

УДК 519.55

А. Н. Шерстнев

**О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МЕР, ЗАДАННЫХ НА ОРТОПРОЕКТОРАХ  
ПРОСТРАНСТВА ГИЛЬБЕРТА, БИЛИНЕЙНЫМИ ФОРМАМИ**

В 1957 году Глизон [1] охарактеризовал все конечные и, в частности, вероятностные меры, заданные на классе всех ортопроекторов сепарабельного пространства Гильберта. Он показал, что каждая конечная мера описывается некоторым неотрицательным ядерным оператором.

В данной статье описаны все (необязательно конечные) меры, заданные на идеалах структуры ортопроекторов в бесконечномерном сепарабельном пространстве Гильберта. Оказывается, такие меры могут быть охарактеризованы положительными билинейными формами. Новые задачи, которые здесь обсуждены — это задача продолжения мер и задача интегрирования линейных операторов относительно мер, названных нами регулярными.

**§ 1. Представление мер билинейными формами;**

Ниже приняты следующие сокращения и обозначения:  $\mathfrak{H}$  — бесконечномерное сепарабельное комплексное пространство Гильберта;  $x, y, \dots$  — элементы  $\mathfrak{H}$ ; оператор  $A$  — это линейный оператор в  $\mathfrak{H}$  с областью определения  $D(A)$ , плотной в  $\mathfrak{H}$ ;  $\Delta(A)$  — область значений оператора  $A$ ;  $I$  — тождественный оператор;  $A \in \mathfrak{B}$  означает, что  $A$  — ограниченный замкнутый оператор;  $A \in \mathfrak{S}_1$  означает, что  $A$  — ядерный оператор;  $A \geq 0$  означает, что  $A$  — симметрический неотрицательный оператор;  $L(\mathfrak{H})$  — множество всех ортопроекторов в  $\mathfrak{H}$ , упорядоченное естественным образом:  $P \geq Q$  означает  $\Delta(P) \supset \Delta(Q)$ .  $L(\mathfrak{H})$  является структурой, т. е. для каждой пары  $P, Q \in L(\mathfrak{H})$  существуют  $\sup\{P, Q\}$  и  $\inf\{P, Q\}$ , обозначаемые соответственно символами  $P \vee Q$  и  $P \wedge Q$ ; равенство  $Q = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots$  означает по определению, что  $P_i P_j = 0$  ( $i \neq j$ ) и  $Q = \sup P_j$ ; если  $x \in \mathfrak{H}$ , то через  $P_x$  обозначается ортопроектор на подпространство, порожденное вектором  $x$ ; через  $P\mathfrak{H}$  мы будем обозначать  $\Delta(P)$ ,  $P \in L(\mathfrak{H})$ .

Под положительной билинейной формой (п. б. ф.) мы подразумеваем функцию  $a$ , сопоставляющую каждой паре элементов  $x, y$  из некоторого плотного в  $\mathfrak{H}$  идеала  $D(a)$  (называемого областью определения формы  $a$ ) комплексное число  $a(x, y)$ , причем для всех  $x, y, z \in D(a)$  и скаляров  $\lambda_1, \lambda_2$  имеют место свойства:  $a(x, y) = a(y, x)$ ,  $a(x, x) \geq 0$ ,  $a(\lambda_1 x + \lambda_2 y, z) = \lambda_1 a(x, z) + \lambda_2 a(y, z)$ . Включение  $a \subset b$  означает, что  $D(a) \subset D(b)$  и  $a(x, y) = b(x, y)$  при всех  $x, y \in D(a)$ . П. б. ф.  $a$  определяется оператором, если существует оператор  $A \geq 0$  такой, что  $a(x, y) = (Ax, y)$ ,  $D(A) = D(a)$ . В частности, п. б. ф. определяемая тождественным оператором  $I$  и являющаяся в сущ-

ности скалярным произведением в  $\mathfrak{H}$ , будет обозначаться буквой  $e$ . П. б. ф.  $a$  по определению ядра, если она определяется ядерным оператором.

Пусть  $a$  — п. б. ф. и  $B \geq 0$  — самосопряженный оператор, тогда через  $a \circ B$  обозначается п. б. ф., определяемая соотношением  $a \circ B(x, y) = a(B^{1/2}x, B^{1/2}y)$  при соответствующих предположениях относительно  $D(a)$ .

**Определение 1.** Непустой класс  $M$  ортопроекторов в  $\mathfrak{H}$  назовем *идеалом* в  $L(\mathfrak{H})$ , если: (а)  $M \neq \{0\}$ , (б)  $Q \leq P \in M$  влечет  $Q \in M$ , (в)  $P \oplus Q \in M$ , коль скоро  $P, Q \in M$ , (г) если  $P, Q$  — одномерные проекторы из  $M$ , то  $P \vee Q \in M$ .

С точки зрения теории структур идеалом следовало бы назвать класс  $M$ , удовлетворяющий вместо (в) и (г) требованию:  $P \vee Q \in M$ , коль скоро  $P, Q \in M$ . Однако, последнее более жестко, чем (в) и (г) вместе взятые, и потому рассматриваемый здесь класс идеалов более широк.

**Определение 2.** Отображение  $m: M \rightarrow R$  идеала  $M$  в числовую прямую  $R$  назовем *мерой*, если: (а)  $mP \geq 0$ ,  $P \in M$ , (б) если  $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots$  ( $P, P_j \in M$ ), то  $mP = \sum_j mP_j$ .

Пусть  $m: M \rightarrow R$  — мера; назовем проектор  $P \in L(\mathfrak{H})$  допустимым, если существует счетное семейство  $P_j \in M$  такое, что  $P = \sup_j P_j$ ;

в силу сепарабельности  $\mathfrak{H}$  проектор  $P$  допустим, даже если семейство  $P_j$  несчетно. В частности, допустимым является проектор  $P_M = \sup_{P \in M} P$ .

Таким образом, каждый допустимый проектор порождается счетным семейством проекторов конечной меры. В этом смысле введенную меру можно назвать  $\sigma$ -конечной. Чтобы упростить последующее изложение, будем считать, что

$$P_M = I. \quad (1)$$

Ниже (см. замечание 2) будет показано, что это ограничение несущественно.

**Замечание 1.** В соответствии с (1) и сказанным выше имеет место представление  $I = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots$ ,  $P_j \in M$ .

**Лемма 1.** Пусть  $m: M \rightarrow R$  — мера, тогда *линеал*  $D_m = \{x \in \mathfrak{H}: P_x \in M\}$  плотен в  $\mathfrak{H}$ .

**Доказательство.** Из определения 1(г) следует, что  $D_m$  — линеал, а в силу замечания 1 этот линеал плотен в  $\mathfrak{H}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $m: M \rightarrow R$  — мера. Тогда существует п. б. ф.  $t$  такая, что форма  $t \circ P \in \mathfrak{S}_1$ <sup>1)</sup> всякий раз, когда  $P \in M$ , причем  $mP = \text{sp } t \circ P$ .

**Доказательство.** Пусть  $P \in M$ , тогда ограничение  $m_P$  меры  $m$  на  $L(P\mathfrak{H})$  является конечной мерой, определенной на всех ортопроекторах пространства  $P\mathfrak{H}$ . В силу результата Глизона [1] существует оператор  $0 \leq T_P \in \mathfrak{S}_1$ , причем  $mQ = m_P Q = \text{sp } T_P Q$ ,  $Q \leq P$ . Определим п. б. ф.  $t$  равенством  $t(x, y) = (T_P x, y)$ , где  $P = P_x \vee P_y$ ,  $x, y \in D_m$ . Положим  $F(x) = |x|^2 mP_x$ ,  $x \in D_m$ , тогда из легко проверяемых соотношений  $4 \text{Re } t(x, y) = F(x+y) - F(x-y)$ ,  $2[F(x) + F(y)] = F(x+y) + F(x-y)$ ,  $t(\lambda x, y) = \lambda t(x, y)$  непосредственно устанавливается корректность определения  $t$ . Отметим, что по построению

<sup>1)</sup> Если п. б. ф.  $a$  определяется оператором  $A \in \mathfrak{S}_1$ , то  $a \in \mathfrak{S}_1$  и  $\text{sp } a = \text{sp } A$  по определению.

$D(t) = D_m$ ,  $mP_x = t(x, x)$ , если  $|x| = 1$ ,  $x \in D_m$ .

Пусть  $P$  — произвольный проектор из  $M$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sup_{|x|=|y|=1} |t \circ P(x, y)| &\leq \sup_{|x|=|y|=1} |t \circ P(x, x)|^{1/2} |t \circ P(y, y)|^{1/2} = \\ &= \sup_{|x|=1} |t(Px, Px)| \leq mP < +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, существует оператор  $0 \leq \tilde{T}_P \in \mathfrak{B}$ , обладающий свойством

$$(\tilde{T}_P x, y) = t \circ P(x, y). \quad (2)$$

Пусть  $\{x_k\}_1^\infty$  — ортонормированный базис в  $\mathfrak{H}$ , часть которого (базиса) составляет система  $\{y_j\}$  ортов, образующая ортонормированный базис в  $P\mathfrak{H}$ . Тогда

$$\sum_k (\tilde{T}_P x_k, x_k) = \sum_j t(y_j, y_j) = \sum_j mP_{y_j} = mP < +\infty.$$

Теорема доказана.

Следствие 1. Всякая мера  $m: M \rightarrow R$  непрерывна снизу, т. е.  $mP_n \rightarrow mP$ , коль скоро  $P \geq P_n \rightarrow P$  (в смысле сильной сходимости).

Доказательство. Обозначим через  $|\cdot|_1$  симметричную норму в  $\mathfrak{S}_1$  [2] и пусть  $t$  — п. б. ф., отвечающая по теореме 1 мере  $m$ . Утверждение следует тогда из теоремы 6.3 ([2], с. 119) и из оценки  $|mP_n - mP| = |\text{sp}(\tilde{T}_{P_n} - \tilde{T}_P)| \leq |\tilde{T}_{P_n} - \tilde{T}_P|_1 = |P_n \tilde{T}_P P_n - \tilde{T}_P|_1 \rightarrow 0$ .

Теорема 2. Пусть  $t$  — п. б. ф. и  $M_t = \{P \in L(\mathfrak{H}) : \Delta(P) \subset D(t), t \circ P \in \mathfrak{S}_1\}$ , тогда отображение  $\mu: M_t \rightarrow R$ , заданное соотношением  $\mu P = \text{spt} \circ P$ ,  $P \in M_t$ , является мерой.

Доказательство. Класс  $M_t$  — идеал в  $L(\mathfrak{H})$ . Пусть  $P = P_1 \oplus P_2 \oplus \dots$  ( $P, P_j \in M_t$ ) и  $\{x_k^j\}_{k,j}$  — некоторый ортонормированный базис в  $P_j\mathfrak{H}$ . Тогда система  $\{x_k^j\}_{k,j}$  образует ортонормированный базис в  $P\mathfrak{H}$ . Следовательно,

$$\text{spt} \circ P = \sum_{k,j} t(Px_k^j, Px_k^j) = \sum_{j,k} t(P_j x_k^j, P_j x_k^j) = \sum_j \text{spt} \circ P_j.$$

Теорема доказана.

Ради краткости, меру, заданную условиями теоремы 2, будем называть мерой, определяемой формой. Будем говорить, что мера  $m$  определяется оператором  $T \geq 0$ , если она определяется формой  $t$ , определяемой этим оператором. Интересно, что идеалы, являющиеся областями задания мер, определяемых формами, обладают усиленными структурными свойствами.

Теорема 3. Пусть  $\mu: M_t \rightarrow R$  — мера, определяемая п. б. ф.  $t$ . Тогда  $P \vee Q \in M_t$  всякий раз, когда  $|P \vee Q - P - Q| < 1$ ,  $P, Q \in M_t$ . В частности, если  $P, Q \in M_t$  и  $Q$  конечномерен, то  $P \vee Q \in M_t$ .

Предварительно установим следующую лемму.

Лемма 2. Пусть  $P, Q$  — произвольные ортопроекторы в  $\mathfrak{H}$ , причем  $P \wedge Q = 0$ ,  $P \vee Q = R$ . Тогда следующие утверждения эквивалентны: (а)  $R\mathfrak{H} = \Delta(P + Q)$ , (б)  $|R - P - Q| < 1$ , (в)  $R\mathfrak{H} = P\mathfrak{H} \dot{+} Q\mathfrak{H}$ <sup>1)</sup>.

Доказательство. Пусть  $\hat{A}$  — часть оператора  $P + Q$ , действующая в  $R\mathfrak{H}$ . Так как  $P \wedge Q = 0$ , то оператор  $\hat{A}$  обладает обрат-

<sup>1)</sup> Знаком  $\dot{+}$  обозначается прямая сумма подпространств.

ным  $\hat{A}^{-1}$ . Линеал  $\Delta(\hat{A}) = D(\hat{A}^{-1})$  плотен в  $R\mathfrak{S}$ , и потому  $\hat{A}^{-1}$  само-сопряжен (вместе с  $\hat{A}$ ). Если имеет место (а), то из теоремы Банаха об обратном операторе следует, что  $\hat{A}^{-1}$  ограничен. Оператор  $B = I - (R - P - Q)$  обладает ограниченным обратным:  $B^{-1} = I - R + \hat{A}^{-1}R$ . Следовательно, 1 — регулярная точка оператора  $R - P - Q$ . С другой стороны,  $|R - P - Q| \leq 1$ , т. е. справедливо (б). Если имеет место (б), оператор  $B$  (определенный выше) обладает ограниченным обратным; следовательно,  $\Delta(RB) = R\mathfrak{S}$ . Пусть  $x \in \Delta(RB)$ , тогда найдется  $y \in \mathfrak{S}$ , причем  $x = RBu = Pu + Qu$ . Из произвольности  $x$  следует справедливость (в). Покажем, наконец, что (в) влечет (а). Для этого достаточно установить, что

$$\sup_{x \in D(\hat{A}^{-1}), |x| = 1} |(\hat{A}^{-1}x, x)| < +\infty.$$

Пусть  $S$  — косой проектор на  $P\mathfrak{S}$  параллельно  $Q\mathfrak{S}$ ; в силу (в)  $S \in \mathfrak{B}$ . Пусть далее  $x \in D(\hat{A}^{-1})$  произволен и  $x = \hat{A}y$ , тогда  $|(\hat{A}^{-1}x, x)| = |(y, (P + Q)y) = (y, (P + Q)^2y) - (y, PQy) - (y, QPy) \leq |(P + Q)y|^2 + 2|(Qy, Py)| = |x|^2 + 2|((I - S)x, Sx)| \leq (1 + 2|S||I - S|)|x|$ . Лемма доказана.

Доказательство теоремы 3. Достаточно рассмотреть случай, когда  $P \wedge Q = 0$ ,  $P, Q \in M_t$ . В силу леммы 2  $R\mathfrak{S} \subset D(t)$  и нужно лишь показать, что  $\tilde{T}_R \in \mathfrak{S}_1$  (оператор  $\tilde{T}_R$  определяется соотношением (2)). Если учесть, что  $\tilde{T}_P, \tilde{T}_Q \in \mathfrak{S}_1$ , то нетрудно показать, что  $t \circ (P + Q)^2 \in \mathfrak{S}_1$ , и требуемое является следствием равенства  $\tilde{T}_R = \hat{A}^{-1} \tilde{T} \hat{A}^{-1}$ , где  $\tilde{T}$  — ядерный оператор, определяемый формой  $t \circ (P + Q)^2$ , если учесть, что согласно лемме 2 оператор  $\hat{A}^{-1}$  ограничен. Пусть  $m: M \rightarrow R$  и  $m_1: M_1 \rightarrow R$  — две меры. Мы говорим, что  $m_1$  — продолжение  $m$ , если  $M \subset M_1$ , и  $mP = m_1P$ , коль скоро  $P \in M$ . В силу теоремы 1 каждой мере  $m$  отвечает некоторая п. б. ф.  $t(m)$ , которая по теореме 2 определяет некоторую меру  $\mu$ . Очевидно,  $\mu$  является продолжением  $m$ . Будем называть это продолжение *формальным*.

Замечание 2. Пусть  $m: M \rightarrow R$  — мера, но соотношение (1) не удовлетворяется:  $P_M < I$ . Естественное вложение позволяет рассматривать  $M$  как идеал в  $L(P_M \mathfrak{S})$ , причем в пространстве  $P_M \mathfrak{S}$  условие (1) уже удовлетворяется. Обозначим через  $\hat{m}: M \rightarrow R$  меру, которая индуцируется в  $L(P_M \mathfrak{S})$  мерой  $m$  в результате указанного вложения и пусть  $\hat{\mu}: M_t \rightarrow R$  — формальное продолжение  $\hat{m}$  ( $\hat{t}$  — соответствующая  $\hat{m}$  п. б. ф., действующая в  $P_M \mathfrak{S}$ ). Мера  $\mu: M_t \rightarrow R$ , определяемая п. б. ф.  $t = \hat{t} \circ P_M$ , действующей в  $\mathfrak{S}$ , как нетрудно видеть, является продолжением меры  $m$ , причем  $P_{M_t} = I$ . Далее мы приведем ряд результатов, связанных с вопросами продолжения мер.

**Теорема 4.** *Всякая мера  $m: M \rightarrow R$  обладает максимальным продолжением.*

Доказательство. Пусть  $\mu: M_t \rightarrow R$  — формальное продолжение  $m$ . Если  $\{s_i\}$  — совершенно упорядоченное по включению множество п. б. ф., обладающих свойством  $s_i \supseteq t$ , то п. б. ф.  $s$ , определенная соотношениями  $D(s) = \bigcup D(s_i)$ ,  $s(x, y) = s_i(x, y)$ , если  $x, y \in D(s_i)$ , мажорирует все  $s_i$ . Для завершения доказательства остается использовать лемму Цорна.

Пусть  $M$  — идеал  $L(\mathfrak{S})$ . Через  $M^{(1)}$  обозначим класс всех одномерных проекторов из  $M$ . Мету  $m: M \rightarrow R$  назовем ограниченной, если  $\sup_{P \in M^{(1)}} mP < +\infty$ .

**Теорема 5.** *Всякая ограниченная мера обладает продолжением, определяемым ограниченным самосопряженным оператором.*

Доказательство. Пусть  $\mu: M_t \rightarrow R$  — формальное продолжение ограниченной меры  $m: M \rightarrow R$ . Так как  $M_t^{(1)} = M^{(1)}$ , то  $\mu$  ограничена. Определим на идеале  $D_m$  линейный оператор  $T$  соотношением

$$(Tx, y) = \lim_{y_n \rightarrow y, y_n \in D_m} t(x, y_n), \quad y \in \mathfrak{S}. \quad (3)$$

В силу ограниченности меры  $C = \sup_{|x|=|z|=1, x, z \in D_m} |t(x, z)| \leq \leq \sup_{P \in M^{(1)}} mP < +\infty$ , и потому предел в правой части (3) существует

для всякого  $y \in \mathfrak{S}$  и не зависит от выбора последовательности  $y_n$ , причем этот предел (при фиксированном  $x \in D_m$ ) является линейным функционалом от  $y$ , т. е. определение  $T$  корректно. В частности,  $D(T) = D_m$ ,  $T \geq 0$  и

$$\sup_{|x|=1, x \in D(T)} (Tx, x) = \sup_{|x|=1, x \in D(T)} t(x, x) = \sup_{P \in M^{(1)}} mP < +\infty,$$

т. е.  $T$  ограничен, и его расширение по непрерывности  $\bar{T}$  определено всюду в  $\mathfrak{S}$  и является ограниченным самосопряженным оператором. Мера, определяемая оператором  $\bar{T}$ , и является искомым продолжением  $m$ . Если мера  $m$  определена оператором  $T$ , то, рассмотрев какое-либо неотрицательное самосопряженное расширение  $S$  оператора  $T$ , мы можем продолжить меру  $m$  до меры, определяемой самосопряженным оператором  $S$ .

**Лемма 3.** *Мера, определяемая самосопряженным оператором  $S$ , продолжима до меры, определяемой п. б. ф.  $e \circ S$ .*

Доказательство. Пусть п. б. ф.  $s(x, y) = (Sx, y)$ ,  $x, y \in D(S)$  и  $P \in M_s$ . Из включения  $D(S) \subset D(S^{1/2})$  следует тогда, что  $P \in M_{e \circ S}$ . Далее, если  $\{x_i\}$  — какой-либо ортонормированный базис подпространства  $P\mathfrak{S}$ , то

$$\text{sp}(s \circ P) = \sum (Sx_i, x_i) = \sum (S^{1/2}x_i, S^{1/2}x_i) = \text{sp}[(e \circ S) \circ P].$$

Лемма доказана.

Мету  $m$ , определяемую п. б. ф.  $e \circ S$ , назовем регулярной мерой, ассоциированной с самосопряженным оператором  $S$ .

**Следствие 2.** *Всякая мера, определяемая оператором, допускает регулярное продолжение.*

## § 2. Интегрирование ограниченных операторов

Пусть  $m$  — регулярная мера ассоциированная с самосопряженным оператором  $T \geq 0$ . Конечномерный самосопряженный оператор  $A$  такой, что  $\Delta(A) \subset D(T^{1/2})$ , назовем интегрируемым относительно  $T$ .

Обозначим через  $\hat{\mathfrak{K}}_T$  линейное пространство всех конечномерных самосопряженных интегрируемых операторов. Пусть  $A \in \mathfrak{B}$  и  $B \geq 0$  самосопряжен; через  $A \circ B$  будем обозначать оператор  $B^{1/2} A B^{1/2}$ . Соотношение

$$\mu(A) = \overline{\text{sp } A \circ T} \quad (4)$$

определяет на  $\hat{\mathfrak{K}}_T$  функционал  $\mu(\cdot)$ , обладающий свойствами: (I)  $\mu(\lambda A) = \lambda \mu(A)$ , где  $\lambda$  — скаляр, (II)  $\mu(A+B) = \mu(A) + \mu(B)$ , (III)  $\mu(P) = \overline{mP}$ , если  $P$  — ортопроектор.

В силу спектральной теоремы для конечномерных самосопряженных операторов свойства (I) — (III) определяют функционал  $\mu(\cdot)$  единственным образом, именно соотношением (4).

Мы распространим понятие интегрируемого оператора на класс ограниченных операторов. Сначала рассмотрим случай ограниченного самосопряженного оператора  $T$ . Заметим, что в этом случае  $\hat{\mathfrak{K}}_T$  совпадает с классом  $\hat{\mathfrak{K}}$  всех конечномерных самосопряженных операторов.

**О п р е д е л е н и е 3.** Неотрицательный оператор  $A \in \mathfrak{B}$  назовем *интегрируемым* относительно ограниченного самосопряженного оператора  $T$ , если существует последовательность  $A_n \in \hat{\mathfrak{K}}$  (называемая определяющей) такая, что  $0 \leq A_n \leq A$ , причем: (а)  $A_n \rightarrow A$  слабо, (б) числовая последовательность  $\mu(A_n)$  сходится.

Будем говорить, что самосопряженный оператор  $A \in \mathfrak{B}$  интегрируем, если имеет место представление  $A = B_1 - B_2$ , где  $B_i \geq 0$  и интегрируемы. Наконец, оператор  $A \in \mathfrak{B}$  интегрируем, если интегрируемы его вещественная и мнимая компоненты  $A_R = (A + A^*)/2$ ,  $A_I = (A - A^*)/2i$ . Функционал  $\mu(\cdot)$ , заданный на классе  $\mathfrak{B}_T$  всех ограниченных интегрируемых операторов равенством

$$\mu(A) = \text{sp } A \circ T, \quad (5)$$

назовем *интегралом (относительно  $T$ )*.

**Т е о р е м а 6.** Пусть  $0 \leq T \in \mathfrak{B}$ . Тогда интеграл относительно  $T$  является на линейном пространстве  $\mathfrak{B}_T$  единственным линейным функционалом, удовлетворяющим требованиям (I) — (III).

Для доказательства нам понадобится следующая

**Л е м м а 4 [2].** Если оператор  $A \in \mathfrak{B}$  является слабым пределом последовательности  $B_n \in \mathfrak{S}_1$  и выполнено условие  $\sup_n |B_n|_1 < +\infty$ , то  $B \in \mathfrak{S}_1$ , причем  $|B|_1 \leq \overline{\lim} |B_n|_1$ .

Доказательство теоремы 6. Установим сначала, что  $A \circ T \in \mathfrak{S}_1$  для всякого  $A \in \mathfrak{B}_T$ . В силу определения 3 это достаточно сделать для случая, когда  $A \geq 0$ . Если  $A_n$  — определяющая последовательность для  $A$ ,  $0 \leq A \in \mathfrak{B}_T$ , то  $A_n \circ T \rightarrow A \circ T$  слабо; в силу (б) определения 3  $\sup_n |A_n \circ T|_1 = \sup_n \mu(A_n) < +\infty$ , и требуемое следует из леммы 4.

Пусть теперь  $0 \leq A$ ,  $B \in \mathfrak{B}_T$  и  $A_n, B_n$  — соответствующие определяющие последовательности. Ясно, что последовательность  $A_n + B_n$  является определяющей для  $A + B$ . Таким образом,  $A + B \in \mathfrak{B}_T$ . Отсюда же следует, что  $\mathfrak{B}_T$  — линейное пространство. Нетрудно видеть также, что  $\mu(\cdot)$  удовлетворяет на  $\mathfrak{B}_T$  требованиям (I) — (III).

Отметим, что  $\mathfrak{B}_T \cap L(\mathfrak{H}) = M_e \circ T$ . Осталось установить единственность функционала  $\mu(\cdot)$ . Пусть  $0 \leq A \in \mathfrak{B}_T$  и  $A_n =$  определяющая последовательность. В силу леммы 4  $|A \circ T|_1 \leq \liminf |A_n \circ T|_1 = \lim \mu(A_n)$ . Так как  $0 \leq A_n \leq A$ , то  $\mu(A_n) = |A_n \circ T|_1 \leq |A \circ T|_1$ , т. е.  $\mu(A) = |A \circ T|_1 = \lim \mu(A_n)$ . Из этого соотношения вытекает единственность функционала  $\mu(\cdot)$ , так как  $\mu(\cdot)$  однозначно определен на классе  $\hat{\mathfrak{A}}$  свойствами (I) — (III).

**Теорема 7.** *Чтобы оператор  $A \geq 0$  ( $A \in \mathfrak{B}$ ) был интегрируем относительно оператора  $0 \leq T \in \mathfrak{B}$ , необходимо и достаточно, чтобы  $A \circ T \in \mathfrak{B}_1$ .*

Предварительно установим следующую лемму.

**Лемма 5.** *Если  $0 \leq A \in \mathfrak{B}$ , то существует последовательность конечномерных операторов  $A_n$ , обладающая свойствами:  $0 \leq A_n \leq A$ ,  $A_n \rightarrow A$  сильно.*

**Доказательство.** Пусть  $E(t)$  — разложение единицы оператора  $A$ ,  $P_n^{(j)} = E(t_j^{(n)}) - E(t_{j-1}^{(n)})$ , где  $t_j^{(n)} = j2^{-n}|A|$ ,  $1 \leq j \leq 2^n$ . Положим

$$B_n = \sum_{j=1}^{2^n-1} t_j^{(n)} P_n^{(j+1)}, \quad B_{nk} = \sum_{j=1}^{2^n-1} t_j^{(n)} Q_{nk}^{(j+1)},$$

где  $Q_{nk}^{(j)} \uparrow P_n^{(j)}$  ( $k \rightarrow \infty$ ), причем  $\dim Q_{nk}^{(j)} = \min(k, \dim P_n^{(j)})$ . Тогда  $B_n \rightarrow A$  равномерно,  $B_{nk} \rightarrow B_n$  сильно (при  $k \rightarrow \infty$ ), причем  $0 \leq B_{nk} \leq B_n \leq A$  ( $n, k = 1, 2, \dots$ ). Пусть далее  $\{x_1, x_2, \dots\}$  — множество, всюду плотное в  $\mathfrak{H}$ . Определим последовательность индексов  $j_n$  индуктивно следующими условиями:  $|(B_1 - B_{1j})x_j| < 1$  при всех  $j \geq j_1, \dots$ ;  $|(B_n - B_{nj})x_n| < 1/n$  при всех  $j \geq j_n > j_{n-1}, \dots$ . Последовательность  $A_n = B_{nj_n}$  является тогда искомой. Действительно, нужно лишь установить, что  $A_n \rightarrow A$  сильно. Пусть  $x \in \mathfrak{H}$  произволен ( $x \neq 0$ ) и  $\varepsilon > 0$ . Тогда найдутся числа  $k$  и  $n_0$  такие, что  $|x - x_k| < \varepsilon/4|A|$ ,  $|A - A_n| < \varepsilon/4|x|$  при  $n \geq n_0$ , тогда при  $n > \max(n_0, k, 4/\varepsilon)$ :  $|(A - A_n)x| \leq |(A - B_n)x| + |(B_n - B_{nj_n})(x - x_k)| + |(B_n - B_{nj_n})x_k| < \varepsilon$ .

**Доказательство теоремы 7.** Необходимость установлена при доказательстве теоремы 6. Пусть теперь  $A \circ T \in \mathfrak{B}_1$  и  $A_n$  — последовательность, определенная условиями леммы 5. Тогда  $\mu(A_n) = |A_n \circ T|_1 \leq |A \circ T|_1$  ( $n = 1, 2, \dots$ ). Следовательно, из последовательности  $A_n$  можно выделить подпоследовательность  $A_{n_k}$ , для которой числовая последовательность  $\mu(A_{n_k})$  сходится. Последовательность  $A_{n_k}$  является поэтому определяющей для оператора  $A$  в смысле определения 3. Теорема доказана.

Теперь мы откажемся от требования ограниченности оператора  $T$ : пусть  $T = \int_0^\infty t dE(t)$  — самосопряженный оператор,  $T_N = \int_0^N t dE(t)$  и  $\mu_N(\cdot)$  — интеграл на пространстве  $\mathfrak{B}_{T_N}$ .

**Определение 4.** Оператор  $A \geq 0$  ( $A \in \mathfrak{B}$ ) назовем интегрируемым относительно оператора  $T$ , если (а)  $\Delta(A) \subset D(T^{1/2})$ , (б)  $A \in \mathfrak{B}_{T_N}$  при каждом  $N$ , (в)  $\sup_N \mu_N(A) < +\infty$ .

Самосопряженный оператор  $A \in \mathfrak{B}$  назовем интегрируемым, если существует представление  $A = A_1 - A_2$ , где  $A_i \geq 0$  и интегрируемы. В общем случае оператор  $A \in \mathfrak{B}$  интегрируем, если интегрируемы  $A_R$  и  $A_I$ .

Обозначим через  $\mathfrak{B}_T$  класс всех ограниченных операторов, интегрируемых относительно  $T$ .

Теорема 8. Пусть  $T \geq 0$  — самосопряженный оператор. Тогда класс  $\mathfrak{B}_T$  является линейным пространством и на нем определен единственный линейный функционал  $\mu(\cdot)$ , удовлетворяющий требованиям (I) — (III). При этом  $\mu(A) = \text{sp } A \circ T$ ,  $0 \leq A \in \mathfrak{B}_T$ .

Доказательство. Пусть  $0 \leq A \in \mathfrak{B}_T$ . В силу определения 4 (а)  $D(A \circ T) = D(T^{1/2})$ , при этом  $T_N^{1/2} x \rightarrow T^{1/2} x$ ,  $x \in D(T^{1/2})$  и

$$\begin{aligned} \sup_{x \in D(T^{1/2}), |x|=1} (A \circ T x, x) &= \sup_{x \in D(T^{1/2}), |x|=1} |A^{1/2} T^{1/2} x|^2 = \\ &= \sup_{x \in D(T^{1/2}), |x|=1} \lim_{N \rightarrow \infty} |A^{1/2} T_N^{1/2} x|^2 \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \mu_N(A) < +\infty, \text{ т. е. } A \circ T \text{ ог-} \end{aligned}$$

раничен, и потому  $A \circ T_N \rightarrow \overline{A \circ T}$  слабо. Из леммы 4 с учетом соотношения  $|A \circ T_N| \leq \sup_N \mu_N(A) < +\infty$  теперь следует, что  $\overline{A \circ T} \in \mathfrak{S}_1$  и

$$|\overline{A \circ T}|_1 \leq \lim \mu_N(A). \quad (6)$$

Теперь без труда устанавливается, что  $\mathfrak{B}_T$  — линейное пространство и функционал  $\mu(\cdot)$ , распространенный по линейности на  $\mathfrak{B}_T$  с класса неотрицательных интегрируемых операторов, удовлетворяет на  $\mathfrak{B}_T$  требованиям (I) — (III). Пусть  $\{x_1^{(N)}, x_2^{(N)}, \dots\}$  — ортонормированная система из  $\Delta(T_N^{1/2})$ , образующая базис в подпространстве  $[\Delta(T_N^{1/2})]$  и  $0 \leq A \in \mathfrak{B}_T$ . Тогда

$$\mu_N(A) = \sum_j (T_N^{1/2} A T_N^{1/2} x_j^{(N)}, x_j^{(N)}) = \sum_j (T^{1/2} A T^{1/2} x_j^{(N)}, x_j^{(N)}) \leq |\overline{A \circ T}|_1.$$

Сопоставляя это с (6), получаем, что  $\mu(A) = \lim_N \mu_N(A)$ . Отсюда следует единственность  $\mu(\cdot)$ .

Замечание 3. Если мера  $m$ , определяемая самосопряженным оператором  $T$ , конечна, т. е.  $T \in \mathfrak{S}_1$ , то  $\mathfrak{B}_T$  совпадает с  $\mathfrak{B}$ , причем теорема 6 является тривиальным следствием результата Глизона.

Если мера  $m$  суть размерность, т. е.  $T = I$ , то  $\mathfrak{B}_T = \mathfrak{S}_1$  и  $\mu(A) = \text{sp } A$ .

г. Казань

Поступило  
3 III 1969

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Gleason A. M. Measures on the closed subspaces of a Hilbert space. J. Rat. Mech. Analysis, v. 6, 1957, p. 885—894.
2. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., „Наука“, 1965.