

## ЛИТЕРАТУРА

1. Глаубер Р. В сб.: Квантовая оптика и квантовая радиофизика. М.: Мир, 1966, с. 91–279. 2. Mandel L., Wolf E. – Rev. Mod. Phys., 1965, vol. 37, p. 231–287. 3. Carmichael U.I., Walls D.F. – J. Phys., 1976, vol. B9, p. 1199–1219. 4. Apanasevich P.A., Kilin S.J.a. – J. Phys., 1977, vol. B12, p. L83–L86. 5. Kimble H.I., Dagenais M., Mandel L. – Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 39, p. 691–694. 6. Aspect A., Roger G., Reynaud S. et al. – Phys. Rev. Lett., 1980, vol. 45, p. 617–620. 7. Eberly I.H., Wodkiewich K. – J. Opt. Soc. Amer., 1977, vol. 67, p. 1252–1261. 8. Тер-Микаелян М.Л., Меликян А.О. – ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 281–290; Тер-Микаелян М.Л. Нелинейная резонансная оптика, препринт ИФИ 74–11. Ереван, 1974. 9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. М.: Наука, 1973, с. 226. 10. Крючков Г.Ю., Мкртчян В.Е., Тер-Микаелян М.Л., Чалтыкян В.О. ЖЭТФ, 1985, т. 88, с. 112. 11. Arnoldus H.F., Nienhuis G. – J. Phys., 1984, vol. B17, p. 963–971.

УДК 621.385.6

ФИЗИКА

К.А. ЛУКИН, А.Е. ПОЕДИНЧУК,  
академик АН УССР В.П. ШЕСТОПАЛОВ

### ТЕОРИЯ ВОЗБУЖДЕНИЯ ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРОВ НЕЛИНЕЙНЫМИ ТОКАМИ

1. При анализе вынужденных колебаний в открытых резонаторах (ОР) с помощью известной теории возбуждения [1] приходится использовать решения соответствующих спектральных задач, полученные в приближении параболического уравнения. Эти решения справедливы в коротковолновом приближении и лишь приближенно описывают поля вне резонансного объема  $V_p$ , ограниченного зеркалами ОР и каустическими поверхностями, особенно в том случае, когда характерные размеры ОР сравнимы с длиной волны возбуждаемых колебаний. Поэтому теория возбуждения ОР [1] фактически не позволяет исследовать поля излучения из резонансного объема и вычислять потери энергии источника на их возбуждение [2].

В настоящей работе развивается новый подход в теории возбуждения двумерных ОР внешними источниками, параметры которых нелинейным образом зависят от возбуждаемых полей. Предлагаемая теория опирается на эффективные алгоритмы построения функции Грина для рассматриваемого класса ОР [3–5] и решения соответствующей спектральной задачи [6, 7], полученные строгим методом задачи Римана–Гильберта [3]. Найденные решения задачи возбуждения описывают поле как внутри, так и вне резонансного объема при произвольном соотношении между длиной волны и размерами ОР.

2. В случае высокочастотных периодических колебаний полей и токов с постоянными или медленно меняющимися амплитудой и частотой плотность тока источника можно представить в виде ряда Фурье. Используя это представление, исходные нестационарные уравнения Максвелла сводим к стационарным уравнениям для гармоник Фурье. Из-за резонансного характера возбуждения колебаний в ОР будем учитывать только доминирующую первую гармонику.

Пусть в ОР, образованном двумя круговыми цилиндрическими экранами  $S_1$  и  $S_2$  (рис. 1) с произвольными радиусами кривизны и расстоянием между ними, возбуждаются колебания внешним током с одной ненулевой компонентной плотно-

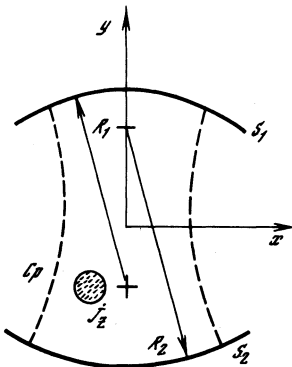


Рис. 1

сти тока  $j_z$ , колеблющейся с частотой  $\omega$ . В этом случае рассматриваемая задача сводится к решению скалярного квазилинейного уравнения Гельмгольца относительно  $z$ -компоненты  $E$ -поля:

$$(1) \quad \Delta E(x, y) + k^2 E(x, y) = -\frac{i4\pi k}{c} j_\omega(x, y, E(x, y)),$$

где  $j_\omega \equiv j_z$ ,  $k = \omega/c$ ,  $c$  – скорость света. Компоненты магнитного поля  $H_r$  и  $H_\varphi$  выражаются через  $E$  с помощью уравнений Максвелла. Правая часть (1) нелинейным образом зависит от возбуждаемого поля  $E(x, y)$ . Эта зависимость определяется законами взаимодействия токов используемых источников (диод Гана, ЛПД, ПП-

сверхрешетка, электронные пучки и т.п.) с электромагнитными полями и в дальнейшем предполагается известной.

Искомая функция  $E(x, y)$  должна обращаться в ноль на  $S_1$  и  $S_2$ , удовлетворять условию конечности энергии поля в ограниченном объеме (условию типа Мейкснера) и уходящему условию излучения [8]:

$$(2) \quad E(x, y) \sim \sum_n a_n H_n^{(1)}(kr) \exp(in\varphi)$$

Для достаточно больших  $|kz|$ :  $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$ ;  $\cos \varphi = x/r$ ;  $\sin \varphi = y/r$ ,  $H_n^{(1)}(kr)$  – функция Ханкеля первого рода  $n$ -го порядка. Решение квазилинейного уравнения (1) выписывается с помощью функции Грина  $G_\omega(x, y, x_0, y_0)$  уравнения Гельмгольца:

$$(3) \quad E(x, y) = \iint G_\omega(x, y, x_0, y_0) \cdot j_\omega(x_0, y_0, E(x_0, y_0)) dx_0 dy_0.$$

Справедливость (3) проверяется прямой подстановкой (3) в (2).

Уравнение (1) можно представить в операторной форме  $D_\omega[E(x, y)] = N_\omega[E(x, y)]$ , где  $D_\omega[E(x, y)]$  – линейный дифференциальный оператор, порождаемый рассматриваемой краевой задачей,  $N_\omega[E(x, y)]$  – нелинейный оператор, описывающий зависимость правой части уравнения (1) от возбуждаемого поля. Тогда переход от (1) к (3) можно рассматривать как процедуру обращения линейного оператора

$$E(x, y) = D_\omega^{-1}[N_\omega[E(x, y)]],$$

где  $D_\omega^{-1}[F(x, y)] \stackrel{\text{def}}{=} \iint G_\omega(x, y, x_0, y_0) F(x_0, y_0) dx_0 dy_0$  – интегральный оператор Грина. Ядро этого оператора отражает все электродинамические линейные свойства исследуемого ОР, а нелинейные характеристики источника описываются оператором  $N_\omega[\dots]$ . Формальный переход от (1) к (3) указывает только путь анализа поставленной задачи. Чтобы продвинуться в ее решении, необходимо рассмотреть соответствующую спектральную задачу, построить функцию Грина, получить уравнения баланса и составить уравнения для комплексных амплитуд поля.

3. Двумерная задача о спектре собственных колебаний рассматриваемого ОР состоит в определении значений спектрального параметра  $k$  ( $k = \omega_0/c$ ,  $\omega_0$  – собственная частота), при которых существует нетривиальное решение однородного уравнения Гельмгольца, удовлетворяющее указанным выше условиям. Зависимость решения  $E_0(x, y, k)$  от спектрального параметра рассматривается в комплексной плоскости  $C_k$  с разрезом по отрицательной полуоси  $\text{Im } k = 0$ ,  $\text{Re } k \leq 0$ . Можно показать, что сформулированная спектральная задача эквивалентна задаче

о характеристических числах канонической фредгольмовой оператор-функции, которая аналитически зависит от  $k$  [6, 7]. Используя фундаментальные результаты спектральной теории ядерных оператор-функций [9] в гильбертовых пространствах, можно показать, что спектр собственных частот  $\sigma(\Delta)$  поставленной задачи (спектр резонансных частот ОР) является конечнократным, дискретным и лежит в нижней полуплоскости  $C_k$ :  $\text{Im } k < 0$  [6, 7]. Такая структура множества  $\sigma(\Delta)$  и построенной оператор-функции позволила разработать и обосновать алгоритм для расчета собственных частот ОР при его произвольных геометрических размерах [6].

4. Функция Грина  $G_\omega$  является решением уравнения (1) с  $\delta$ -образной правой частью и удовлетворяет условиям на  $S_1$  и  $S_2$ , условию типа Мейкнера и условию на бесконечности  $G_\omega(x, y, x_0, y_0) \rightarrow 0$  при  $\text{Im } k > 0$  и  $|r - r_0| \rightarrow \infty$ . Задача определения  $G_\omega$  сводится к решению системы операторных уравнений второго рода в гильбертовом пространстве  $l_2$  вида [10]:

$$(4) \quad \begin{aligned} x^1 &= A^{11}(k)x^1 + A^{12}x^2 + b^1, \\ x^2 &= A^{21}(k)x^1 + A^{22}x^2 + b^2, \end{aligned}$$

где  $x^i = (x_n^i)_{n=-\infty}^{\infty}$  — неизвестные коэффициенты разложения  $G_\omega$  в ряд Фурье по угловой координате  $\varphi_i$  локальной цилиндрической системы координат  $(r_i, \varphi_i)$ , связанной с зеркалом  $S_i$ ;  $b^i = (b_n^i)_{n=-\infty}^{\infty}$  зависят от координат источника  $(x_0, y_0)$ . Оператор-функции  $A^{ij}(k): l_2 \rightarrow l_2$  являются ядерными, аналитически зависят от  $k$ , совпадают с соответствующими оператор-функциями спектральной задачи. При  $\text{Im } k \geq 0$  для любых  $b^i \in l_2$  решение системы уравнений (12) существует и единственно [10], причем решение при  $\text{Im } k = 0$  понимается как предел  $G_\omega$  при  $\text{Im } k \rightarrow +0$ . Если  $x^i = (x_n^i)_{n=-\infty}^{\infty}$  есть решение системы (4), то  $G_\omega$  вычисляется по формуле

$$G_\omega(x, y, x_0, y_0, k) = \sum_{j=1}^2 \sum_n x_n^j G_n(kr_j, ka_j) \exp(in\varphi_j),$$

где

$$G_n = \begin{cases} J_n(kr_j)H_n^{(1)}(ka_j), & r_j \leq a_j, \\ J_n(ka_j)H_n^{(1)}(kr_j), & r_j > a_j. \end{cases}$$

При аналитическом продолжении  $G_\omega$  в нижнюю полуплоскость  $\text{Im } k < 0$  через полюсь  $\text{Im } k = 0$ ,  $\text{Re } k > 0$ , эта функция имеет особенности типа полюса в точках, совпадающих со спектром  $\sigma(\Delta)$  ОР.

5. Наличие у функции Грина изолированных полюсов позволяет записать соотношение (6) в виде, удобном для анализа возбуждения в ОР отдельного колебания с собственной частотой  $\omega_s$ :

$$(5) \quad E(x, y) = [i(\omega - \omega_s)]^{-1} \iint j_\omega(x_0, y_0, E(x_0, y_0)) G_\omega^0(x, y, x_0, y_0) dx_0 dy_0,$$

где функция  $G_\omega^0 \stackrel{\text{def}}{=} i(\omega - \omega_s) G_\omega$  в окрестности полюса  $\omega = \omega_s$  (уже не имеет особенности), и с помощью обратного преобразования Фурье [11] получить нестационарное уравнение для медленно меняющихся полей с узким спектром излучаемых частот:

$$(5) \quad \frac{\partial E(x, y, t)}{\partial t} - i(\omega - \omega_s)E(x, y, t) = -\iint G_\omega^0(x, y, x_0, y_0) \times \\ \times j_\omega(x_0, y_0, E(x_0, y_0, t)) dx_0 dy_0.$$

Выражая  $j_\omega$  через плотность тока по формулам для коэффициентов ряда Фурье (1), видим, что уравнение (6) эквивалентно уравнению первого приближения метода асимптотических разложений Боголюбова—Митропольского. Малым параметром задачи является затухание  $\gamma_s = \omega_s''/\omega_s'$   $s$ -го резонанса, обеспечивающее узкий спектр возбуждаемых частот и медленное изменение амплитуды и фазы за период колебаний.

Выделяя в источнике достаточно малые участки и усредняя (5) по площади  $S_i$  этих участков, получим систему из соответствующего числа уравнений:

$$(7) \quad \bar{E}_p = [i(\omega - \omega_s)]^{-1} \sum_{k=1}^N G_{pk} S_k j_{\omega k}(\bar{E}_k), \quad p = 1, \dots, N,$$

где

$$G_{pk} \stackrel{\text{def}}{=} (S_k S_p)^{-1} \iint_{S_k} \iint_{S_p} G_\omega^0(x, y, x_0, y_0) dx dy dx_0 dy_0;$$

$$\bar{E}_k = S_k^{-1} \iint_{S_k} E(x, y) dx dy.$$

Задавая или определяя из уравнений движения носителей зарядов зависимость  $j_\omega(\bar{E}_k)$ , получим замкнутую систему уравнений относительно  $\bar{E}_k$ . Отыскивая  $\bar{E}_k$  из (7), вычисляем значения  $j_{\omega k}(\bar{E}_k)$  и с помощью функции Грина по формуле (3) восстанавливаем поле во всем пространстве.

6. Для энергии  $W_p$  поля, запасенной в резонансном объеме, из теоремы о комплексной мощности можно получить уравнения баланса активных и реактивных мощностей в виде

$$(8) \quad 2|\omega_s''| W_p(\omega) = (\omega_s' Q_s)^{-1} \omega Q_p P_{ea}(\omega),$$

$$(9) \quad 2[\omega - \omega_s(\omega_k(\omega_s))^{-1} \omega_s' \kappa_p(\omega)] \Delta W_p(\omega) = P_{er}(\omega),$$

где  $Q_s = \omega_s' W(\omega_s) / \Sigma'(\omega_s)$  — добротность собственных колебаний;  $Q_p = \omega W_p(\omega) / \Sigma'(\omega)$  — добротность вынужденных колебаний;  $W_p$  и  $\Delta W_p$  — сумма и разность энергии электрического  $W_E$  и магнитного  $W_H$  полей объема  $V_p$ ;  $\Sigma = \Sigma' + i \Sigma''$  — комплексная мощность излучения из объема;  $P_e = P_{ea} + iP_{er}$  — комплексная мощность взаимодействия поля с током источника.

Левую часть равенства (8) можно трактовать как дифракционные потери энергии, запасенной в ОР, а правую — как ту часть мощности источника, которая расходуется только на компенсацию этих потерь. Остальная мощность источника излучается непосредственно в свободное пространство. Добротность  $Q_p$  вынужденных колебаний зависит не только от геометрии резонатора и частоты  $\omega$ , но и от пространственной структуры и других свойств источника, а также от его взаимодействия с полем ОР. Эта характеристика может служить в качестве критерия при анализе влияния параметров источника на эффективность возбуждения колебаний в ОР. В случае высокодобротных колебаний, характеризуемых условиями  $\omega = \omega_s'$  и  $Q_s^{-1} \ll 1$ , источник слабо влияет на структуру поля в резонансном объеме. Если при этом мощность излучения из объема  $V_p$  обусловлена только дифракционными потерями, то  $Q_p \approx Q_s$ ,  $\omega^2 W_H = \omega_s^2 W_E$ ,  $\omega_s' + \omega \approx 2\omega$  и уравнения баланса (8), (9) сводятся к соответствующим уравнениям теории [1, 11].

7. Характерной чертой разработанной теории является ее математическая обоснованность. Отказ от традиционного модового подхода и использование метода задачи Римана—Гильберта [3] позволили впервые решить задачу (в самосогласо-

ванной постановке) о расчете возбуждаемых полей как внутри, так и вне резонансно-го объема ОР при произвольном отношении длины волны к его размерам. Это, в частности, дает возможность вычислять потери энергии источника на возбуждение полей, излучаемых в свободное пространство.

Институт радиофизики и электроники  
Академии наук УССР, Харьков

Поступило  
9 X 1984

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Вайнштейн Л.А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
2. *Вайнштейн Л.А., Лесик Н.И., Рожнев А.Г., Трубецков Д.И.* В кн.: Лекции по электронике СВЧ и радиофизике (6 зимняя школа-семинар инженеров) 1983, кн. 3, 178 с.
3. *Шестопалов В.П.* Метод задачи Римана-Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Харьков: Изд-во ХГУ, 1971.
4. *Шестопалов В.П.* Сумматорные уравнения в современной теории дифракции. Киев: Наукова думка, 1983. 251 с.
5. *Кошпаренко В.Н., Мележик П.Н., Шестопалов В.П.* Свободные колебания в цилиндре с двумя продольными щелями. Препринт ИРЭ АН УССР, № 120. Харьков, 1979, 45 с.
6. *Кошпаренко В.Н., Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* - Докл. АН УССР. Сер. А, 1983, № 2, с. 55-58.
7. *Поединчук А.Е.* - Там же, 1983. Сер. А, № 8, с. 53-57.
8. *Вайнберг Б.Р.* - Матем. сб., 1972, т. 87, вып. 2, с. 293-308.
9. *Гохберг И.Ц., Сигал Е.И.* - Там же, 1971, т. 84, вып. 4, с. 607-629.
10. *Кошпаренко В.Н., Мележик П.Н., Поединчук А.Е., Шестопалов В.П.* - ЖВМяМФ, 1984, т. 24, № 6, с. 1306-1512.
11. *Вайнштейн Л.А., Солнцев В.А.* Лекции по сверхвысокочастотной электронике. М.: Сов. радио, 1973, 400 с.