N. Yu. Kapustin, Existence and uniqueness of the L_2-solution of the Tricomi problem for a parabolic-hyperbolic equation,

Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1986, Volume 291, Number 2, 288–292

https://www.mathnet.ru/eng/dan8370

ство теорем 1 и 2 лишь чисто технические осложнения, связанные с использованием для фигурирующих в формуле среднего значения бесселевых функций асимптотических представлений.

Примерами систем, для которых справедливы теоремы 1 и 2, могут служить N-кратная система экспонент, получающаяся перемножением N однократных систем экспонент вида $e^{i\lambda_{k_l}^{[l]} x_l}$, $l = 1, 2, \ldots, N$, с условиями для каждого $l = 1, 2, \ldots, N$

$$|\operatorname{Im} \lambda_{k_l}^{[l]}| \leqslant C_l^{[1]}, \qquad \sum_{t \leqslant |\lambda_{k_l}^{[l]}| \leqslant t+1} 1 \leqslant C_l^{[2]} \quad \text{для всех } t \geqslant 0,$$

а также система собственных функций нелокальной задачи типа Бицадзе—Самарского в N-мерном шаре Ω радиуса R

$$\Delta u + \lambda u = 0 \quad \text{в} \quad \Omega,$$
$$u|_{r=r_0} = u|_{r=R}$$

для некоторого r_0 из интервала $0 < r_0 < R$.

Авторы благодарят всех участников семинара С.М. Никольского и Л.Д. Кудрявцева и семинара А.В. Бицадзе за обсуждение результатов этой работы.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Будапештский университет
им. Этваша Лоранда

Поступило
8 X 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* – УМН, 1958, т. 13, № 1, с. 87–180. 2. *Ильин В.А.* – УМН, 1968, т. 23, № 2, с. 61–120.

УДК 517.956.6 МАТЕМАТИКА

Н.Ю. КАПУСТИН

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ L_2-РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТРИКОМИ ДЛЯ ОДНОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком А.Н. Тихоновым 12 VI 1985)

В настоящей работе устанавливается факт однозначной разрешимости в классе L_2 задачи Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с нехарактеристической линией изменения типа

$$(1) \qquad \begin{aligned} &u_x - u_{yy} = f^+(x, y), \quad y > 0; \\ &y^2 u_{xx} - u_{yy} + a u_x = f^-(x, y), \quad y < 0, \end{aligned}$$

в котором коэффициент a представляет собой действительное число из полуинтервала $(0, 1]$. При описании допустимого пространства для граничной функции, задаваемой на характеристике в области гиперболичности уравнения (1), существенно различаются два случая: 1) $a = 1$; 2) a принадлежит интервалу $(0, 1)$.

Проводимые здесь исследования являются логическим продолжением работ В.М. Говорова [1, 2], в которых установлены теоремы существования и единственности обобщенных L_2-решений первой смешанной задачи для произвольных параболического и гиперболического уравнений 2-го порядка, заданных в $(N+1)$-мерном цилиндре, а также изучены некоторые свойства этих решений, и работы автора [3], где рассматривается задача Трикоми для параболо-гиперболического уравнения с волновым оператором и оператором теплопроводности. Упомянутая статья В.М. Говорова [2] содержит довольно полный обзор результатов, полученных при решении краевых задач с граничной функцией из L_2.

Пусть область D представляет собой объединение квадрата $AMNB$: A (0, 0), $M(0,1)$, $N(1,1)$, B (1, 0), интервала AB и характеристического треугольника уравнения (1) с вершинами в точках A, B и $C(1/2, -1)$. Следуя установившейся в теории уравнений смешанного типа традиции, обозначим квадрат $AMNB$ через D^+, а треугольник ACB – через D^-.

Под классическим решением задачи Трикоми для уравнения (1) будем понимать функцию $u(x, y)$ из класса $C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^{1,2}(D^+) \cap C^2(D^-)$*, являющуюся на множестве $D^+ \cup D^-$ решением уравнения (1) с функциями $f^+(x, y) \in C(D^+)$, $f^-(x, y) \in (D^-)$ и удовлетворяющую граничным условиям

$$(2) \qquad u|_{AC} = \psi(y), \qquad u|_{AM} = \varphi_1(y), \qquad u|_{MN} = \varphi_2(x),$$

где $\psi(y) \in C[-1, 0]$, $\varphi_1(y) \in C[0, 1]$, $\varphi_2(x) \in C[0, 1]$, $\varphi_1(0) = \psi(0)$, $\varphi_1(1) = \varphi_2(0)$.

Гиперболическая часть уравнения смешанного типа (1) диктует нам необходимость введения некоторого нормированного пространства $G_a^2(-1, 0)$, которое понадобится для определения обобщенного L_2-решения задачи Трикоми. Под $G_1^2(-1, 0)$ мы будем понимать множество всех функций, удовлетворяющих условию $y\psi(y) \in L_2(-1, 0)$; $G_a^2(-1, 0) = G_1^2(-1, 0) \cap L_1(-1, 0)$ при $a \in (0, 1)$.

Норма в пространстве $G_a^2(-1, 0)$ вводится по формуле

$$\|\psi(y)\|_{G_a^2(-1,0)} = \begin{cases} \|y\psi(y)\|_{L_2(-1,0)} & \text{при} \quad a = 1, \\ \|y\psi(y)\|_{L_2(-1,0)} + \|\psi(y)\|_{L_1(-1,0)} & \text{при} \quad a \in (0, 1). \end{cases}$$

Нетрудно показать, что пространство финитных бесконечно дифференцируемых функций на интервале $(-1, 0)$ является всюду плотным множеством в $G_a^2(-1, 0)$.

Обобщенным L_2-решением задачи (1), (2) с правой частью

$$f(x, y) = \begin{cases} f^+(x, y), & (x, y) \in D^+, \\ f^-(x, y), & (x, y) \in D^-, \end{cases}$$

из класса $L_2(D)$ и граничными функциями $\psi(y) \in G_a^2(-1, 0)$, $\varphi_1(y) \in L_1(0, 1)$, $\varphi_2(x) \in L_2(0, 1)$ назовем элемент $u(x, y)$ пространства $L_2(D)$, удовлетворяющий для любой функции $v(x, y) \in Q(D)$ тождеству

$$(3) \qquad \iint_D (fv - u\mathcal{L}^* v)\,dx\,dy = \int_{MA} \varphi_1 v\,dy + \int_{MN} \varphi_2 v_y\,dx - 2\int_{AC} y\psi\,dv + (a-1)\int_{AC} \psi v\,dy,$$

в котором

$$\mathcal{L}^* v = \begin{cases} -v_x - v_{yy}, & y > 0, \\ y^2 v_{xx} - v_{yy} - av_x, & y < 0, \end{cases}$$

---

*Принадлежность функции $u(x, y)$ классу $C^{1,2}(D^+)$ означает выполнение следующих двух требований: $u(x, y) \in C^1(D^+)$, $u_{yy}(x, y) \in C(D^+)$.

а пространство $Q(D)$ представляет собой множество всех функций $v(x, y)$ из класса $W_2^{1,2}(D^+) \cap W_2^2(D^-)$, следы которых на части $MN \cup NB \cup BC$ границы области D равны нулю и для которых выполнены почти всюду на интервале AB соотношения

$$v_y^+ - v_y^- \mid_{AB} = 0, \quad v^+ - v^- \mid_{AB} = 0.$$

Для доказательства теоремы существования и единственности обобщенного из класса $L_2(D)$ решения задачи Трикоми для уравнения (1) нам понадобятся следующие две леммы.

Лемма 1. *Пусть функция $u(x, y)$ является классическим решением задачи* (1), (2). *Тогда для нее справедлива априорная оценка*

$$\begin{aligned}(4)\qquad & \|u(x,y)\|_{L_2(D)} \leqslant \\ & \leqslant C_1\left(\|f(x,y)\|_{L_2(D)} + \|\psi(y)\|_{G_a^2(-1,0)} + \|\varphi_1(y)\|_{L_1(0,1)} + \|\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}\right),\end{aligned}$$

в которой постоянная C_1 не зависит от функции $u(x, y)$.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия*:

$$f^+(x,y) \in C^\infty(\overline{D^+}),\quad \operatorname{supp} f^+(x,y) \subset D^+,\quad f^-(x,y) \in C^\infty(\overline{D^-}),\quad \operatorname{supp} f^-(x,y) \subset D^-,$$
$$\psi(y) \in C^\infty[-1,0],\quad \operatorname{supp}\psi(y) \subset (-1,0),\quad \varphi_1(y) \in C^\infty[0,1],$$
$$\operatorname{supp}\varphi_1(y) \subset (0,1),\quad \varphi_2(x) \in C^\infty[0,1],\quad \operatorname{supp}\varphi_2(x) \subset (0,1).$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи Трикоми для уравнения (1), *причем это решение принадлежит классу* $C^1(\overline{D}) \cap C^\infty(\overline{D^+}) \cap C^\infty(\overline{D^-})$*.

Справедливость леммы 1 устанавливается методом вспомогательных функций. Следуя идее В.П. Диденко [4, 5], мы вводим в рассмотрение некоторую функцию, являющуюся решением задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, у которого в правой части стоит решение $u(x, y)$ задачи Трикоми. Затем изучается интеграл от произведения построенной вспомогательной функции на правую часть уравнения (1) по области, аппроксимирующей изнутри область D. Эта же схема применялась автором в статье [6].

Доказательство леммы 2 проводится по традиционной схеме, идущей от Ф. Трикоми, суть которой состоит в сведении краевой задачи для уравнения смешанного типа к интегральному уравнению. При изучении краевых задач для уравнений параболо-гиперболического типа этот метод использовался В.А. Елеевым [7–10] и другими авторами. Используя формулы, дающие решение задачи Коши для гиперболической части уравнения (1) (см. книги А.В. Бицадзе [11, 12]) и решение первой краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности на прямоугольнике (см., например, [13] или книгу А.Н. Тихонова и А.А. Самарского [14]), мы осуществляем редукцию задачи (1), (2) к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода относительно искомого решения на линии изменения типа. Дополнительное исследование ядра и правой части полученного интегрального уравнения дает возможность сделать вывод о принадлежности решения задачи Трикоми для уравнения (1) классу $C^1(\overline{D}) \cap C^\infty(\overline{D^+}) \cap C^\infty(\overline{D^-})$ при выписанных в формулировке леммы 2 ограничениях на правую часть уравнения (1) и граничные функции (2).

Перейдем теперь к формулировке и обоснованию основного утверждения

---

* Под пространством $C^1(\overline{D}) \cap C^\infty(\overline{D^+}) \cap C^\infty(\overline{D^-})$ здесь понимается множество всех функций из класса $C^1(\overline{D}) \cap C^\infty(D^+) \cap C^\infty(D^-)$, для каждой из которых существуют две функции из пространств $C^\infty(\overline{D^+})$ и $C^\infty(\overline{D^-})$ соответственно; первая совпадает с исходной функцией на множестве D^+, вторая – на D^-.

настоящей работы, доказательство которого аналогично доказательству теоремы 1 из работы В.М. Говорова [2].

Т е о р е м а. *Пусть правая часть $f(x,y)$ уравнения* (1) *— любая функция из класса $L_2(D)$, а граничные значения* (2) *— произвольные функции, подчиненные лишь ограничениям*

$$\psi(y)\in G_a^2(-1,0),\quad \varphi_1(y)\in L_1(0,1),\quad \varphi_2(x)\in L_2(0,1).$$

Тогда существует единственное обобщенное из класса $L_2(D)$ решение задачи Трикоми для уравнения (1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательности функций, удовлетворяющие следующим условиям:

$$f_n^+(x,y)\in C^\infty(\overline{D^+}),\quad \operatorname{supp} f_n^+(x,y)\subset D^+,\quad f_n^-(x,y)\in C^\infty(\overline{D^-}),$$
$$\operatorname{supp} f_n^-(x,y)\subset D^-,\quad \psi^n(y)\in C^\infty[-1,0],\quad \operatorname{supp}\psi^n(y)\subset(-1,\ 0),$$
$$\varphi_1^n(y)\in C^\infty[0,1],\quad \operatorname{supp}\varphi_1^n(y)\subset(0,1),\quad \varphi_2^n(x)\in C^\infty[0,1],$$
$$\sup\psi_2^n(x)\subset(0,\ 1),\quad n=1,2,3,\dots,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|f_n(x,y)-f(x,y)\|_{L_2(D)}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\|\psi^n(y)-\psi(y)\|_{G_a^2(-1,0)}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_1^n(y)-\varphi_1(y)\|_{L_1(0,1)}=0,\qquad \lim_{n\to\infty}\|\varphi_2^n(x)-\varphi_2(x)\|_{L_2(0,1)}=0.$$

В силу леммы 2 для каждой четверки f_n, ψ^n, φ_1^n, φ_2^n будет существовать единственное классическое решение $u_n(x,y)$ задачи (1), (2), принадлежащее классу $C^1(\overline{D})\cap$ $\cap\, C^\infty(\overline{D^+})\cap C^\infty(\overline{D^-})$. Оценка (4), доказанная в лемме 1, гарантирует сходимость последовательности $u_n(x,y)$ к некоторому элементу $u(x,y)\in L_2(D)$, который будет удовлетворять тождеству (3) для любой функции $v(x,y)$ из класса $Q(D)$, а следовательно и являться обобщенным L_2-решением задачи Трикоми для уравнения (1). Докажем теперь его е д и н с т в е н н о с т ь. Предположим, что существуют два различных в $L_2(D)$ решения задачи (1), (2). Тогда их разность $\tilde u(x,y)$ будет для любой функции $v(x,y)$ из класса $Q(D)$ удовлетворять соотношению

$$(5)\qquad \iint_D \tilde u\,\mathcal{L}^* v\,dx\,dy=0.$$

Рассмотрим сходящуюся в метрике L_2 к элементу $u(x,y)$ последовательность функций $F_n(x,y)\in C^\infty(\overline{D})$, $\operatorname{supp}F_n(x,y)\subset D^+\cup D^-$, $n=1,2,3,\dots$, и будем решать задачу Трикоми для уравнений

$$\mathcal{L}^* v=F_n(x,y),\qquad n=1,2,3,\dots,$$

с нулевыми граничными условиями на MN, NB и BC. Согласно утверждению леммы 2 (в данном случае следует сделать замену переменной $x'=1-x$) для каждого номера n будет существовать классическое решение задачи Трикоми $v_n(x,\ y)\in Q(D)$.

Переходя к пределу в равенстве (5), получим

$$\lim_{n\to\infty}\iint_D \tilde u\,\mathcal{L}^* v_n(x,y)dx\,dy=\iint_D(\tilde u)^2\,dx\,dy=0,$$

что доказывает единственность обобщенного решения. Теорема доказана.

Автор выражает глубокую благодарность чл.-корр. АН СССР А.В. Бицадзе и проф. В.А. Ильину за обсуждение полученных результатов и внимание к работе.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
25 VI 1985

ЛИТЕРАТУРА

1. *Говоров В.М.* – ДАН, 1978, т. 239, № 3, с. 515–518. 2. *Говоров В.М.* – ДАН, 1982, т. 262, № 5, с. 1044–1047. 3. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1984, т. 274, № 6, с. 1294–1298. 4. *Диденко В.П.* – Дифференц. уравнения, 1972, т. 8, № 1, с. 24–28. 5. *Диденко В.П.* – Укр. матем. журн., 1973, т. 25, № 1, с. 14–24. 6. *Капустин Н.Ю.* – ДАН, 1982, т. 265, № 3, с. 524–525. 7. *Елеев В.А.* – Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 1, с. 56–63. 8. *Елеев В.А.* – Там же, 1978, т. 14, № 1, с. 22–29. 9. *Елеев В.А.* – Там же, 1979, т. 15, № 1, с. 41–53. 10. *Елеев В.А.* – Там же, 1981, т. 17, № 1, с. 58–72. 11. *Бицадзе А.В.* Уравнения смешанного типа. М.: Изд-во АН СССР, 1959. 12. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 13. *Трикоми Ф.* Лекции по уравнениям в частных производных. М.: ИЛ, 1957. 14. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М: Наука, 1972.

УДК 517.11 МАТЕМАТИКА

К.Ж. КУДАЙБЕРГЕНОВ

О ВОПРОСАХ КЕЙСЛЕРА И МОРЛИ

(Представлено академиком М.М. Лаврентьевым 17 V 1985)

В этой заметке изучается вопрос о числе однородных моделей полной теории. Введем некоторые определения и обозначения. Модели будем обозначать большими готическими буквами, а их основные множества (универсумы) – соответствующими латинскими: например, $\mathfrak{M}$ и M. Символами α, β, γ, δ будем обозначать ординалы, κ, λ – кардиналы, ω_α – α-й бесконечный кардинал, $\omega = \omega_0$. Пусть $\lambda^{(\lambda)} = \sum_{\kappa<\lambda} \lambda^\kappa$. Мощность множества A будем обозначать $|A|$. Через $D(\mathfrak{M})$ обозначим множество всех типов (над ϕ), которые реализуются в модели $\mathfrak{M}$. В дальнейшем ОКГ будет означать, что предполагается обобщенная континуум-гипотеза.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ называется λ-однородной, если для любого $X \subseteq M$ мощности меньшей λ и любого $a \in M$ любое элементарное отображение $f: X \to M$ продолжается до элементарного отображения g: $X \cup \{a\} \to M$.

Определение 2 [1]. Пусть $\mathfrak{M}$ – модель мощности κ.

1) κ – регулярный кардинал. Тогда $\mathfrak{M}$ называется однородной, если $\mathfrak{M}$ κ-однородна.

2) κ – сингулярный кардинал. Тогда $\mathfrak{M}$ называется однородной, если $\mathfrak{M}$ есть объединение элементарной цепи, $\mathfrak{M} = \bigcup_{\alpha<\beta} \mathfrak{M}_\alpha$, где $\mathfrak{M}_\alpha$ – однородная модель регулярной мощности и $D(\mathfrak{M}_\alpha) = D(\mathfrak{M})$, $\alpha < \beta$.

Обозначим через $h_T(\lambda)$ число однородных моделей теории T мощности λ.

В работе Кейслера и Морли [1] были поставлены следующие вопросы:

(ОКГ) Существуют ли полные теории T, у которых h_T удовлетворяют условиям:

1) $\omega > h_T(\omega) > 3h_T(\omega_1)$;

2) $h_T(\omega) = \omega$, $1 < h_T(\omega_1) < \omega$;

3) $h_T(\omega) = \omega_1$, $h_T(\omega_1) \leqslant \omega$;

4) $h_T(\omega) \geqslant \omega$, $h_T(\omega_1) > h_T(\omega_2)$?

Эти вопросы были отмечены также в обзоре Е.А. Палютина [2, с. 372, проблема 8.17].