq \pm I_m$. Такие сигнатурные матрицы J унитарно эквивалентны матрице j_{pq},

$$j_{pq} = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_q \end{bmatrix},$$

где p и q — кратности собственных чисел 1 и -1 матрицы J,

$$p = \operatorname{rang}(I_m + J), \qquad q = \operatorname{rang}(I_m - J).$$

Если $J = V^* j_{pq} V$, где V — унитарная матрица, то $A(z) \in \mathcal{P}(J)$ тогда и только тогда, когда соответствующая м. ф.

$$W(z) = V\,A(z)\,V^* \tag{1.1}$$

принадлежит классу $\mathcal{P}(j_{pq})$. При соответствии (1.1) монотонному семейству $\{A_x\}$ м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ отвечает монотонное семейство $\{W_x\}$ м. ф. класса $\mathcal{P}(j_{pq})$. В силу этого в работе рассматриваются лишь м. ф. класса $\mathcal{P}(j_{pq})$. Класс $\mathcal{P}(j_{pq})$ обозначается через $\mathcal{P}(p,q)$. Полученные здесь результаты для м. ф. класса $\mathcal{P}(p,q)$ можно переформулировать для м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ с учетом соответствия (1.1) между м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ и $\mathcal{P}(p,q)$.

1.2. Через $S^{p\times q}$ обозначим класс Шура голоморфных сжимающих в D м. ф. $S(z)$ порядка $p\times q$,

$$S^*(z)\,S(z)\le I_q,\quad z\in D.$$

По теореме Фату каждая м. ф. $S(z)$ класса $S^{p\times q}$ имеет граничные значения почти всюду на ∂D,

$$S(\zeta)=\lim_{r\uparrow 1}S(r\zeta),\quad |\zeta|=1.$$

М. ф. $S(z)$ класса $S^{p\times q}$ называется *внутренней* (*$*$-внутренней*), если $S^*(\zeta)\,S(\zeta)=I_q$ ($S(\zeta)\,S^*(\zeta)=I_p$ соответственно) почти всюду на ∂D. Класс таких $S(z)$ будет обозначаться через $S_{\mathrm{in}}^{p\times q}$ ($S_{*\,\mathrm{in}}^{p\times q}$ соответственно). Класс $S_{\mathrm{in}}^{p\times q}$ ($S_{*\,\mathrm{in}}^{p\times q}$) не пуст, если $p\ge q$ ($p\le q$ соответственно); $S_{\mathrm{in}}^{p\times p}=S_{*\,\mathrm{in}}^{p\times p}$.

Рассмотрим разбиение м. ф. W порядка $m=p+q$ на блоки

$$W=\begin{bmatrix}W_{11} & W_{12}\\ W_{21} & W_{22}\end{bmatrix}$$

с диагональными блоками W_{11} и W_{22} порядков p и q соответственно. Тогда для м. ф. $W=[W_{ik}]_1^2$ класса $\mathcal{P}(p,q)$ определено дробно-линейное преобразование

$$S_{\mathcal{E}}=T_W(\mathcal{E}):=[W_{11}\mathcal{E}+W_{12}][W_{21}\mathcal{E}+W_{22}]^{-1}\tag{1.2}$$

с м. ф. коэффициентов W и оно инъективно отображает класс $S^{p\times q}$ в себя, что непосредственно проверяется. Таким же свойством, очевидно, обладают и коллинеарные м. ф. $\rho(z)\,W(z)$, где $\rho(z)$ — произвольная скалярная мероморфная в D функция. Совсем непросто доказывается, что верно и обратное утверждение (теорема Л. А. Симаковой [10, 11]): *если $W(z)=[W_{ik}]_1^2$ — мероморфная в D м. ф. и дробно-линейное преобразование* (1.2) *инъективно отображает класс $S^{p\times q}$ в себя, то существует скалярная функция $\rho(z)$ такая, что $\rho(z)W(z)\in\mathcal{P}(p,q)$.*

Для $W=[W_{ik}]_1^2$ обозначим

$$T_W[E]=\{T_W(\mathcal{E}):\mathcal{E}\in E\}.$$

Таким образом, для $W=[W_{ik}]_1^2\in\mathcal{P}(p,q)$ имеем

$$T_W[S^{p\times q}]\subset S^{p\times q}.$$

1.3. Если $W_1 \in \mathcal{P}(p,q)$ и $W_1^{-1} W_2 \in \mathcal{P}(p,g)$, то $W_2 \in \mathcal{P}(p,q)$ и

$$T_{W_2}[S^{p\times q}] \subset T_{W_1}[S^{p\times q}] \subset S^{p\times q}.$$

Поэтому монотонной последовательности м. ф. W_n класса $\mathcal{P}(p,q)$ отвечает монотонная по вложению последовательность множеств $T_{W_n}[S^{p\times q}]$ м. ф. класса $S^{p\times q}$

$$S^{p\times q} \supset T_{W_1}[S^{p\times q}] \supset \ldots \supset T_{W_n}[S^{p\times q}] \supset \ldots \tag{1.3}$$

С точностью до скалярных множителей верно и обратное (см. [10, 11]): *если для мероморфных в D м. ф. $W_n = [W_{jk}^{(n)}]_1^2$ порядка $m = p + q$ с диагональными блоками $W_{11}^{(n)}$ порядка p и с* $\det W_n(z) \not\equiv 0$ *имеем* (1.3), *то существуют скалярные мероморфные в D функции $\rho_n(z)$ такие, что $\widetilde{W}_n(z) := \rho_n(z) W_n(z) \in \mathcal{P}(p,q)$ и $\widetilde{W}_n^{-1} \widetilde{W}_{n+1} \in \mathcal{P}(p,q)$.*

При рассмотрении монотонных семейств $\{W_n\}$ м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$ представляет интерес параметрическое описание пересечения

$$S(\{W_n\}) := \bigcap_{n=1}^{\infty} T_{W_n}[S^{p\times q}].$$

Нетрудно показать, что в случае, когда существует в D предел

$$W(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z),$$

то

$$S(\{W_n\}) = T_W[S^{p\times q}].$$

Этим объясняется особый интерес к исследованию вопроса сходимости монотонной последовательности м. ф. класса $\mathcal{P}(p,q)$, которому и посвящена настоящая работа.

Результаты этой работы докладывались на конференциях, посвященных 80-летию М. Котляра (Каракас, январь 1994) и 80-летию В. П. Потапова (Лейпциг, август 1994).

Автор благодарен профессорам Б. Фритцше и Б. Кирстейну за полезные обсуждения работы и замечания, а также Л. Н. Коваленко за выполненную трудоемкую качественную подготовку рукописи к публикации на LATEX.

§2. Преобразование Потапова–Гинзбурга и связанные с ним нормировки м. ф. класса $\mathcal{P}(p,q)$

2.1. При исследовании м. ф. класса $\mathcal{P}(J)$ часто используется преобразование Потапова-Гинзбурга (сокращенно — PG-преобразование) класса $\mathcal{P}(J)$ в класс $S^{m\times m}$, определяемое формулой (см. [12, 13])

$$S = (\mathrm{PG})(A) := (P_- + P_+ A)(P_+ + P_- A)^{-1}, \tag{2.1}$$

где $A \in \mathcal{P}(J)$, $S \in S^{m\times m}$, $P_\pm = \frac{1}{2}(I_m \pm J)$.

При $J = j_{pq}$ имеем

$$P_+ = \begin{bmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0_{q\times q} \end{bmatrix}, \qquad P_- = \begin{bmatrix} 0_{p\times p} & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix}.$$

Если $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, то для $S = (\mathrm{PG})(W)$ естественно также рассматривать разбиение на блоки $S = [S_{ik}]_1^2$ с диагональными блоками S_{11} и S_{22} порядков p и q соответственно. При этом формула (2.1) записывается в виде

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} - W_{12}\,W_{22}^{-1}\,W_{21} & W_{12}\,W_{22}^{-1} \\ -\,W_{22}^{-1}\,W_{21} & W_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.2}$$

Обратное к (2.1) преобразование записывается таким же образом:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} - S_{12}\,S_{22}^{-1}\,S_{21} & S_{12}\,S_{22}^{-1} \\ -\,S_{22}^{-1}\,S_{21} & S_{22}^{-1} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Так как

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & W_{12}W_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_{11} - W_{12}W_{22}^{-1}W_{21} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ W_{22}^{-1}W_{21} & I \end{bmatrix},$$

то, учитывая (2.2), имеем

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & S_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11} & 0 \\ 0 & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -S_{21} & I \end{bmatrix},$$

откуда видно, что

$$\det W(z) = \det S_{11}(z) \cdot \det W_{22}(z) = \frac{\det S_{11}(z)}{\det S_{22}(z)}, \tag{2.4}$$

$$3^{-1}\,\|W_{22}(z)\| \le \|W(z)\| \le 3\,\|W_{22}(z)\|, \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned} W^{-1}(z) &= \begin{bmatrix} I & 0 \\ S_{21}(z) & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_{11}^{-1}(z) & 0 \\ 0 & S_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -S_{12}(z) \\ 0 & I \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{11}^{-1}(z) & -S_{11}^{-1}(z)\,S_{12}(z) \\ S_{21}(z)\,S_{11}^{-1}(z) & S_{22}(z) - S_{21}(z)\,S_{11}^{-1}(z)\,S_{12}(z) \end{bmatrix}, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$3^{-1}\,\|S_{11}^{-1}(z)\| \le \|W^{-1}(z)\| \le 3\,\|S_{11}^{-1}(z)\|. \tag{2.7}$$

Обозначим для мероморфной в D м. ф. $g(z)$ через H_g^+ множество точек в D, в которых $g(z)$ является голоморфной. Из соотношений (2.3) и (2.6) видно, что для $W = [W_{ik}]_1^2$ из $\mathcal{P}(p,q)$ и соответствующей м. ф. $S = [S_{ik}]_1^2$ из $S^{m\times m}$ имеем

$$H_W^+ = H_{W_{22}}^+ = H_{S_{22}^{-1}}^+, \qquad H_{W^{-1}}^+ = H_{S_{11}^{-1}}^+. \tag{2.8}$$

Преобразование (2.2) отображает взаимно однозначно класс $\mathcal{P}(p,q)$ на подкласс м. ф. $S = [S_{ik}]_1^2$ класса $S^{m\times m}$ $(m = p + q)$ с невырожденными диагональными блоками S_{11} и S_{22} порядков p и q соответственно,

$$\det S_{11}(z) \not\equiv 0, \qquad \det S_{22}(z) \not\equiv 0. \tag{2.9}$$

2.2. Для произвольной м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2$ класса $\mathcal{P}(p,q)$ с диагональными блоками W_{11} и W_{22} порядков p и q соответственно рассмотрим м. ф.

$$W_\#(z) = U^*\,[W^*(\overline{z})]^{-1}\,U, \quad \text{где } U = \begin{pmatrix} 0_{p\times q} & -I_p \\ I_q & 0_{q\times p} \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Из соотношения (2.6) и определения $W_\#(z)$ (2.10) видно, что

$$W_\# = \begin{bmatrix} S_{22}^*(\overline{z}) - S_{12}^*(\overline{z})\cdot[S_{11}^*(\overline{z})]^{-1}\,S_{21}^*(\overline{z}) & S_{12}^*(\overline{z})\,[S_{11}^*(\overline{z})]^{-1} \\ -[S_{11}^*(\overline{z})]^{-1}\,S_{21}^*(\overline{z}) & [S_{11}^*(\overline{z})]^{-1} \end{bmatrix}.$$

Отсюда видно, что включения $W \in \mathcal{P}(p,q)$ и $W_\# \in \mathcal{P}(q,p)$ эквивалентны и для $W_\#$ имеем

$$(\mathrm{PG})(W_\#) = \begin{bmatrix} S_{22}^*(\overline{z}) & S_{12}^*(\overline{z}) \\ S_{21}^*(\overline{z}) & S_{11}^*(\overline{z}) \end{bmatrix}. \tag{2.11}$$

Очевидно, что

$$(W_1\,W_2)_\# = (W_1)_\#(W_2)_\#.$$

Для $W_\#$ блок $S_{11}^*(\overline{z})$ преобразования $(\mathrm{PG})(W_\#)$ играет такую же роль, какую блок $S_{22}(z)$ играет для $W(\in \mathcal{P}(p,q))$. Это замечание позволит для $S_{11}(z)$ получать результаты, аналогичные тем, которые будут получены для $S_{22}(z)$.

Полезно будет также иметь в виду, что для $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$ и $\mathcal{E} \in S^{p\times q}$ имеем (см. (1.2))

$$S_\mathcal{E}(z) = T_W[\mathcal{E}] = S_{12}(z) + S_{11}(z)\mathcal{E}(z)(I - S_{21}(z)\mathcal{E}(z))^{-1}S_{22}(z), \tag{2.12}$$

$$S_\mathcal{E}^*(\overline{z}) = S_{12}^*(\overline{z}) + S_{22}^*(\overline{z})\mathcal{E}^*(\overline{z})(I - S_{21}^*(\overline{z})\mathcal{E}^*(\overline{z}))^{-1}S_{11}^*(\overline{z}). \tag{2.13}$$

Заметим, что блок S_{21} является строго сжимающим в D, т.е.

$$S_{21}^*(z)\,S_{21}(z) < I_p, \qquad z \in D. \tag{2.14}$$

Действительно, так как $S = [S_{ik}]_1^2 \in S^{m\times m}$, то

$$S_{11}^*(z)\,S_{11}(z) + S_{21}^*(z)\,S_{21}(z) \le I_p.$$

Если бы для некоторого ненулевого вектора $\xi \in C^q$ в некоторой точке $z_0 \in D$ имели бы $\xi^*\, S_{21}^*(z_0)\,S_{21}(z_0)\,\xi = \xi^*\xi$, то по принципу максимума для м. ф. $S_{21} \in S^{q\times p}$ имели бы для всех точек $z \in D$

$$\xi^*\, S_{21}^*(z)\,S_{21}(z)\,\xi = \xi^*\,\xi$$

и тогда $\xi^*\, S_{11}^*(z)\,S_{11}(z)\,\xi \equiv 0$, что невозможно, так как $\det S_{11}(z) \not\equiv 0$.

2.3. Если $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ и V — произвольная постоянная j_{pq}-унитарная матрица, то

$$W(z)\,V \in \mathcal{P}(p,q) \quad \text{и} \quad T_{WV}\,[S^{p\times q}] = T_W\,[S^{p\times q}].$$

Лемма 2.1. *Пусть* $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ *и* z_0 *— фиксированная точка в круге* D. *Тогда существует постоянная* j_{pq}*-унитарная матрица* V *такая, что м. ф.* $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 := W\,V$ *удовлетворяет условию нормировки*

$$\widetilde{S}_{21}(z_0) = 0, \quad \text{где } \widetilde{S}_{21}(z) := -\widetilde{W}_{22}^{-1}(z)\widetilde{W}_{21}(z). \tag{2.15}$$

Эта матрица V *определяется с точностью до правого постоянного* j_{pq}*-унитарного блочно-диагонального множителя с диагональными унитарными блоками* V_1 *и* V_2 *порядков* p *и* q, *а именно:*

$$V = H(\mathcal{E})\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}, \qquad H(\mathcal{E}) := \begin{bmatrix} (I-\mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2} & \mathcal{E}(I-\mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2} \\ \mathcal{E}^*(I-\mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2} & (I-\mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2} \end{bmatrix}, \tag{2.16}$$

где

$$\mathcal{E} = S_{21}^*(z_0). \tag{2.17}$$

Доказательство. Для $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ и постоянной j_{pq}-унитарной матрицы $V = [V_{ik}]_1^2$ имеем

$$\begin{aligned} \widetilde{W} &= [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 := WV \in \mathcal{P}(p,q), \\ -\widetilde{S}_{21} &= [W_{21}V_{12} + W_{22}V_{22}]^{-1}\,[W_{21}V_{11} + W_{22}V_{21}] \\ &= V_{22}^{-1}[I - S_{21}\mathcal{E}]^{-1}[\mathcal{E}^* - S_{21}]V_{11}, \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{E} = V_{12}V_{22}^{-1} = (V_{11}^*)^{-1}V_{21}^*, \quad \mathcal{E}^*\mathcal{E} < I_q. \tag{2.18}$$

Отсюда видно, что нормировка $\widetilde{S}_{21}(z_0) = 0$ обеспечивается выбором $\mathcal{E} = S_{21}^*(z_0)$ ($S_{21} = -W_{22}^{-1} W_{21} \in S^{q\times p}$).

Такой выбор возможен в силу свойства (2.14). Соотношения (2.18) можно переписать в виде

$$V_{12} = \mathcal{E}\, V_{22}, \qquad V_{21} = \mathcal{E}^*\, V_{11}.$$

Кроме того, для блоков j_{pq}-унитарной матрицы $V = [V_{ik}]_1^2$ должны также иметь соотношения

$$V_{11}^* V_{11} - V_{21}^* V_{21} = I_p, \qquad V_{22}^* V_{22} - V_{12}^* V_{12} = I_q$$

так, что

$$\begin{array}{r|r} V_{11}^*(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)V_{11} = I_p, & V_{22}^*(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})V_{22} = I_q, \\ V_{11}V_{11}^* = (I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1}, & V_{22}V_{22}^* = (I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1}, \end{array}$$

и потому

$$V_{11} = (I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2} V_1, \qquad V_{22} = (I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2} V_2,$$

где V_1 и V_2 — унитарные матрицы порядков p и q соответственно. Приходим для V к формулам (2.16), (2.17), обеспечивающим нормировку (2.15).

Замечание 2.1. Если $z_0 \in H_W^+$, то условие нормировки (2.15) эквивалентно условию

$$\widetilde{W}_{21}(z_0) = 0.$$

Если же $z_0 \notin H_W^+$, то z_0 является полюсом м. ф. W и м. ф. $\widetilde{W}$. В то же время для $\widetilde{S} = (\mathrm{PG})(\widetilde{W})$ имеем $H_{\widetilde{S}}^+ = D$.

Лемма 2.2. *Пусть* $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ *и* $z_0 \in H_W^+$, $z_0 \in H_{W^{-1}}^+$, *т.е. для* $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$ *имеем*

$$\det S_{11}(z_0) \neq 0, \qquad \det S_{22}(z_0) \neq 0.$$

Тогда существует единственная j_{pq}*-унитарная матрица* $V = [V_{ik}]_1^2$ *такая, что* $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 := W\,V$ *будет нормирована условиями*

$$\widetilde{W}_{21}(z_0) = 0, \qquad \widetilde{W}_{11}(z_0) > 0, \qquad \widetilde{W}_{22}(z_0) > 0, \tag{2.19}$$

что равносильно для $\widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widetilde{W})$ *нормировке условиями*

$$\widetilde{S}_{21}(z_0) = 0, \qquad \widetilde{S}_{11}(z_0) > 0, \qquad \widetilde{S}_{22}(z_0) > 0. \tag{2.20}$$

При этом

$$\widetilde{S}_{11}(z_0) = \widetilde{W}_{11}(z_0) = \{S_{11}(z_0)(I - S_{21}^*(z_0)\,S_{21}(z_0))^{-1}\,S_{11}^*(z_0)\}^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$\widetilde{S}_{22}(z_0) = \widetilde{W}_{22}^{-1}(z_0) = \{S_{22}^*(z_0)(I - S_{21}(z_0)\,S_{21}^*(z_0))^{-1}\,S_{22}(z_0)\}^{1/2}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Как показано в лемме 2.1, нормировка (2.15) достигается для $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 = W\,V$ при выборе унитарной матрицы V по формулам (2.16), (2.17), где V_1 и V_2 — унитарные матрицы порядков p и q соответственно. Пусть $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$, $\widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widetilde{W})$. При этом

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{11}(z_0) &= \widetilde{W}_{11}(z_0) = (W_{11}(z_0) + W_{12}(z_0)\mathcal{E}^*)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2}\,V_1\\
&= S_{11}(z_0)\,(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2}\,V_1,\\
\widetilde{W}_{22}(z_0) &= (W_{21}(z_0)\,\mathcal{E} + W_{22}(z_0))(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2}\,V_2 = W_{22}(z_0)\,(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{1/2}\,V_2,\\
\widetilde{S}_{22}(z_0) &= V_2^*\,(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2}\,S_{22}(z_0).
\end{aligned}$$

Отсюда видно, что нормировка (2.20) достигается при выборе унитарных матриц V_1 и V_2 такими, чтобы $V_1\,\widetilde{S}_{11}^*(z_0)$ и $V_2\,\widetilde{S}_{22}(z_0)$ были полярными представлениями матриц $(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{-1/2}\,S_{11}^*(z_0)$ и $(I - \mathcal{E}^*\,\mathcal{E})^{-1/2}\,S_{22}(z_0)$ соответственно. При этом будем иметь равенства (2.21) и (2.22).

2.4 Замечание 2.2. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$ и $z_0 \in H_W^+ \cap H_{W^{-1}}^+$. Рассмотрим множество значений м. ф. из $T_W[S^{p\times q}]$ в точке z_0:

$$B(z_0\,;W) := \{S(z_0)\ \ : S \in T_W\,[S^{p\times q}]\}.$$

Покажем, что $B(z_0\,;W)$ является матричным шаром с левым и правым полурадиусами $R_l = \widetilde{S}_{11}(z_0)$ и $R_r = \widetilde{S}_{22}(z_0)$, определяемыми по формулам (2.21) и (2.22). Действительно, $B(z_0\,;W) = B(z_0\,;\widetilde{W})$, где $\widetilde{W} = W\,V = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2$, V — j_{pq}-унитарная матрица такая, что $\widetilde{W}$ нормирована условиями (2.19). Поэтому, пользуясь формулой (2.12), получаем

$$B(z_0\,;W) = \{w\ \ :\ w = \widetilde{S}_{12}(z_0) + \widetilde{S}_{11}(z_0)\,\mathcal{E}\,\widetilde{S}_{22}(z_0),\ \ \mathcal{E} \in C^{p\times q},\ \ \mathcal{E}^*\,\mathcal{E} \le I_q\}.$$

Центр $\widetilde{S}_{12}(z_0)$ этого шара определяется по формуле

$$\widetilde{S}_{12}(z_0) = T_W[\mathcal{E}_0] = S_{12}(z_0) + S_{11}(z_0)\,\mathcal{E}_0\,(I - S_{21}(z_0)\,\mathcal{E}_0)^{-1}\,S_{22}(z_0), \qquad \mathcal{E}_0 = S_{21}^*(z_0).$$

Множество всех м. ф. $W(z)$ класса $\mathcal{P}(p,q)$ голоморфных вместе с $W^{-1}(z)$ в точке $z_0(\in D)$ и нормированных условиями

$$W_{21}(z_0) = 0, \qquad W_{11}(z_0) > 0, \qquad W_{22}(z_0) > 0 \tag{2.23}$$

обозначим через $\mathcal{P}_{z_0}^{\mathrm{I}}(p,q)$.

Согласно лемме 2.2, для любой м. ф. W класса $\mathcal{P}(p,q)$ голоморфной вместе с W^{-1} в точке z_0 существует единственная j_{pq}-унитарная матрица V такая, что $W\,V \in \mathcal{P}_{z_0}^{\mathrm{I}}(p,q)$.

2.5. Обозначим через $H_\infty^{k\times l}$ класс голоморфных ограниченных в D м. ф. h порядка $k\times l$; через $N^{k\times l}$ обозначим класс мероморфных в D м. ф. h порядка $k\times l$ с ограниченной неванлинновской характеристикой, т.е. представимых в виде отношения $h = h_2^{-1}h_1$, где $h_1 \in H_\infty^{k\times l}$, $h_2 \in H_\infty$ ($H_\infty = H_\infty^{1\times 1}$). Из теоремы Фату следует, что м. ф. h класса $N^{k\times l}$ имеют граничные значения почти всюду на ∂D. Пользуясь PG-преобразованием, можно убедиться в том, что $\mathcal{P}(J) \subset N^{m\times m}$.

М. ф. h из $H_\infty^{k\times k}$ является внешней, если $\det h(z) \neq 0$ в D, и кроме того,

$$\ln|\det h(0)| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{|\zeta|=1} \ln|\det h(\zeta)|\,|d\zeta|.$$

Класс внешних м. ф. h из $S^{k\times k}$ обозначим через $S_{\mathrm{out}}^{k\times k}$.

Через $N_+^{k\times l}$ обозначим класс Смирнова м. ф. h, представимых в виде $h = h_2^{-1}h_1$, где $h_1 \in H_\infty^{k\times l}$, h_2 — внешняя функция из H_∞. М. ф. h из $N_+^{k\times k}$ является внешней, если существует представление $h = h_2^{-1}h_1$, где $h_1 \in H_\infty^{k\times k}$, $h_2 \in H_\infty$, h_1, h_2 — внешние функции. Класс таких h обозначим через $N_{\mathrm{out}}^{k\times k}$. Произведение м. ф. из $N_+^{k\times k}$ принадлежит $N_+^{k\times k}$, а произведение м. ф. из $N_{\mathrm{out}}^{k\times k}$ принадлежит $N_{\mathrm{out}}^{k\times k}$; $h \in N_{\mathrm{out}}^{k\times k}$ тогда и только тогда, когда $h^{\pm 1} \in N_+^{k\times k}$. Заметим, что, если $S \in S^{k\times k}$ и $\det(I-S) \not\equiv 0$, то $I-S$ — внешняя м. ф. и при этом $(I-S)^{-1} \in N_{\mathrm{out}}^{k\times k}$ [12]. В классе $N_+^{k\times l}$ справедлив принцип максимума Смирнова [14]: *если $h \in N_+^{k\times l}$ и для граничного значения $h(\zeta)$ имеем $h \in L_\infty^{k\times l}$, т.е. $\|h\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}\{\|h(\zeta)\| : |\zeta| = 1\} < \infty$, то $h \in H_\infty^{k\times l}$ и более того $\|h\|_\infty = \sup\{\|h(z)\| : |z| < 1\}$.* Для $S \in S^{k\times k}$ с $\det S(z) \not\equiv 0$ существуют левая и правая внутренне внешние факторизации [15]:

$$S = u\varphi, \quad S = \psi v, \quad \text{где } u \in S_{\mathrm{in}}^{k\times k}, \quad v \in S_{\mathrm{in}}^{k\times k}, \quad \varphi \in S_{\mathrm{out}}^{k\times k}, \quad \psi \in S_{\mathrm{out}}^{k\times k};$$

они определяются однозначно при дополнительном условии нормировки. Нормировка может осуществляться, например, условиями: $\varphi(z_0) > 0$, $\psi(z_0) > 0$, где z_0 — фиксированная точка в D. Если $\det S(z_0) \neq 0$, то нормировка может также осуществляться условиями: $u(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$.

2.6. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ и $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$. Рассмотрим внутренне-внешние факторизации блоков S_{11} и S_{22}, соответственно левую и правую:

$$S_{11} = u\,\varphi, \qquad S_{22} = \psi\, v, \tag{2.24}$$

где $u \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}$, $\varphi \in S_{\mathrm{out}}^{p\times p}$, $v \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}$, $\psi \in S_{\mathrm{out}}^{q\times q}$.

Будем называть $[u,v]$ *ассоциированной парой внутренних м. ф. для* W и обозначать $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$, а $[\varphi,\psi]$ — *ассоциированной парой внешних м. ф. для* W и обозначать $[\varphi,\psi] \in \mathrm{apo}(W)$. Пара $[\varphi,\psi]$ из $\mathrm{apo}(W)$ может быть выбрана нормированной условием $\varphi(z_0) > 0$, $\psi(z_0) > 0$ и тогда она однозначно определяется по W. С другой стороны, если $z_0 \in H_W^+ \cap H_{W^{-1}}^+$, то пара $[u,v]$ из $\mathrm{api}(W)$

может быть выбрана нормированной условием $u(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$, и тогда она определяется по W однозначно. Однако вовсе не обязательно, чтобы при этом рассматриваемые в факторизациях (2.24) множители φ и ψ удовлетворяли условию $\varphi(z_0) > 0$, $\psi(z_0) > 0$.

Обозначим через $\mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ множество м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2$ класса $\mathcal{P}(p,q)$, для которых соответствующие м. ф. $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$ нормированы условиями

$$S_{21}(z_0) = 0, \quad u(z_0) > 0, \quad v(z_0) > 0, \quad \varphi(z_0) > 0, \quad \psi(z_0) > 0, \tag{2.25}$$

где u, v, φ, ψ — м. ф., рассматриваемые во внутренне-внешних факторизациях (2.24) диагональных блоков S_{11} и S_{22} м. ф. S.

Лемма 2.3. *Пусть* $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ *и* $z_0 \in H^+_W \cap H^+_{W^{-1}}$. *Тогда существует единственная* j_{pq}*-унитарная матрица* $V = [V_{ik}]_1^2$ *такая, что* $\widetilde{W} := W\,V \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$.

Доказательство. Как и при доказательстве леммы 2.2 воспользуемся леммой 2.1, по которой все j_{pq}-унитарные матрицы $V = [V_{ik}]_1^2$, дающие м. ф. $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 = W\,V$ с нормировкой (2.15), описываются формулами (2.16), (2.17). При этом для $\widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widetilde{W})$ получаем

$$\begin{aligned}
\widetilde{S}_{22}(z) &= V_2^*\,(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{1/2}\,(I - S_{21}(z)\,\mathcal{E})^{-1}\,S_{22}(z) = \widetilde{\psi}(z)\,v(z),\\
\widetilde{S}_{11}(z) &= S_{11}(z)\,(I - \mathcal{E}\,S_{21}(z))^{-1}\,(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{1/2}\,V_1 = u(z)\,\widetilde{\varphi}(z),
\end{aligned}$$

где $\mathcal{E} = S_{21}^*(z_0)$, V_1 и V_2 — унитарные матрицы порядков p и q соответственно

$$\widetilde{\varphi} = \varphi\,(I - \mathcal{E}\,S_{21})^{-1}\,(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{1/2}\,V_1, \qquad \widetilde{\psi} = V_2^*\,(I - \mathcal{E}^*\,\mathcal{E})^{1/2}\,(I - S_{21}\,\mathcal{E})^{-1}\,\psi, \tag{2.26}$$

u, v, φ и ψ — м. ф., рассматриваемые во внутренне-внешних факторизациях (2.24) диагональных блоков S_{11} и S_{22} м. ф. S. В факторизациях (2.24) внутренние множители u и v можно выбрать нормированными условиями $u(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$, и тогда u, v, φ, ψ определяются по S_{11} и S_{22} однозначно. Изложенная в п. 2.5 информация о внешних м. ф. класса $N^{k\times k}$ позволяет заключить из формул (2.26), что $\widetilde{\varphi} \in S^{p\times p}_{\mathrm{out}}$ и $\widetilde{\psi} \in S^{q\times q}_{\mathrm{out}}$, так что

$$\widetilde{S}_{11} = u\,\widetilde{\varphi}, \qquad \widetilde{S}_{22} = \widetilde{\psi}\,v$$

являются внутренне-внешними факторизациями, соответственно левой и правой, блоков $\widetilde{S}_{11}$ и $\widetilde{S}_{22}$.

Так как

$$\widetilde{\varphi} = \varphi(z_0)\,(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{-1/2}\,V_1, \qquad \widetilde{\psi} = V_2^*\,(I - \mathcal{E}^*\,\mathcal{E})^{-1/2}\,\psi(z_0),$$

то получим нужное нормировочное условие $\widetilde{\varphi}(z_0) > 0$, $\widetilde{\psi}(z_0) > 0$, выбрав унитарные матрицы V_1 и V_2 такими, чтобы

$$\varphi(z_0)(I - \mathcal{E}\,\mathcal{E}^*)^{-1/2} = R_1\,V_1^*, \qquad (I - \mathcal{E}^*\,\mathcal{E})^{-1/2}\,\psi(z_0) = V_2\,R_2,$$

где

$$R_1 = \{\varphi_1(z_0)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1}\varphi_1^*(z_0)\}^{1/2} > 0,$$
$$R_2 = \{\varphi_2^*(z_0)(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1}\varphi_2(z_0)\}^{1/2} > 0.$$

§3. Сходимость монотонной последовательности нормированных J-сжимающих м. ф.

3.1. Пусть $A \in \mathcal{P}(J)$ и $\widetilde{A} \in \mathcal{P}(J)$. Будем писать $A \prec \widetilde{A}$, если $A^{-1}\,\widetilde{A} \in \mathcal{P}(J)$. Последовательность м. ф. A_n из $\mathcal{P}(J)$ называется *монотонной*, если $A_n \prec A_{n+1}$, $n \geq 1$.

Нас будет интересовать вопрос, когда для такой последовательности существует в точках голоморфности всех м. ф. A_n в D предел

$$A(z) = \lim_{n\to\infty} A_n(z),$$

причем $\det A(z) \not\equiv 0$, т.е. $A \in \mathcal{P}(J)$. Как уже отмечалось в п. 1.1 достаточно рассмотреть случай, когда $J = j_{pq}$, т.е. когда $\mathcal{P}(J) = \mathcal{P}(p,q)$. Более того, как это будет ясно из последующего, достаточно исследовать проблему сходимости монотонной последовательности нормированных м. ф. W_n, например, $W_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ $(n \geq 1)$ или $W_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ $(n \geq 1)$.

3.2. Пусть $u \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}$, $\widetilde{u} \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}$, $v \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}$, $\widetilde{v} \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}$. Будем писать $[u,v] \prec [\widetilde{u},\widetilde{v}]$, если

$$u^{-1}\widetilde{u} \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}, \qquad \widetilde{v}v^{-1} \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}.$$

Лемма 3.1. *Пусть $W \in \mathcal{P}(p,q)$, $\widetilde{W} \in \mathcal{P}(p,q)$ и $W \prec \widetilde{W}$. Пусть $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$, $[\widetilde{u},\widetilde{v}] \in \mathrm{api}(\widetilde{W})$. Тогда $[u,v] \prec [\widetilde{u},\widetilde{v}]$.*

Доказательство. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$ и $W \prec \widetilde{W}$, т.е. $\widehat{W} = [\widehat{W}_{ik}]_1^2 := W^{-1}\,\widetilde{W} \in \mathcal{P}(p,q)$.

Рассмотрим

$$S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W), \qquad \widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widetilde{W}), \qquad \widehat{S} = [\widehat{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widehat{W}).$$

Имеем

$$\widetilde{W}_{22} = W_{21}\,\widehat{W}_{12} + W_{22}\,\widehat{W}_{22} = W_{22}\,(I - S_{21}\,\widehat{S}_{12})\,\widehat{W}_{22},$$
$$\widetilde{S}_{22} = \widehat{S}_{22}\,(I - S_{21}\,\widehat{S}_{12})^{-1}\,S_{22}. \tag{3.1}$$

Поскольку $\widetilde{W}_{\#} = W_{\#}\,\widehat{W}_{\#}$, то, учитывая формулу (2.11), аналогично получим, что

$$\widetilde{S}_{11} = S_{11}\,(I - \widehat{S}_{12}\,S_{21})^{-1}\,\widehat{S}_{11}. \tag{3.2}$$

Пусть

$$S_{11} = u\,\varphi, \quad S_{22} = \psi\,v; \qquad \widetilde{S}_{11} = \widetilde{u}\,\widetilde{\varphi}, \quad \widetilde{S}_{22} = \widetilde{\psi}\,\widetilde{v}, \tag{3.3}$$

где $[u,v] \in \operatorname{api}(W)$, $[\widetilde{u},\widetilde{v}] \in \operatorname{api}(\widetilde{W})$.

Из (3.1) и (3.3) получаем, что

$$\widetilde{v}\,v^{-1} = \widetilde{\psi}^{-1}\,\widehat{S}_{22}\,(I - S_{21}\,\widehat{S}_{12})^{-1} \in N_{+}^{q\times q}.$$

Последнее включение получается на основании информации о м. ф. класса $N_{+}^{q\times q}$, изложенной в п. 2.5. Так как, к тому же, $\widetilde{v}\,v^{-1}$ имеет унитарные граничные значения почти всюду на ∂D, то $\widetilde{v}\,v^{-1} \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}$. Аналогично, из (3.2) и (3.3) получается, что $u^{-1}\,\widetilde{u} \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}$.

Лемма 3.2. *Пусть $W \in \mathcal{P}(p,q)$ и $\widetilde{W} = W\,V$, где V — j_{pq}-унитарная матрица. Тогда $\operatorname{api}(W) = \operatorname{api}(\widetilde{W})$. В частности, если $[u,v] \in \operatorname{api}(W)$, $[\widetilde{u},\widetilde{v}] \in \operatorname{api}(\widetilde{W})$ и $u(z_0) > 0$, $\widetilde{u}(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$, $\widetilde{v}(z_0) > 0$, то $u = \widetilde{u}$, $v = \widetilde{v}$.*

Доказательство. Для рассматриваемых W и $\widetilde{W}$ $(= W\,V)$ имеем $W \prec \widetilde{W}$ и $\widetilde{W} \prec W$. По лемме 3.1 получаем, что

$$[u,v] \prec [\widetilde{u},\widetilde{v}], \qquad [\widetilde{u},\widetilde{v}] \prec [u,v].$$

Следовательно,

$$\widehat{u} := u^{-1}\widetilde{u} \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}, \qquad \widehat{u}^{-1} \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p},$$
$$\widehat{v} := \widetilde{v}v^{-1} \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}, \qquad \widehat{v}^{-1} \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}.$$

Получаем, что $\widetilde{u} = u\,\widehat{u}$, $\widetilde{v} = \widehat{v}\,v$, где $\widehat{u}$ и $\widehat{v}$ — постоянные унитарные матрицы, т.е. $\operatorname{api}(\widetilde{W}) = \operatorname{api}(W)$. Если к тому же $u(z_0) > 0$, $\widetilde{u}(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$, $\widetilde{v}(z_0) > 0$, то $u = \widetilde{u}$, $v = \widetilde{v}$, так как при этом $\widehat{u} = I_p$ и $\widehat{v} = I_q$.

3.3. Лемма 3.3. *Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, $\widetilde{W} = [\widetilde{W}_{ik}]_1^2 \in \mathcal{P}(p,q)$, $S = [S_{ik}]_1^2 = \mathrm{PG}(W)$, $\widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2 = \mathrm{PG}(\widetilde{W})$. Пусть $W \prec \widetilde{W}$ и $S_{21}(z_0) = 0$.*

Тогда

а) $|\det S_{11}(z_0)| \geq |\det \widetilde{S}_{11}(z_0)|$, $|\det S_{22}(z_0)| \geq |\det \widetilde{S}_{22}(z_0)|$;

b) *если* $[\varphi,\psi] \in \mathrm{apo}(W)$, $[\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}] \in \mathrm{apo}(\widetilde{W})$, *то* $|\det\varphi(z_0)| \geq |\det\widetilde{\varphi}(z_0)|$, $|\det\psi(z_0)| \geq |\det\widetilde{\psi}(z_0)|$.

Доказательство. При выполнении условий леммы для $S = [S_{ik}]_1^2$, $\widetilde{S} = [\widetilde{S}_{ik}]_1^2$ и $\widehat{S} = [\widehat{S}_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widehat{W})$, где $\widehat{W} = [\widehat{W}_{ik}]_1^2 = W^{-1}\widetilde{W}$, будем иметь соотношения (3.1) и (3.2). Учитывая, что $S_{21}(z_0) = 0$, получим

$$\det\widetilde{S}_{22}(z_0) = \det\widehat{S}_{22}(z_0)\cdot\det S_{22}(z_0),$$
$$\det\widetilde{S}_{11}(z_0) = \det S_{11}(z_0)\cdot\det\widehat{S}_{11}(z_0).$$

Так как $\widehat{S}_{11} \in S^{p\times p}$, $\widehat{S}_{22} \in S^{q\times q}$, то $|\det\widehat{S}_{11}(z_0)| \leq 1$, $|\det\widehat{S}_{22}(z_0)| \leq 1$. Получаем справедливость утверждения a) леммы.

Точно так же из соотношений (3.1) и (3.2), учитывая включения $(I-\widehat{S}_{12}\,S_{21}) \in N_{\mathrm{out}}^{p\times p}$ и $(I - S_{21}\,\widehat{S}_{12}) \in N_{\mathrm{out}}^{q\times q}$, получим, что для

$$[\varphi,\psi] \in \mathrm{apo}(W), \qquad [\widetilde{\varphi},\widetilde{\psi}] \in \mathrm{apo}(\widetilde{W}), \qquad [\widehat{\varphi},\widehat{\psi}] \in \mathrm{apo}(\widehat{W})$$

выполняются соотношения

$$\det\widetilde{\varphi} = \gamma_1\,(\det\varphi)(\det\widehat{\varphi})/\det(I-\widehat{S}_{12}\,S_{21}),$$
$$\det\widetilde{\psi} = \gamma_2\,(\det\widehat{\psi})(\det\psi)/\det(I-S_{21}\,\widehat{S}_{12}),$$

где $\gamma_k = \mathrm{const}$, $|\gamma_k| = 1$, $k = 1,2$.

Поэтому, если $S_{21}(z_0) = 0$, то выполняется утверждение b) леммы.

3.4. Пусть W_n — последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, имеющая предел

$$W(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z),$$

являющийся мероморфной в D м. ф. Тогда W в точках голоморфности в D принимает j_{pq}-сжимающие значения и для $S_n = (\mathrm{PG})(W_n) = [S_{ik}^{[n]}]_1^2$ и $S = [\mathrm{PG}](W) = [S_{ik}]_1^2$ имеем

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z), \quad z \in D.$$

Условие $\det W(z) \not\equiv 0$ будет выполнено тогда и только тогда, когда $\det S_{11}(z) \not\equiv 0$.

Получаем, что, если для последовательности м. ф. W_n из $\mathcal{P}(p,q)$ существует в D предел W из $\mathcal{P}(p,q)$, то существует в D точка z_0 такая, в которой $\det S_{11}(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\det S_{11}^{[n]}(z_0) \neq 0$, $\det S_{22}(z_0) = \lim\limits_{n\to\infty}\det S_{22}^{[n]}(z_0) \neq 0$. Это точка голоморфности W и W^{-1} в D.

Если к тому же W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, то $W_n \prec W$ $(n \geq 1)$ и для $[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n)$ и $[u,v] \in \operatorname{api}(W)$ по лемме 3.1 будем иметь

$$[u_n, v_n] \prec [u_{n+1}, v_{n+1}] \qquad [u_n, v_n] \prec [u, v].$$

Обозначим через $\mathcal{P}_W$ и N_W множество полюсов м. ф. W и W^{-1} в D соответственно. Имеем

$$N_{W_n} \subset N_{W_{n+1}} \subset N_W, \qquad \mathcal{P}_{W_n} \subset \mathcal{P}_{W_{n+1}} \subset \mathcal{P}_W.$$

Справедливо на самом деле следующее более сильное утверждение.

Лемма 3.4. *Если W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, имеющая в D предел W из $\mathcal{P}(p,q)$, то*

$$\mathcal{P}_W = \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}_{W_n}, \qquad N_W = \bigcup_{n \geq 1} N_{W_n}.$$

Доказательство. Пусть $W_n \in \mathcal{P}(p,q)$, $W_n \prec W_{n+1}$, W — предел последовательности W_n, $W \in \mathcal{P}(p,q)$;

$$\begin{aligned} S_n = (\mathrm{PG})(W_n) = [S_{ik}^{[n]}]_1^2; &\qquad S = (\mathrm{PG})(W) = [S_{ik}]_1^2, \\ [u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n), &\qquad [u,v] \in \operatorname{api}(W). \end{aligned}$$

Пусть $z_0 \in \mathcal{P}_W$. Тогда $\det S_{22}(z_0) = 0$ и существует проколотая окрестность точки z_0, в которой $\det S_{22}(z) \neq 0$. В этой проколотой окрестности будем иметь и $\det S_{22}^{[n]}(z) \neq 0$ $(n \geq 1)$, так как $v\, v_n^{-1} \in S_{\text{in}}^{q\times q}$. Учитывая, что последовательность $\det S_{22}^{[n]}(z)$ равномерно ограничена в рассматриваемой окрестности, получим, что она в этой окрестности равномерно стремится к $\det S_{22}(z)$. Поэтому, если $\det S_{22}^{[n]}(z_0) \neq 0$, при всех n, то $\det S_{22}^{[n]}(z) \neq 0$ в рассматриваемой окрестности, и потому в ней и $\det S_{22}(z) \neq 0$, что противоречит условию $z_0 \in \mathcal{P}_W$. Следовательно, $\det S_{22}^{[n]}(z_0) = 0$ при некотором n, т.е. $z_0 \in \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathcal{P}_{W_n}$. Аналогично, рассматривая $S_{11}^{[n]}$ и S_{11}, получим, что $N_W \subset \bigcup\limits_{n\geq 1} N_{W_n}$.

3.5. В действительности справедливо более сильное утверждение, чем доказанная лемма 3.4.

Предварительно докажем две леммы о монотонной последовательности внутренних м. ф.

Лемма 3.5. *Пусть* $b_n \in S_{\text{in}}^{k\times k}$, $b_n^{-1}b_{n+1} \in S_{\text{in}}^{k\times k}$ *при* $n \geq 1$ *и* $b(z) = \lim\limits_{n\to\infty} b_n(z)$ $(z \in D)$, $\det b(z) \not\equiv 0$. *Тогда* $b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$.

Доказательство. Можно считать, что $\det b(0) \neq 0$. Тогда для рассматриваемых b_n и b $(\in S^{k\times k})$ имеем

$$\begin{aligned}
0 &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} [b_n(\zeta) - b(\zeta)]^*[b_n(\zeta) - b(\zeta)]\,|d\zeta| \\
&= I - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} b_n^{-1}(\zeta)b(\zeta)\,|d\zeta| \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} (b_n^{-1}(\zeta)b(\zeta))^*\,|d\zeta| + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} b^*(\zeta)b(\zeta)\,|d\zeta| \\
&= I - b_n^{-1}(0)b(0) - (b_n^{-1}(0)b(0))^* + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} b^*(\zeta)b(\zeta)\,|d\zeta|.
\end{aligned}$$

Переходя к пределу, получим, что

$$0 \leq -I + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} b^*(\zeta)\,b(\zeta)\,|d\zeta| = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} (I - b^*(\zeta)\,b(\zeta))\,|d\zeta|.$$

Откуда заключаем, что $b^*(\zeta)\,b(\zeta) = I$ п.в., $|\zeta| = 1$. Следовательно, $b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$.

Лемма 3.6. *Пусть* $b_n \in S_{\text{in}}^{k\times k}$, $b_n^{-1}b_{n+1} \in S_{\text{in}}^{k\times k}$, $b_n(z_0) > 0$ $(n \geq 1)$ *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \det b_n(z_0) > 0$ *в некоторой точке* $z_0 \in D$. *Тогда в* D *существует предел*

$$b = \lim_{n\to\infty} b_n$$

и $b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$.

Доказательство. Пусть последовательность b_n удовлетворяет условиям леммы. Тогда существует подпоследовательность b_{n_i} $(i \geq 1)$, имеющая в D предел b, причем $\det b(z_0)$ $(= \lim\limits_{n\to\infty} \det b_n(z_0)) > 0$. По лемме 3.5 имеем $b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$. Так как $b_m^{-1}b_{n_i} \in S_{\text{in}}^{k\times k}$ при $n_i > m$, то $\mathcal{E}_m := b_m^{-1}b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$, $b = b_m\mathcal{E}_m$.

Пусть $b_{n_i'}$ — другая подпоследовательность последовательности b_n, имеющая предел $\widetilde{b}$. Тогда получим, что $\widetilde{b} = b_m\,\widetilde{\mathcal{E}}_m$, $\widetilde{\mathcal{E}}_m \in S_{\text{in}}^{k\times k}$. Имеем

$$b = b_{n_i'}\mathcal{E}_{n_i}, \quad \widetilde{b} = b_{n_i}\widetilde{\mathcal{E}}_{n_i}.$$

Переходя к пределу, получаем

$$\begin{aligned} b &= \widetilde{b}\,\mathcal{E}, \quad \text{где } \mathcal{E} \in S_{\text{in}}^{k\times k},\\ \widetilde{b} &= b\,\widetilde{\mathcal{E}}, \quad \text{где } \widetilde{\mathcal{E}} \in S_{\text{in}}^{k\times k}. \end{aligned}$$

Так как $\widetilde{b}^{-1}\,b\ (=\mathcal{E}) \in S_{\text{in}}^{k\times k}$ и $(\widetilde{b}^{-1}\,b)^{-1}\ (=\widetilde{\mathcal{E}}) \in S_{\text{in}}^{k\times k}$, то $\mathcal{E} = \text{const}$, $\mathcal{E}^*\,\mathcal{E} = I_k$. Учитывая, что $b(z_0) > 0$ и $\widetilde{b}(z_0) > 0$, заключаем, что $\mathcal{E} = I_k$ и $\widetilde{b} = b$. Это доказывает существование предела b для последовательности b_n. По лемме 3.5 получаем, что $b \in S_{\text{in}}^{k\times k}$.

Лемма 3.7. *Пусть* $W_n \in \mathcal{P}(p,q)$ $(n \geq 1)$ *и*

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n \in \mathcal{P}(p,q), \quad W_n \prec W \ (n \geq 1).$$

Пусть

$$\begin{aligned} &[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n), && [u, v] \in \operatorname{api}(W),\\ &[\varphi_n, \psi_n] \in \operatorname{apo}(W_n), && [\varphi, \psi] \in \operatorname{apo}(W). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Тогда

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to\infty} |\det u_n(z)| = |\det u(z)|, && \lim_{n\to\infty} |\det v_n(z)| = |\det v(z)|,\\ &\lim_{n\to\infty} |\det \varphi_n(z)| = |\det \varphi(z)|, && \lim_{n\to\infty} |\det \psi_n(z)| = |\det \psi(z)|. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Доказательство. Для рассматриваемых в лемме м. ф. W_n и W пусть $\widehat{W}_n = W_n^{-1}\,W$ $(\in \mathcal{P}(p,q))$, и пусть $[u_n, v_n]$, $[u, v]$, $[\varphi_n, \psi_n]$, $[\varphi, \psi]$ определены в (3.4)

$$S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W), \qquad S_n = [S_{ik}^{[n]}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W_n), \qquad \widehat{S}_n = [\widehat{S}_{ik}^{[n]}]_1^2 = (\mathrm{PG})(\widehat{W}_n).$$

Тогда будем иметь (см. (3.1), (3.2))

$$S_{22} = \widehat{S}_{22}^{[n]}(I - S_{21}^{[n]}\widehat{S}_{12}^{[n]})^{-1}S_{22}^{[n]}, \qquad S_{11} = S_{11}^{[n]}(I - \widehat{S}_{12}^{[n]}S_{21}^{[n]})^{-1}\widehat{S}_{11}^{[n]}.$$

Так как $(I - S_{21}^{[n]}\,\widehat{S}_{12}^{[n]}) \in N_{\text{out}}^{q\times q}$ и $(I - \widehat{S}_{12}^{[n]}\,S_{21}^{[n]}) \in N_{\text{out}}^{p\times p}$, то

$$\begin{aligned} \det v(z) &= \alpha_n\ \det \widehat{v}_n(z)\cdot \det v_n(z),\\ \det u(z) &= \beta_n\ \det u_n(z)\cdot \det \widehat{u}_n(z),\\ \det \psi(z) &= \gamma_n\ \det \widehat{\psi}_n(z)\cdot \det \psi_n(z)/\det(I - S_{21}^{[n]}\,\widehat{S}_{12}^{[n]}),\\ \det \varphi(z) &= \delta_n\ \det \varphi_n(z)\cdot \det \widehat{\varphi}_n(z)/\det(I - \widehat{S}_{12}^{[n]}\,S_{21}^{[n]}), \end{aligned}$$

где α_n, β_n, γ_n, δ_n — последовательности чисел по модулю равных единице, $[\widehat{u}_n, \widehat{v}_n] \in \operatorname{api}(\widehat{W}_n)$, $[\widehat{\varphi}_n, \widehat{\psi}_n] \in \operatorname{apo}(\widehat{W}_n)$.

Так как $\lim_{n\to\infty} \widehat{W}_n(z) = I_m$, то $\lim_{n\to\infty} \widehat{S}_n(z) = I_m$, так что

$$\lim_{n\to\infty} \widehat{S}^{[n]}_{12}(z) = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \widehat{S}^{[n]}_{11}(z) = I_p, \qquad \lim_{n\to\infty} \widehat{S}^{[n]}_{22}(z) = I_q.$$

Поскольку

$$1 \geq |\det \widehat{v}_n(z)| \geq |\det \widehat{S}^{[n]}_{22}(z)|, \qquad 1 \geq |\det \widehat{\psi}_n(z)| \geq |\det \widehat{S}^{[n]}_{22}(z)|,$$
$$1 \geq |\det \widehat{u}_n(z)| \geq |\det \widehat{S}^{[n]}_{11}(z)|, \qquad 1 \geq |\det \widehat{\varphi}_n(z)| \geq |\det \widehat{S}^{[n]}_{11}(z)|,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} |\det \widehat{v}_n(z)| = \lim_{n\to\infty} |\det \widehat{\varphi}_n(z)| = \lim_{n\to\infty} |\det \widehat{u}_n(z)| = \lim_{n\to\infty} |\det \widehat{\psi}_n(z)| = 1,$$

и мы приходим к соотношениям (3.5) для м. ф., рассматриваемых в ассоциированных парах в (3.4).

Лемма 3.8. *Пусть W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, имеющая предел W из $\mathcal{P}(p,q)$. Пусть $[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n)$ и $[u,v] \in \operatorname{api}(W)$, причем рассматриваемые здесь ассоциированные пары внутренних м. ф. нормированы условием*

$$u_n(z_0) > 0, \qquad v_n(z_0) > 0, \qquad u(z_0) > 0, \qquad v(z_0) > 0.$$

Тогда всюду в D

$$u(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z), \qquad v(z) = \lim_{n\to\infty} v_n(z).$$

Доказательство. Так как для рассматриваемых в лемме м. ф. W_n и W из $\mathcal{P}(p,q)$ имеем $W_n \prec W$, то по лемме 3.1 имеем $[u_n, v_n] \prec [u,v]$, $n \geq 1$. Отсюда и из условий леммы следует, что при $n \geq 1$:

$$\det u_n(z_0) \geq \det u(z_0) > 0, \qquad \det v_n(z_0) \geq \det v(z_0) > 0,$$

так что

$$\lim_{n\to\infty} \det u_n(z_0) > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \det v_n(z_0) > 0.$$

По лемме 3.1 имеем также

$$[u_n, v_n] \prec [u_{n+1}, v_{n+1}], \quad n \geq 0.$$

Применяя к последовательностям u_n и $v_n^*(\overline{z})$ лемму 3.6, получим, что существуют в D пределы

$$\widetilde{u}(z) = \lim_{n\to\infty} u_n(z), \qquad \widetilde{v}(z) = \lim_{n\to\infty} v_n(z),$$

причем $\widetilde{u} \in S_{\text{in}}^{p\times p}$, $\widetilde{v} \in S_{\text{in}}^{q\times q}$; $\widetilde{u}(z_0) > 0$, $\widetilde{v}(z_0) > 0$.

Убедимся в том, что $\widetilde{u} = u$, $\widetilde{v} = v$. Имеем

$$u_n^{-1}u \in S_{\text{in}}^{p\times p}, \qquad vv_n^{-1} \in S_{\text{in}}^{q\times q},$$

и потому

$$\begin{aligned} &\widehat{u} := \widetilde{u}^{-1}u \in S_{\text{in}}^{p\times p}, && \widehat{v} := v\widetilde{v}^{-1} \in S_{\text{in}}^{q\times q}, \\ &u = \widetilde{u}\widehat{u}, && v = \widehat{v}\widetilde{v}. \end{aligned}$$

Нужно показать, что $\widehat{u} = I_p$, $\widehat{v} = I_q$.

Это так. Действительно, по лемме 3.7 имеем

$$|\det u(z_0)| = |\det \widetilde{u}(z_0)|, \qquad |\det v(z_0)| = |\det \widetilde{v}(z_0)|,$$

так, что $|\det \widehat{u}(z_0)| = |\det \widehat{v}(z_0)| = 1$. Но $\det \widehat{u}(z_0) > 0$, $\det \widehat{v}(z_0) > 0$, так что получаем, что $\det \widehat{u}(z_0) = \det \widehat{v}(z_0) = 1$. Учитывая, что $0 < \widehat{u}(z_0) \le I_p$, $0 < \widehat{v}(z_0) \le I_q$, заключаем, что $\widehat{u}(z_0) = I_p$, $\widehat{v}(z_0) = I_q$. Следовательно, $\widehat{u}(z) \equiv I_p$, $\widehat{v}(z) \equiv I_q$.

Лемма 3.9. *Пусть монотонная последовательность м. ф. W_n из $\mathcal{P}(p,q)$ имеет предел W из $\mathcal{P}(p,q)$, и пусть $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$, $S_n = [S_{ik}^{[n]}]_1^2 = (PG)(W_n)$,*

$$\begin{aligned} &S_{11}^{[n]} = u_n\varphi_n, && S_{22}^{[n]} = \psi_n v_n; \\ &S_{11} = u\varphi, && S_{22} = \psi v; \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &[u,v] \in \operatorname{api}(W), && [u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n), \\ &[\varphi,\psi] \in \operatorname{apo}(W), && [\varphi_n, \psi_n] \in \operatorname{apo}(W_n), \end{aligned}$$

причем в факторизациях (3.6) имеем нормировку $u(z_0) > 0$, $v(z_0) > 0$, $u_n(z_0) > 0$, $v_n(z_0) > 0$ в некоторой точке $z_0 \in H_W^+ \cap H_{W^{-1}}^+$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z), \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n(z) = \psi(z).$$

Доказательство. По предыдущей лемме имеем в D

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(z) = v(z).$$

Так как имеем в D также

$$\lim_{n\to\infty} S_{11}^{[n]}(z) = S_{11}(z), \qquad \lim_{n\to\infty} S_{22}^{[n]}(z) = S_{22}(z),$$

то справедливо утверждение леммы.

3.6. Лемма 3.10. *Пусть W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, имеющая предел W из $\mathcal{P}(p,q)$. Пусть z_0 — точка голоморфности м. ф. W и W^{-1} в D.*

Рассмотрим j_{pq}-унитарные матрицы V_n такие, что $\widetilde{W}_n = W_n V_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ ($\widetilde{W}_n = W_n V_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ соответственно), существование и единственность которых гарантированы в лемме 2.1 (соответственно в лемме 2.3).

Тогда последовательность V_n имеет предел V, являющийся j_{pq}-унитарной матрицей, и $\widetilde{W}_n$ имеет предел $\widetilde{W} := WV \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ (соответственно $\widetilde{W} \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$).

Доказательство. Согласно формулам (2.16), (2.17), в лемме 2.1 имеем

$$V_n = H(\mathcal{E}_n)\begin{bmatrix} V_1^{(n)} & 0 \\ 0 & V_2^{(n)} \end{bmatrix}, \qquad \mathcal{E}_n = (S_{21}^{[n]}(z_0))^*, \tag{3.7}$$

где $S_{21}^{[n]}(z)$ — блок м. ф. $S = [S_{ik}^{[n]}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W_n)$, $V_1^{(n)}$ и $V_2^{(n)}$ — унитарные матрицы, определяемые из полярных представлений матриц

$$S_{11}^{[n]}(z_0)(I - \mathcal{E}_n\mathcal{E}_n^*)^{-1/2} = \{S_{11}^{[n]}(z_0)(I - \mathcal{E}_n\mathcal{E}_n^*)^{-1}(S_{11}^{[n]}(z_0))^*\}^{1/2}(V_1^{(n)})^*,$$
$$(I - \mathcal{E}_n^*\mathcal{E}_n)^{-1/2}S_{22}^{[n]}(z_0) = V_2^{(n)}\{(S_{22}^{[n]}(z_0))^*(I - \mathcal{E}_n^*\mathcal{E}_n)^{-1}S_{22}^{[n]}(z_0)\}^{1/2}.$$

Так как $W_n(z_0) \to W(z_0)$, то $\mathcal{E}_n \to \mathcal{E} := (S_{21}(z_0))^*$, $H(\mathcal{E}_n) \to H(\mathcal{E})$, $V_1^{(n)} \to V_1$, $V_2^{(n)} \to V_2$, где V_1 и V_2 — унитарные матрицы, определяемые полярными представлениями:

$$(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2}S_{22}(z_0) = V_2\left\{S_{22}^*(z_0)(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1}S_{22}(z_0)\right\}^{1/2},$$
$$S_{11}(z_0)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2} = \left\{S_{11}(z_0)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1}S_{11}^*(z_0)\right\}^{1/2}V_1^*.$$

Следовательно,

$$V_n \to V = H(\mathcal{E})\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}, \qquad WV \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q).$$

Аналогично доказывается утверждение леммы о последовательности j_{pq}-унитарных матриц V_n таких, что $\widetilde{W} := WV_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$, существование и единственность которых установлена в лемме 2.3. В этом случае пользуемся снова формулой (3.5), но теперь уже $V_1^{(n)}$ и $V_2^{(n)}$ — унитарные матрицы, определяемые полярными представлениями матриц

$$\varphi_n(z_0)(I - \mathcal{E}_n\mathcal{E}_n^*)^{-1/2} = \left\{\varphi_n(z_0)(I - \mathcal{E}_n\mathcal{E}_n^*)^{-1}\varphi_n^*(z_0)\right\}^{1/2}(V_1^{(n)})^*,$$
$$(I - \mathcal{E}_n^*\mathcal{E}_n)^{-1/2}\psi_n(z_0) = V_2^{(n)}\left\{\psi_n^*(z_0)(I - \mathcal{E}_n^*\mathcal{E}_n)^{-1}\psi_n(z_0)\right\}^{1/2},$$

где $[\varphi_n, \psi_n] \in \mathrm{apo}(W_n)$, причем

$$S_{11}^{[n]} = u_n\varphi_n, \qquad S_{22}^{[n]} = \psi_n v_n,$$

$$[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n), \quad u_n(z_0) > 0, \ v_n(z_0) > 0.$$

Пользуясь леммами 3.8 и 3.9, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(z_0) = \varphi(z_0), \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n(z_0) = \psi(z_0),$$
$$\lim_{n\to\infty} u_n(z_0) = u(z_0) > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(z_0) = v(z_0) > 0,$$

где $[u, v] \in \operatorname{api}(W)$, $[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n)$.

Следовательно, $V_1^{(n)} \to V_1$ и $V_2^{(n)} \to V_2$, где V_1 и V_2 — унитарные матрицы, определяемые полярным представлением матриц

$$\varphi(z_0)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1/2} = \left\{\varphi(z_0)(I - \mathcal{E}\mathcal{E}^*)^{-1}\varphi^*(z_0)\right\}^{1/2} V_1^*,$$
$$(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1/2}\psi(z_0) = V_2 \left\{\psi^*(z_0)(I - \mathcal{E}^*\mathcal{E})^{-1}\psi(z_0)\right\}^{1/2}.$$

В итоге получаем, что $V_n \to V = H(\mathcal{E}) \begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_2 \end{bmatrix}$, $\widetilde{W}_n := W_n V_n \to WV \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$.

3.7. Итак, при рассмотрении сходящейся к м. ф. W из $\mathcal{P}(p,q)$ монотонной последовательности м. ф. W_n из $\mathcal{P}(p,q)$ можно считать, что м. ф. W_n и W нормированы в точке z_0 голоморфности м. ф. W_n и W_n^{-1} $(n \geq 1)$, например, условием $W_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$, или $W_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$. При каждой из этих нормировок имеем

$$\{|\det S_{11}^{[n]}(z_0)|\}_1^\infty, \qquad \{|\det S_{22}^{[n]}(z_0)|\}_1^\infty,$$
$$\{|\det u_n(z_0)|\}_1^\infty, \qquad \{|\det v_n(z_0)|\}_1^\infty,$$
$$\{|\det \varphi_n(z_0)|\}_1^\infty, \qquad \{|\det \psi_n(z_0)|\}_1^\infty$$

— невозрастающие последовательности, причем

$$\lim_{n\to\infty} \det S_{11}^{[n]}(z_0) = \det S_{11}(z_0) \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \det S_{22}^{[n]}(z_0) = \det S_{22}(z_0) \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |\det u_n(z_0)| = |\det u(z_0)| \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\det v_n(z_0)| = |\det v(z_0)| \neq 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} |\det \varphi_n(z_0)| = |\det \varphi(z_0)| \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\det \psi_n(z_0)| = |\det \psi(z_0)| \neq 0,$$

где $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$, $S_n = [S_{ik}^{[n]}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W_n)$,

$$S_{11}^{[n]} = u_n\varphi_n, \qquad S_{22}^{[n]} = \psi_n v_n,$$
$$S_{11} = u\varphi, \qquad S_{22} = \psi v,$$

$$u_n \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}, \quad u \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}, \quad \varphi_n \in S_{\mathrm{out}}^{p\times p}, \quad \varphi \in S_{\mathrm{out}}^{p\times p},$$
$$v_n \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}, \quad v \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}, \quad \psi_n \in S_{\mathrm{out}}^{q\times q}, \quad \psi \in S_{\mathrm{out}}^{q\times q}.$$

Более того, в рассматриваемых здесь внутренне-внешних факторизациях внутренние множители могут быть выбраны нормированными условием положительности их значений в точке z_0 и тогда в D

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \qquad \lim_{n\to\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z),$$
$$\lim_{n\to\infty} v_n(z) = v(z), \qquad \lim_{n\to\infty} \psi_n(z) = \psi(z).$$

Теорема 1. *Пусть W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ (или из $\mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$) при всех $n \geq 1$ такая, что*

$$\lim_{n\to\infty} |\det S^{[n]}_{22}(z_0)| \neq 0, \qquad \lim_{n\to\infty} |\det S^{[n]}_{11}(z_0)| \neq 0, \tag{3.8}$$

т.е. последовательности матриц $W_n(z_0)$ и $W_n^{-1}(z_0)$ ограничены. Тогда W_n — сходящаяся последовательность м. ф. и для $z \in \bigcap_{n\geq 1} H^+_{W_n}$

$$W(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z) \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q) \quad (W \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q) \text{ соответственно}).$$

Доказательство. Пусть $S_n = [S^{[n]}_{ik}]^2_1 = (\mathrm{PG})(W_n)$, и для W_n выполнены условия теоремы. Так как $S_n \in S^{m\times m}$, то существует подпоследовательность S_{n_k}, имеющая в D предел $S = \lim_{k\to\infty} S_{n_k} \in S^{m\times m}$, $S = [S_{ik}]^2_1$. В силу условия теоремы

$$\det S_{11}(z_0) = \lim_{k\to\infty} \det S^{[n_k]}_{11}(z_0) \neq 0,$$
$$\det S_{22}(z_0) = \lim_{k\to\infty} \det S^{[n_k]}_{22}(z_0) \neq 0.$$

Поэтому существует м. ф. $W \in \mathcal{P}(p,q)$ такая, что $S = (\mathrm{PG})(W)$. При $z \in \bigcap_{n\geq 1} H^+_{W_n}$ имеем $W(z) = \lim_{k\to\infty} W_{n_k}(z) \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$, если $W_n(z) \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ при $n \geq 1$ ($W \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$, если $W_n(z) \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ при $n \geq 1$). Получаем, что последовательность W_n компактна в $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ (соответственно в $\mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$). Пусть теперь для другой последовательности $W_{n'_k}$ имеем

$$\widetilde{W} = \lim_{k\to\infty} W_{n'_k}.$$

При $n_k > n$ имеем $W_n \prec W_{n_k}$, и потому $W_n \prec W$. Следовательно, $W_{n'_k} \prec W$, и потому $\widetilde{W} \prec W$. Точно также получаем, что $W \prec \widetilde{W}$. Поэтому $\widetilde{W} = W V$, где V — постоянная j_{pq}-унитарная матрица. Учитывая, что W и $\widetilde{W}$ — нормированные м. ф. ($W, \widetilde{W} \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ или $W, \widetilde{W} \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$), получаем, что $V = I_m$, т.е. $W = \widetilde{W}$. Следовательно, $W = \lim_{n\to\infty} W_n$.

3.8. Теорема 2. *Пусть W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$, имеющая предел W из $\mathcal{P}(p,q)$. Тогда*

$$T_W\,[S^{p\times q}] = \bigcap_{n\geq 1} T_{W_n}[S^{p\times q}].$$

Доказательство. Так как $W_n \prec W$, то $T_{W_n}[S^{p\times q}] \supset T_W[S^{p\times q}]$, и потому

$$T_W\,[S^{p\times q}] \subset \bigcap_{n\geq 1} T_{W_n}[S^{p\times q}].$$

Пусть теперь $S \in \bigcap\limits_{n\geq 1} T_{W_n}[S^{p\times q}]$, т.е. $S = T_{W_n}[\mathcal{E}_n]$, $\mathcal{E}_n \in S^{p\times q}$, $n \geq 1$.

Тогда существует подпоследовательность $\mathcal{E}_{n_k}$, стремящаяся в D к некоторой м. ф. $\mathcal{E} \in S^{p\times q}$. Так как $S = T_{W_{n_k}}[\mathcal{E}_{n_k}]$, то, переходя к пределу при $k \to \infty$, получаем, что $S = T_W[\mathcal{E}]$, т.е. $S \in T_W[S^{p\times q}]$.

Пусть теперь W_n — монотонная последовательность м. ф. из $\mathcal{P}(p,q)$ и $z_0 \in H_{W_n} \cap H_{W_n^{-1}}$ при $n \geq 1$. Рассмотрим матричный шар

$$B(z_0,\{W_n\}) := \bigcap_{n\geq 1} B(z_0, W_n).$$

Можно считать, что $W_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$. При этом если $S_n = [S^{[n]}_{ik}]_1^2 = \mathrm{PG}(W_n)$, то $S^{[n]}_{11}(z_0)$ (> 0), $S^{[n]}_{22}(z_0)$ (> 0) — левый и правый полурадиусы матричных шаров $B(z_0, W_n)$, причем последовательности $\{\det S^{[n]}_{11}(z_0)\}_1^\infty$ и $\{\det S^{[n]}_{22}\}_1^\infty$ являются невозрастающими.

Если последовательность W_n сходится к м. ф. W из $\mathcal{P}(p,q)$, то по теореме 1 будем иметь, что

$$\lim_{n\to\infty} \det S^{[n]}_{11}(z_0) = \det S_{11}(z_0) > 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \det S^{[n]}_{22}(z_0) = \det S_{22}(z_0) > 0.$$

При этом $S_{11}(z_0)$ и $S_{22}(z_0)$ — левый и правый полурадиусы матричного шара $B(z_0, W)$.

Убедимся в том, что

$$B(z_0,\{W_n\}) = B(z_0, W).$$

Так как $T_{W_n}(S^{p\times q}) \supset T_W(S^{p\times q})$, то $B(z_0, W_n) \supset B(z_0, W)$, и потому $B(z_0,\{W_n\}) \supset B(z_0, W)$. Пусть $w \in B(z_0,\{W_n\})$. Тогда $w = S_n(z_0)$, где $S_n \in T_{W_n}(S^{p\times q})$. Поэтому $S_n = T_{W_n}(\mathcal{E}_n)$, $\mathcal{E}_n \in S^{p\times q}$. Существует подпоследовательность $\mathcal{E}_{n_k}$, имеющая некоторый предел $\mathcal{E} \in S^{p\times q}$. Получаем, что S_{n_k} имеет в D предел $S := T_W[\mathcal{E}]$, и $w = S(z_0)$. Следовательно, $w \in B(z_0, W)$.

Итак, если монотонная последовательность м. ф. W_n из $\mathcal{P}(p,q)$ сходится на $\bigcap\limits_{n\geq 0} H^+_{W_n}$ к некоторой м. ф. W из $\mathcal{P}(p,q)$ и $z_0 \in H^+_{W_n} \cap H^+_{W_n^{-1}}$ при всех $n \geq 1$, то

$$\bigcap_{n\geq 1} B(z_0, W_n) = B(z_0, W),$$

и это матричный шар с невырожденными левым и правым полурадиусами.

Обратно, пусть для монотонной последовательности м. ф. W_n из $\mathcal{P}(p,q)$ для некоторой точки $z_0 \in \bigcap\limits_{n\geq 1}(H_{W_n} \cap H_{W_n^{-1}})$ предельный шар $B(z_0, \{W_n\})$ имеет невырожденные левый и правый полурадиусы. Тогда для соответствующей последовательности нормированных м. ф. $\widetilde{W}_n = W_n V_n$ из $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ при всех $n \geq 1$ (из $\mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ при всех $n \geq 1$) по теореме 1 существует предел $\widetilde{W}$ из $\mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ (из $\mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ соответственно). В силу уже доказанного получаем, что

$$B(z_0, \{W_n\}) = B(z_0, \{\widetilde{W}_n\}) = B(z_0, \widetilde{W}).$$

Итак, в случае, когда для монотонной последовательности м. ф. W_n, „предельный шар“ $B(z_0, \{W_n\})$ имеет невырожденные левый и правый полурадиусы, справедливы тождества

$$\bigcap_{n\geq 1} T_{W_n}[S^{p\times q}] = T_{\widetilde{W}}[S^{p\times q}], \qquad B(z, \{W_n\}) = B(z, \widetilde{W}),$$

где

$$\widetilde{W}(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z) V_n \in \mathcal{P}(p,q),$$

V_n — постоянные j_{pq}-унитарные матрицы, которые могут быть выбраны либо так, что $\widetilde{W}_n := W_n V_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$, и тогда $\widetilde{W} \in \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$, либо так, что $\widetilde{W}_n \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$, и тогда $\widetilde{W} \in \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$.

§4. Монотонные последовательности J-внутренних матриц-функций

4.1. Через $U(J)$ обозначим класс J-внутренних м. ф., т.е. таких м. ф. $A(z)$ класса $\mathcal{P}(p,q)$, у которых граничные значения $A(\zeta)$ являются J-унитарными п.в. на ∂D,

$$A^*(\zeta)\, J\, A(\zeta) = J \quad \text{п.в.}, \ |\zeta| = 1. \tag{4.1}$$

При $J = j_{pq}$ класс $U(J)$ будем обозначать через $U(p,q)$. Для м. ф. $A(z)$ класса $U(J)$ существует псевдопродолжение $A_-(z)$ во внешность $D_e = \{z : 1 < |z| \leq \infty\}$ круга D — мероморфная в D_e м. ф. с ограниченной неванлинновской характеристикой в D_e $(A_-(1/z) \in N^{m\times m})$ такая, что

$$\lim_{r\uparrow 1} A(r\,\zeta) = \lim_{r\downarrow 1} A_-(r\,\zeta) \quad \text{п.в.}, \ |\zeta| = 1.$$

В силу (4.1) псевдопродолжение $A_-(z)$ может быть определено для м. ф. $A(z)$ из $U(J)$ по принципу симметрии:

$$A_-(z) = J\,[A^{\sim}(z)]^{-1}\,J, \quad z \in D_e, \tag{4.2}$$

где использовано обозначение $q^{\sim}(z) = g^*(1/\bar{z})$. Учитывая псевдопродолжение g_- м. ф. g из D во внешность D_e круга D и граничные значения g на ∂D, можно считать, что м. ф. g определена во всей комплексной плоскости, за исключением множества $\mathcal{P}_g^+$ полюсов м. ф. g в D, множества $\mathcal{P}_g^-$ полюсов м. ф. g_- в D_e и некоторого множества E_g на ∂D нулевой лебеговой меры, поэтому мы не будем использовать обозначение g_-, а будем использовать исходную букву g. Пусть H_g^+, H_g^- и H_g^0 — множества голоморфности м. ф. g соответственно в D, D_e и на ∂D, так что $H_g^+ = D\backslash\mathcal{P}_g^+$, $H_g^- = D_e\backslash\mathcal{P}_g^-$, $H_g^0 \subset (\partial D\backslash E_g)$; $H_g = H_g^+ \cup H_g^- \cup H_g^0$ — множество точек голоморфности g во всей комплексной плоскости.

4.2. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$ и $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$. Тогда наряду с формулой (2.2), учитывая формулу (2.6) и формулу вида (4.2) для псевдопродолжения м. ф. W, получим

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (W_{11}^{\sim})^{-1} & (W_{11}^{\sim})^{-1}\,W_{21}^{\sim} \\ W_{12}^{\sim}\,(W_{11}^{\sim})^{-1} & W_{22}^{\sim} - W_{12}^{\sim}\,(W_{11}^{\sim})^{-1}\,W_{21}^{\sim} \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

где $W_{ij}^{\sim} = (W_{ij})^{\sim}$. Точно так же выражается $W = [W_{ik}]_1^2$ через $S^{\sim} = [S_{ki}^{\sim}]_1^2$.

4.3. Для определенности в соответствующих местах будем предполагать, что $p \geq q$, чтобы иметь возможность рассматривать класс $S_{\mathrm{in}}^{p\times q}$. В противном случае вместо него следует рассматривать класс $S_{\mathrm{in}}^{p\times q}$.

Непосредственно проверяется, что, если $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$, то имеем не только свойство

$$T_W\,[S^{p\times q}] \subset S^{p\times q}, \tag{4.4}$$

но также свойство

$$T_W\,[S_{\mathrm{in}}^{p\times q}] \subset S_{\mathrm{in}}^{p\times q}. \tag{4.5}$$

Эти два свойства являются характеристическими для м. ф. класса $U(p,q)$. Точнее, справедлива следующая теорема Л. А. Симаковой [10, 11]: *если мероморфная в D м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2$ обладает свойствами* (4.4), (4.5) *и* $\det W(z) \not\equiv 0$, *то существует скалярная функция $\rho(z)$ такая, что* $\rho W \in U(p,q)$.

Заметим, что из общей теоремы о граничных значениях предела последовательности м. ф. класса $\mathcal{P}(p,q)$ [16] следует, что, если $W_n \in U(J)$ и существует предел в точках z из $\bigcap\limits_{n\geq 1} H_{W_n}^+$

$$W(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z), \quad W_n \prec W, \ \det W(z) \not\equiv 0,$$

то $W \in U(J)$.

4.4. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$, $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$. Тогда имеем

$$S_{11} = (W_{11}^{\sim})^{-1}, \qquad S_{22} = W_{22}^{-1},$$

и внутренне–внешние факторизации

$$S_{11} = u\varphi, \qquad S_{22} = \psi v,$$

где $(u,v) \in \mathrm{api}(W)$, $(\varphi,\psi) \in \mathrm{apo}(W)$ эквивалентны факторизациям

$$W_{11} = u\,p_-, \qquad W_{22} = v^{-1}\,p_+\,, \tag{4.6}$$

где $p_- = (\varphi^{\sim})^{-1}$, $p_+ = \psi^{-1}$,

$$u \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}, \qquad p_-^{\sim} \in N_{\mathrm{out}}^{p\times p}; \qquad v \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}, \qquad p_+ \in N_{\mathrm{out}}^{q\times q}.$$

Так как для м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$ имеем

$$W_{11}^{\sim}\,W_{11} - W_{21}^{\sim}\,W_{21} = I_p, \qquad -W_{21}\,W_{21}^{\sim} + W_{22}\,W_{22}^{\sim} = I_q,$$

то

$$\det W_{11}^{\sim}(z)\cdot\det W_{11}(z) = \det W_{22}(z)\cdot\det W_{22}^{\sim}(z),$$

и потому

$$\det p_-^{\sim}(z)\cdot\det p_-(z) = \det p_+(z)\cdot\det p_+^{\sim}(z).$$

Учитывая, что $p_-^{\sim} \in N_{\mathrm{out}}^{p\times p}$ и $p_+ \in N_{\mathrm{out}}^{q\times q}$, получаем, что

$$\det p_-^{\sim}(z) = \gamma\cdot\det p_+(z),$$

где $\gamma = \mathrm{const}$, $|\gamma| = 1$. Если к тому же p_- и p_+ удовлетворяют условиям нормировки $p_-^{\sim}(z_0) > 0$, $p_+(z_0) > 0$, то

$$\det p_-^{\sim}(z) = \det p_+(z).$$

Получаем, что для рассматриваемой м. ф. из $U(p,q)$:

$$\det W(z) = \det S_{11}(z)\cdot\det W_{22}(z) = \frac{\det u(z)\cdot\det p_+(z)}{\det v(z)\cdot\det p_-^{\sim}(z)} = \overline{\gamma}\;\frac{\det u(z)}{\det v(z)},$$

а при нормировке $p_-^{\sim}(z_0) > 0$, $p_+(z_0) > 0$

$$\det W(z) = \frac{\det u(z)}{\det v(z)}.$$

4.5. Обозначим

$$U^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q) = \mathcal{P}^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q) \cap U(p,q), \qquad U^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q) = \mathcal{P}^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q) \cap U(p,q).$$

Для м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2$ из $U(p,q)$ включение $W \in U^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ означает, что $z_0 \in H^+_W \cap H^+_{W^{-1}}$ и

$$W_{21}(z_0) = 0, \qquad W_{11}(z_0)(= (W^{\sim}_{11}(z_0))^{-1}) > 0, \qquad W_{22}(z_0) > 0, \tag{4.7}$$

а включение $W \in U^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$ означает, что $z_0 \in H^+_W \cap H^+_{W^{-1}}$,

$$W_{21}(z_0) = 0; \qquad u(z_0) > 0, \qquad p^{\sim}_-(z_0) > 0, \qquad v(z_0) > 0, \qquad p_+(z_0) > 0, \tag{4.8}$$

где u, p_-, v, p_+ — м. ф., рассматриваемые в факторизациях (4.6).

С учетом изложенного в п. 4.2, теорема 1 дополняется следующей.

Теорема 3. *Пусть $W_n = [W^{[n]}_{ik}]_1^2$ — монотонная последовательность м. ф. из $U^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ (из $U^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$) такая, что последовательности матриц $\{W_n(z_0)\}_1^\infty$ и $\{W_n^{-1}(z_0)\}_1^\infty$ ограничены, т.е. ограничены числовые последовательности $\{\det W^{[n]}_{22}(z_0)\}_1^\infty$ и $\{\det (W^{[n]}_{11})^{\sim}(z_0)\}_1^\infty$. Тогда:*

a) *Множества*

$$\mathcal{P}^+_{\{W_n\}} := \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}^+_{W_n} \quad \text{и} \quad \mathcal{P}^-_{\{W_n\}} := \bigcup_{n\geq 1} \mathcal{P}^-_{W_n}$$

не имеют предельных точек в D и D_e соответственно, так что множества

$$H^+_{\{W_n\}} := \bigcap_{n\geq 1} H^+_{W_n} \quad \text{и} \quad H^-_{\{W_n\}} := \bigcap_{n\geq 1} H^-_{W_n}$$

являются открытыми всюду плотными в D и D_e соответственно.

b) *на множестве $H^+_{\{W_n\}} \cup H^-_{\{W_n\}}$ существует предел*

$$W(z) = \lim_{n\to\infty} W_n(z),$$

причем $W \in U^{\mathrm{I}}_{z_0}(p,q)$ ($W \in U^{\mathrm{II}}_{z_0}(p,q)$, соответственно) и

$$H^+_W = H^+_{\{W_n\}}, \qquad H^-_W = H^-_{\{W_n\}}.$$

c) *последовательность* $W_n(z)$ *равномерно стремится к* $W(z)$ *на каждом компакте, содержащемся в* $H_W^+ \cup H_W^-$.

Доказательство. Осталось обосновать лишь утверждение c) теоремы. Рассмотрим $S_n = [S_{ik}^{[n]}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W_n)$, $S = [S_{ik}]_1^2 = (\mathrm{PG})(W)$. М. ф. W_n, W, S и S_n определены на $H_W^+ \cup H_W^-$. Пусть K — компакт, содержащийся в $H_W^+ \cup H_W^-$. Последовательность м. ф. S_n равномерно стремится к S на компакте $K_+ := K \cap D = K \cap H_W^+$. В частности, последовательность м. ф. $S_{22}^{[n]}$ равномерно стремится к S_{22} на K_+. Так как при этом $\det S_{22}(z) \neq 0$ на K_+, то $[S_{22}^{[n]}]^{-1}$ равномерно стремится к S_{22}^{-1} на K_+. Учитывая формулу (2.3), получаем, что W_n равномерно стремится к W на K_+. Точно так же, учитывая, что W_n и W продолжаются в D_e по принципу симметрии, получаем, что последовательность W_n равномерно стремится к W на $K_- := K \cap D_e$. При этом следует воспользоваться тем, что последовательность $(S_{11}^{[n]})^{\sim}(z)$ равномерно стремится к $S_{11}^{\sim}(z)$ на K_-.

4.6. М. ф. U класса $U(J)$ называется *сингулярной J-внутренней*, если $U \in N_{\mathrm{out}}^{m\times m}$, т.е., если U и U^{-1} являются м. ф. класса Смирнова $N_+^{m\times m}$. Для $W = [W_{ik}]_1^2$ класса $U(p,q)$ это условие равносильно условию $W_{22} \in N_+^{q\times q}$, $W_{11}^{\sim} \in N_+^{p\times p}$, т.е. условию: в факторизациях (4.6) множители u и v являются постоянными и можно положить, что $u(z) \equiv I_p$, $v(z) \equiv I_q$. Класс сингулярных J-внутренних м. ф. обозначим через $U_s(J)$, а при $J = j_{pq}$ обозначим его через $U_s(p,q)$.

М. ф. U класса $U(J)$ называется *регулярной J-внутренней*, если для нее не существует непостоянной м. ф. $U_1 \in U_s(J)$ такой, что $UU_1^{-1} \in U(J)$. Класс таких м. ф. U обозначается через $U_r(J)$, а при $J = j_{pq}$ обозначим его через $U_r(p,q)$.

Произвольная м. ф. U класса $U(J)$ в существенном однозначно представима в виде $U = U_r U_s$, где $U_r \in U_r(J)$, $U_s \in U_s(J)$ [17].

Класс $U_r(p,q)$ важен, в частности, тем, что его составляют так называемые резольвентные матрицы вполне неопределенных обобщенных задач Шура–Неванлинны–Пика, формулируемых следующим образом.

Задача $\mathrm{SNP}(p,q)$. Пусть $S_0 \in S^{p\times q}$, $u \in S_{\mathrm{in}}^{p\times p}$, $v \in S_{\mathrm{in}}^{q\times q}$ — данные м. ф. Найти все м. ф. S такие, что

$$u^{-1}(S - S_0)v^{-1} \in H_\infty^{p\times q}, \qquad S \in S^{p\times q}. \tag{4.9}$$

Через $S(u,v;S_0)$ обозначим множество решений S этой задачи. Пусть z_0 — фиксированная точка в D такая, что

$$\det u(z_0) \neq 0, \qquad \det v(z_0) \neq 0. \tag{4.10}$$

Задача (4.9) называется *вполне неопределенной* (сокращенно — *в.н.*), если для любого вектора $\xi \in C^q$ ($\xi \neq 0$) существует решение $S \in S(u,v;S_0)$ такое, что

$$S(z_0)\xi \neq S_0(z_0)\xi.$$

Это свойство не зависит от выбора точки z_0, удовлетворяющей условию (4.10). Более того, множество

$$B(z_0;\{u,v,S_0\}) := \{S(z_0) : S \in S(u,v;S_0)\}$$

есть матричный шар, и задача (4.9) является в.н., если левый и правый полурадиусы этого шара являются невырожденными (известно [17], что если левый или правый полурадиус этого шара невырожден, то и второй полурадиус является невырожденным).

Двусторонняя связь между в.н. задачами вида (4.9) и м. ф. $W = [W_{ik}]_1^2$ класса $U_r(p,q)$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4 [17]. *Пусть* $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$, *и* u *и* v — *внутренние м. ф., рассматриваемые в факторизациях* (4.6), *т.е.* $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$ *и* $S_0 = T_W[0_{p\times q}]$ $(= W_{12}W_{22}^{-1})$. *Тогда задача* (4.9) *с этими м. ф.* u, v *и* S_0 *является в.н. и*

$$T_W[S^{p\times q}] \subset S(u,v;S_0). \tag{4.11}$$

Равенство

$$T_W[S^{p\times q}] = S(u,v;S_0) \tag{4.12}$$

имеет место тогда и только тогда, когда $W \in U_r(p,q)$.

Для произвольной в.н. задачи (4.9) *существует м. ф.* $W \in U(p,q)$ *такая, что имеет место равенство* (4.12) *и* $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$, *где* u *и* v — *м. ф., рассматриваемые в задаче* (4.9). *Такая м. ф.* W *определяется по в.н. задаче* (4.9) *с точностью до постоянного правого* j_{pq}*-унитарного множителя и может быть выбрана нормированной условием* $W \in U_{z_0}^{\mathrm{I}}(p,q)$ (*или* $W \in U_{z_0}^{\mathrm{II}}(p,q)$), *где* z_0 — *точка, удовлетворяющая условию* (4.10), *нормированная м. ф.* $\overset{\circ}{\mathrm{W}}$ *определяется по задаче* (4.9) *уже однозначно. Все м. ф.* W *класса* $\mathcal{P}(p,q)$ *такие, что имеет место равенство* (4.12) *принадлежат классу* $U(p,q)$ *и описываются формулой*

$$W = \rho(z)\,\overset{\circ}{\mathrm{W}}(z)\,V, \tag{4.13}$$

где V — *постоянные* j_{pq}*-унитарные матрицы,* $\rho(z) = \beta_2(z)/\beta_1(z)$, β_1 *и* β_2 — *скалярные внутренние функции такие, что* $\beta_1^{-1}u \in I_p$, $\beta_2^{-1}v \in I_q$.

М. ф. W $(\in U(p,q))$, дающие описание множества решений в. н. задачи (4.9) по формуле (4.11), называются *резольвентными матрицами* задачи (4.9).

В силу теоремы 4 понятен интерес к монотонным последовательностям регулярных j_{pq}-внутренних м. ф.

О связи понятия регулярной J-внутренней функции со спектральной теорией несамосопряженных операторов см. [18].

4.7. Теорема 5. *Пусть* $W_n \in U_r(p,q)$, $W_n \prec W_{n+1}$ *и*

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n \in U(p,q).$$

Тогда $W \in U_r(p,q)$.

Доказательство. Можно считать, что $W_n \in U^{\text{II}}_{z_0}(p,q)$. Тогда по лемме 3.8 для $[u_n, v_n] \in \text{api}(W_n)$ и $[u,v] \in \text{api}(W)$ с рассматриваемой нормировкой будем иметь в D

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(z) = v(z).$$

По теореме 2 имеем

$$T_W[S^{p\times q}] = \bigcap_{n\geq 1} T_{W_n}[S^{p\times q}].$$

Убедимся в том, что

$$T_W[S^{p\times q}] = S(u,v;S_0),$$

где $S_0 = T_W[0_{p\times q}]$. Имеем включение (4.11).

Пусть $S \in S(u,v;S_0)$. Так как $[u_n,v_n] \prec [u,v]$, то $S \in S(u_n,v_n;S_0)$. Так как $W_n \prec W$, то $T_W[S^{p\times q}] \subset T_{W_n}[S^{p\times q}]$ и потому $S_0 \in T_{W_n}[S^{p\times q}]$. Так как $W_n \in U_r(p,q)$, то по теореме 4 получаем, что $S \in T_{W_n}[S^{p\times q}]$, т.е. существуют м. ф. $\mathcal{E}_n \in S^{p\times q}$ такая, что $S = T_{W_n}[\mathcal{E}_n]$. Рассмотрим подпоследовательность $\mathcal{E}_{n_k}$, сходящуюся в D к некоторой м. ф. $\mathcal{E} \in S^{p\times q}$. Так как $S = T_{W_{n_k}}(\mathcal{E}_{n_k})$, то, переходя к пределу при $k\to\infty$, получаем, что $S = T_W[\mathcal{E}]$, т.е. $S \in T_W[S^{p\times q}]$. Таким образом доказано равенство (4.12). По теореме 4 получаем, что $W \in U_r(p,q)$.

4.8. Пусть $W = [W_{ik}]_1^2 \in U(p,q)$ и $[u,v] \in \text{api}(W)$.

Тогда

$$H_W^+ = H_{W_{22}}^+ = H_{v^{-1}}^+, \qquad H_W^- = H_{W_{11}}^- = H_u^-.$$

Учитывая, что $H_u^+ = D$ и $H_{v^{-1}}^- = D_e$, имеем

$$H_W^+ = H_{v^{-1}}^+ \cap H_u^+, \qquad H_W^- = H_{v^{-1}}^- \cap H_u^-.$$

Что же касается множества H_W^0 точек голоморфности W на ∂D, то для него в общем случае имеем лишь включение

$$H_W^0 \subset H_{v^{-1}}^0 \cap H_u^0$$

и только для м. ф. W из $U_r(p,q)$ гарантировано равенство $H_W^0 = H_{v^{-1}}^0 \cap H_u^0$, так что справедливо следующее утверждение.

Теорема 6 [17]. *Если* $W \in U_r(p,q)$ *и* $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$, *то*

$$H_W = H_{v^{-1}} \cap H_u.$$

Лемма 4.1. *Пусть* $b \in S_{\mathrm{in}}^{k\times k}$. *Тогда* $H_b = H_{\det b}$, $H_{b^{-1}} = H_{(\det b)^{-1}}$.

Доказательство. Очевидно, $H_b^+ = H_{\det b}^+ = D$. В D_e полюсами м. ф. b являются нули $\det b^{\sim}(z)$ и только они, так как $b(z) = [b^{\sim}(z)]^{-1}$. Таково же множество полюсов $\det b(z)$ в D_e, так что $H_b^- = H_{\det b}^-$. Очевидно, что $H_b^0 \subset H_{\det b}^0$. Пусть теперь $z_0 \in H_{\det b}^0$. Тогда $\det b$ голоморфна на некоторой дуге Γ окружности ∂D, содержащей точку z_0, принимает там унимодулярные значения и $\det |b(r\zeta)| > m$ при $\zeta \in \Gamma$, $1-\delta < r < 1+\delta$ для некоторых $m > 0$ и $\delta > 0$.

Имеем

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_\Gamma \|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| = 0,$$

$$\begin{aligned}
0 &\le \overline{\lim_{r\downarrow 1}} \int_\Gamma \|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| = \overline{\lim_{r\downarrow 1}} \int_\Gamma \|[b^*(r^{-1}\zeta)]^{-1} - b(\zeta)\|\,|d\zeta| \\
&\le \overline{\lim_{r\uparrow 1}} \int_\Gamma \|[b^*(r\zeta)]^{-1}\|\|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| \\
&\le m^{-1} \lim_{r\uparrow 1} \int_\Gamma \|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| = 0.
\end{aligned}$$

Так как

$$\lim_{r\uparrow 1} \int_\Gamma \|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| = \lim_{r\downarrow 1} \int_\Gamma \|b(r\zeta) - b(\zeta)\|\,|d\zeta| = 0,$$

то м. ф. $b(z) := [b^{\sim}(z)]^{-1}$ в D_e является аналитическим продолжением м. ф. $b(z)$ из D через дугу Γ [15]. Следовательно, $z_0 \in H_b^0$.

Остается заметить, что $b^{-1}(z) = b^{\sim}(z)$ и $\det b^{-1}(z) = \det b^{\sim}(z)$.

Теорема 7. *Если* $W \in U_r(p,q)$, $W_1 \in U_r(p,q)$ *и* $W \prec W_1$, *то* $H_{W_1} \subset H_W$.

Доказательство. Пусть $[u,v] \in \mathrm{api}(W)$, $[u_1,v_1] \in \mathrm{api}(W_1)$, где W и W_1 удовлетворяют условиям теоремы. Так как $W \prec W_1$, то по лемме 3.1 имеем $[u,v] \prec [u_1,v_1]$. Поэтому

$$\det u_1 / \det u \in S_{\mathrm{in}}, \qquad \det v_1 / \det v \in S_{\mathrm{in}}.$$

Это дает включения

$$H_{\det u_1} \subset H_{\det u}, \qquad H_{\det v_1^{-1}} \subset H_{\det v^{-1}}.$$

Пользуясь леммой 4.1, получаем, что

$$H_{u_1} \subset H_u, \qquad H_{v_1^{-1}} \subset H_{v^{-1}}.$$

Эти включения вместе с теоремой 6 завершают доказательство.

Теорема 8. *Пусть W_n — монотонная последовательность м. ф. из $U_r(p,q)$, и пусть существует в точках голоморфности всех м. ф. W_n в D предел*

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n \ (\in U_r(p,q)).$$

Тогда множество H_W точек голоморфности м. ф. W в комплексной плоскости совпадает с внутренностью пересечения $\bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}$:

$$H_W = \operatorname{int} \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}.$$

Доказательство. По теореме 3 имеем

$$H_W^+ = \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}^+, \qquad H_W^- = \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}^-.$$

Из предыдущей теоремы следует, что

$$H_W^0 \subset \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}^0.$$

Остается убедиться в том, что, если все м. ф. W_n голоморфны в некоторой окрестности $O(z_0)$ точки $z_0 \in \partial D$, то м. ф. W голоморфна в точке z_0. Рассмотрим последовательность $[u_n, v_n] \in \operatorname{api}(W_n)$ и $[u,v] \in \operatorname{api}(W)$. Можно считать, что ассоциированные пары нормированны в некоторой точке $z_1 \in \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n}^+$ условием $u_n(z_1) > 0$, $v_n(z_1) > 0$, $u(z_1) > 0$, $v(z_1) > 0$. Тогда по лемме 3.8 имеем в D

$$\lim_{n\to\infty} u_n(z) = u(z), \qquad \lim_{n\to\infty} v_n(z) = v(z).$$

Кроме того,

$$O(z_0) \subset H_{W_n} = H_{v_n^{-1}} \cap H_{u_n} = H_{\det v_n^{-1}} \cap H_{\det u_n},$$
$$O(z_0) \cap D \subset H^+_{\det v_n^{-1}} \cap H^+_{\det u_n}.$$

Так как $O(z_0) \cap D = H^+_{\det v_n^{-1}}$ и $O(z_0) \cap D \subset H^+_{\det v^{-1}}$, в $O(z_0) \cap D$ отсутствуют нули внутренних функций $\det v_n(z)$ и $\det v(z)$. Для сингулярных неубывающих функций $\sigma_n(\mu)$ и $\sigma(\mu)$ $(-\pi \leq \mu \leq \pi)$, рассматриваемых в формуле Рисса-Херглотца для $\det v_n(z)$ и $\det v(z)$ имеем $\sigma_n(\mu) \leq \sigma_{n+1}(\mu) \leq \sigma(\mu)$, так как $\det v_{n+1}/\det v_n \in S_{\text{in}}$ и $\det v/\det v_n \in S_{\text{in}}$. Более того, так как $\lim_{n\to\infty} \det v_n = \det v$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(\mu) = \sigma(\mu).$$

Так как для μ таких, что $e^{i\mu} \in O(z_0)$ функции $\sigma_n(\mu)$ принимает постоянные значения, то и $\sigma(\mu)$ для этих μ принимают постоянное значение. Это значит, что на $O(z_0) \cap \partial D$ функция $\det v(z)$ голоморфна и, следовательно, там голоморфна функция $(\det v(z))^{-1}$. Аналогично убеждаемся в том, что $O(z_0) \cap \partial D \subset H_{\det u}$.

Итак, $O(z_0) \subset H_{\det v^{-1}} \cap H_{\det u}$.

С другой стороны, по теореме 6 имеем $H_W = H_{\det v^{-1}} \cap H_{\det u}$. Получили, что $O(z_0) \subset H_W$.

В качестве гипотезы сформулируем следующее утверждение: *Пусть* $W_n \in U_r(p,q)$, $W_n \prec W_{n+1}$ *и*

$$W = \lim_{n\to\infty} W_n (\in U_r(p,q)).$$

Тогда последовательность $W_n(z)$ *равномерно сходится к* $W(z)$ *на любом компакте* K, *содержащемся в* H_W $(= \operatorname{int} \bigcap_{n\geq 1} H_{W_n})$.

Осталось доказать, что если $O(z_0) \subset H_W$, где $z_0 \in \partial D$, то последовательность м. ф. W_n равномерно сходится в компакте K, содержащемся в $O(z_0)$.

Список литературы

[1] Потапов В. П., *Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций*, Тр. Моск. мат. о-ва **4** (1955), 125–236.

[2] Gohberg I., Sakhnovich L. A. (eds.), *Matrix and operator valued functions, The Vladimir Petrovich Potapov memorial volume*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 72, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[3] Dym H., Katsnelson V. E., Fritzsche B., Kirstein B. (eds.), *Topics in interpolation theory*, Oper. Theory Adv. Appl. (to appear).

[4] Лившиц М. С., *Операторы, колебания, волны. Открытые системы*, Наука, М., 1966.

[5] Бродский М. С., *Треугольные и жордановы представления линейных операторов*, Наука, М., 1969.

[6] Крейн М. Г., *Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта* (m, m), Укр. мат. ж. **1** (1949), № 2, 1–66.

[7] Крейн М. Г., Саакян Ш. Н., *О некоторых новых результатах в теории резольвент эрмитовых операторов*, Докл. АН СССР **169** (1966), № 6, 1269–1272.

[8] Ковалишина И. В., Потапов В. П., *Радиусы круга Вейля в матричной проблеме Неванлинны–Пика*, Теория операторов в функциональных пространствах и ее приложения, Наук. думка, Киев, 1981, сс. 25–49.

[9] Орлов С. А., *Гнездящиеся матричные круги, аналитически зависящие от параметра, и теоремы об инвариантности рангов радиусов предельных матричных кругов*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **40** (1976), № 3, 593–644.

[10] Симакова Л. А., *О плюс-матрицах-функциях ограниченной характеристики*, Мат. исслед. (Кишинев) **9** (1974), вып. 2(32), 149–171.

[11] Симакова Л. А., *О мероморфных плюс-матрицах-функциях*, Мат. исслед. (Кишинев) **10** (1975), вып. 1(35), 287–292.

[12] Аров Д. З., *Реализация матриц-функций по Дарлингтону*, Изв. АН СССР. Сер. мат. **37** (1973), № 6, 1299–1331.

[13] Dym H., *J-contractive matrix functions, reproducing kernel Hilbert spaces and interpolation*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., vol. 71, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[14] Гинзбург Ю. П., *О делителях и минорантах оператор-функций ограниченного вида*, Мат. исслед. (Кишинев) **2** (1968), вып. 4(6), 47–72.

[15] Секефальви-Надь Б., Фояш Ч., *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве*, Мир, М., 1970.

[16] Аров Д. З., *О граничных значениях сходящейся последовательности мероморфных матриц-функций*, Мат. заметки **25** (1979), № 3, 335–339.

[17] Аров Д. З., *γ-производящие матрицы, j-внутренние матрицы-функции и связанные с ними задачи экстраполяции.* 1–4, Теория функций, функц. анал. и их прил. (Харьков) Вып. 51 (1989), 61–67 (1); Вып. 52 (1989), 103–109 (2); Вып. 53 (1990), 57–65 (3); Мат. физ., анал., геом. **2** (1995), № 1, 3–14 (4).

[18] Веселов В. Ф., Набоко С. Н., *Определитель характеристической функции и сингулярный спектр несамосопряженного оператора*, Мат. сб. **129** (1986), № 1, 20–39.

Поступило 12 июня 1997 г.

Южно-Украинский
педагогический университет
Физико-математический факультет
Кафедра математического анализа
270020, Одесса, Старопортофранковская, 26
Украина
E-mail: v-rector@tm.odessa.ua pedagog@kids.vista.odessa.ua