А. М. Хлуднев, Краевая задача для одной системы уравнений с монотонным оператором, *Дифференц. уравнения*, 1980, том 16, номер 10, 1843–1849

ОКТЯБРЬ 1980 г., ТОМ XVI, № 10

УДК 517.946

А. М. ХЛУДНЕВ

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ

Относительно двух функций $u(t, x)$ и $v(t, x, \omega)$ рассматривается разрешимость краевой задачи

$$(-1)^k \varphi\left(\int_\Omega |\nabla^k u|^2 dx\right) \Delta^k u = -\int_0^\infty m(\omega) v_{tt} d\omega \text{ в } Q = \Omega \times (0, T), \tag{1}$$

$$v_{tt} + \omega^2 v = \omega^2 u \text{ в } Q \times \{m(\omega) > 0\}, \tag{2}$$

$$u = \frac{\partial u}{\partial n} = \ldots = \frac{\partial^{k-1} u}{\partial n^{k-1}} = 0 \text{ на } \partial\Omega \times (0, T);\ v = v_0(x, \omega),\ v_t = v_1(x, \omega) \text{ при } t = 0. \tag{3}$$

Здесь $\varphi(s) \geqslant 0$ — непрерывная функция, $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in \Omega$, Ω — ограниченная область в R^ν с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, Δ — оператор Лапласа по x, $|\nabla^k u|^2 = (\Delta^{\frac{k}{2}} u)^2$ при четном k, $|\nabla^k u|^2 = \sum_{i=1}^{\nu} (\Delta^{\frac{k-1}{2}} u)_{x_i}^2$ при нечетном k, $m(\omega) \geqslant 0$ — заданная на $(0, \infty)$ функция, $\omega \in (0, \infty)$ — параметр, $T > 0$ — фиксированное число. Системы уравнений такого вида возникают в приложениях при описании квазистатики упругих тел с непрерывно распределенными массами-осцилляторами [1, 2]. Например, для струны длины l в левой части (1) будет оператор $Lu = -u_{xx}\left(1 + \frac{1}{2}\int_0^l u_x^2 dx\right)$. Стержень с осцилляторами описывается близким по структуре оператором $Lu = u_{xxxx} - u_{xx}\left(1 + \frac{1}{2}\int_0^l u_x^2 dx\right)$ [3].

Цель данной работы — доказать разрешимость задачи (1) — (3). Для этого сначала будут получены априорные оценки, а затем с помощью параболической регуляризации доказана теорема существования.

Отметим, что с учетом (2) уравнение (1) можно записать в виде

$$(-1)^k \varphi\left(\int_\Omega |\nabla^k u|^2 dx\right) \Delta^k u + \alpha u = \int_0^\infty m\omega^2 v d\omega, \tag{4}$$

где $\alpha = \int_0^\infty m\omega^2 d\omega$. Будем предполагать $\alpha > 0$. Замечание, относящееся к случаю $\alpha = 0$, отнесено в конец работы. Динамическая задача при $k = 1$, т. е. когда вместо (1) рассматривается уравнение

$$u_{tt}-\varphi\left(\int_\Omega|\nabla u|^2dx\right)\Delta u=-\int_0^\infty m(\omega)v_{tt}d\omega$$

и задаются начальные условия для u, изучена в [4]. Колебания стержня с осцилляторами исследовались в [5].

1. Априорные оценки. Предположим, что все рассматриваемые функции гладкие, а возникающие интегралы по ω сходящиеся. Точные условия будут сформулированы ниже. Из (2) имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|\nabla^p v_t(t)\|^2+\omega^2\|\nabla^p v(t)\|^2\}=\omega^2(\nabla^p u(t),\ \nabla^p v_t(t)),\quad 0\leqslant p\leqslant k,$$

где $\|\cdot\|$, $(\cdot,\ \cdot)$ — норма и скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Далее скобки будут означать также значение функционала в точке. Отсюда получаем

$$\|\nabla^p v_t(t)\|^2+\omega^2\|\nabla^p v(t)\|^2\leqslant\exp(t)\{\|\nabla^p v_1\|^2+\omega^2\|\nabla^p v_0\|^2+$$
$$+\omega^4\int_0^t\|\nabla^p u(\tau)\|^2d\tau\}. \tag{5}$$

Из уравнения (4) можно вывести

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}R(t)=\int_0^\infty m\omega^2\left\{\frac{d}{dt}(u(t),\ v(t))-(u(t),\ v_t(t))\right\}d\omega, \tag{6}$$

где $R(t)=\int_0^{\|\nabla^k u(t)\|^2}\varphi(\tau)\,d\tau+\alpha\|u(t)\|^2$. Отсюда следует

$$R(t)=R(0)+2\int_0^\infty m\omega^2\Big\{(u(\tau),\ v(\tau))\Big|_{\tau=0}^{\tau=t}-$$
$$-\int_0^t(u(\tau),\ v_\tau(\tau))\,d\tau\Big\}d\omega. \tag{7}$$

В силу неравенства Юнга имеем

$$2\int_0^\infty m\omega^2(u(t),\ v(t))\,d\omega\leqslant\frac{\alpha}{2}\|u(t)\|^2+2\int_0^\infty m\omega^2\|v(t)\|^2d\omega.$$

Тогда, пользуясь оценкой (5), из (7) получим

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\{\int_0^{\|\nabla^k u(t)\|^2}\varphi(\tau)\,d\tau+\frac{\alpha}{2}\|u(t)\|^2\right\}\leqslant c_1. \tag{8}$$

Постоянная c_1 зависит от m, T, v_0, v_1, φ. Предположим, что из (8) следует ограниченность нормы $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|\nabla^k u(t)\|^2$. Условия, налагаемые в дальнейшем на φ, будут обеспечивать эту оценку. Умножим теперь (5) на m и проинтегрируем по ω от 0 до ∞. В результате будем иметь

$$\max_{0\leqslant t\leqslant T}\left\{\int_0^\infty m\|\nabla^k v_t(t)\|^2 d\omega + \int_0^\infty m\omega^2\|\nabla^k v(t)\|^2 d\omega\right\}\leqslant c_2. \tag{9}$$

2. Теорема существования и единственности. Параболическая регуляризация. Пусть $H^k(\Omega)$ — пространство С. Л. Соболева:

$$H^k(\Omega)=\{w\,|D^\beta w\in L^2(\Omega),\ |\beta|\leqslant k\},$$

$H_0^k(\Omega)$ — замыкание гладких финитных функций в норме $H^k(\Omega)$, а $H^{-k}(\Omega)$ — сопряженное с $H_0^k(\Omega)$. Далее, если F — пространство Банаха, то через $L_\mu^2(0,\ \infty;\ F)$ обозначим пространство функций с нормой $(\mu(\omega)\in L^2(0,\ \infty))$

$$\|\psi\|^2_{L^2_\mu(0,\infty;F)}=\int_0^\infty \mu^2(\omega)\|\psi(\omega)\|_F^2 d\omega,$$

где $\|\psi(\omega)\|_F$ — норма $\psi(\omega)$ в F. Будем считать

$$B_{\mu_i}=L^2_{\mu_i}(0,\ \infty;\ H_0^k(\Omega)),\quad \mu_i=m^{\frac{1}{2}}\omega^{\frac{i}{2}},\quad i=0,2.$$

Теорема 1. *Пусть $\sqrt{s}\,\varphi(s)$ — неубывающая функция и такая, что $\int_0^s\varphi(\tau)\,d\tau\to+\infty$ при $s\to+\infty$. Предположим также, что*

$$v_0\in B_{\mu_2},\ v_1\in B_{\mu_0};\ m(\omega),\ m(\omega)\,\omega^4\in L^1(0,\ \infty).$$

Тогда существует и притом единственная пара функций u, v такая, что

$$u\in L^\infty(0,\ T;\ H_0^k(\Omega)),\ v\in L^\infty(0,\ T;\ B_{\mu_2}),\ v_t\in L^\infty(0,\ T;\ B_{\mu_0}),$$

и удовлетворяющая (1)—(3).

Доказательство существования проведем с помощью параболической регуляризации. Пусть $\varepsilon>0$ — произвольное число. Рассмотрим вспомогательное уравнение с начальным условием, являющимся произвольной фиксированной функцией из $H_0^k(\Omega)$:

$$(-1)^k(\varepsilon\Delta^k u_t+\varphi(\|\nabla^k u(t)\|^2)\,\Delta^k u)+\alpha u=\int_0^\infty m\omega^2 v\,d\omega,\quad u|_{t=0}=u_0, \tag{10}$$

и докажем, что регуляризованная задача (2), (10), (3) разрешима при любом фиксированном $\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$. Выберем базис $\{\psi_j\}$, $j=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$, в пространстве $H_0^k(\Omega)$ и будем искать приближения Галеркина задачи (2), (10), (3) в виде

$$u_n(t)=\sum_{i=1}^n q_{in}(t)\,\psi_i,\quad v_n(t)=\sum_{i=1}^n a_{in}(t,\ \omega)\,\psi_i.$$

Для этих приближений имеем задачу

$$((-1)^k(\varepsilon\Delta^k u_{nt}+\varphi(\|\nabla^k u_n(t)\|^2)\Delta^k u_n)+\alpha u_n,\ \psi_j)=$$

$$=\int_0^\infty m\omega^2(v_n,\ \psi_j)\,d\omega, \tag{11}$$

$$v_{ntt}+\omega^2 v_n=\omega^2 u_n, \tag{12}$$

$$v_n(0) = v_{n0}, \quad v_{nt}(0) = v_{n1}, \quad u_n(0) = u_{n0}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n, \tag{13}$$

$$v_{n0} \to v_0 \text{ в норме } B_{\mu_2}, \quad v_{n1} \to v_1 \text{ в норме } B_{\mu_0}, \quad u_{n0} \to u_0 \text{ в норме } H_0^k(\Omega). \tag{14}$$

Заметим теперь, что добавочный член $(-1)^k \Delta^k u_t$ не мешает воспользоваться указанной в п. 1 схемой вывода априорных оценок. Более того, он доставляет дополнительную оценку по сравнению с (8), (9), так что в результате будем иметь

$$\begin{gathered} \sqrt{\varepsilon}\, \|u_{nt}\|_{L^2(0,T;H_0^k(\Omega))} + \max_{0\leqslant t\leqslant T} \|u_n(t)\|_{H_0^k(\Omega)} \leqslant c_3, \\ \max_{0\leqslant t\leqslant T} \{\|v_{nt}(t)\|_{B_{\mu_0}} + \|v_n(t)\|_{B_{\mu_2}}\} \leqslant c_4. \end{gathered} \tag{15}$$

Сходимость (14) дает возможность считать постоянные c_3 и c_4 не зависящими от n. Оценка (15) обеспечивает разрешимость системы уравнений Галеркина на всем промежутке $[0, T]$. Кроме того, на основании ее можно выбрать подпоследовательность u_n, v_n такую, что при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &u_n \to u \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^k(\Omega)), \\ &u_{nt} \to u_t \text{ слабо в } L^2(0, T; H_0^k(\Omega)), \\ &v_n \to v \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0, T; B_{\mu_2}), \\ &v_{nt} \to v_t \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0, T; B_{\mu_0}). \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим $A(u_n) = (-1)^k \varphi(\|\nabla^k u_n\|^2) \Delta^k u_n + \alpha u_n$, $F_n = \int\limits_0^\infty m\omega^2 v_n d\omega$. Из (16) следует, что

$$A(u_n) \to M \ \ast\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H^{-k}(\Omega)).$$

Воспользуемся монотонностью оператора A (см. лемму в конце работы) и покажем, что $M = A(u)$. Положим для этого

$$b_n = \int\limits_0^T (A(u_n(t)) - A(w(t)), \ u_n(t) - w(t))\, dt \geqslant 0,$$

где w — достаточно гладкая функция. Из (11) получаем

$$\int\limits_0^T (F_n, u_n)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla^k u_n(0)\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla^k u_n(T)\|^2 = \int\limits_0^T (A(u_n), u_n)\, dt$$

и, значит,

$$b_n = \int\limits_0^T (F_n, u_n)\, dt + \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla^k u_n(0)\|^2 - \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla^k u_n(T)\|^2 - \\ - \int\limits_0^T (A(u_n), w)\, dt - \int\limits_0^T (A(w), u_n - w)\, dt.$$

Согласно (16), можно считать

$$F_n \to F = \int_0^\infty m\omega^2 v d\omega \text{ сильно в } L^2(Q).$$

Поскольку из (16) следует также, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \|\nabla^k u_n(T)\|^2 \geqslant \|\nabla^k u(T)\|^2,$$

то с учетом (14) и (16) будем иметь неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} b_n \leqslant \int_0^T (F, u)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla^k u_0\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla^k u(T)\|^2 -$$

$$-\int_0^T (M, w)\,dt - \int_0^T (A(w), u-w)\,dt.$$

Однако из (11) следует, что $(-1)^k \varepsilon\Delta^k u_t + M = F$, поэтому

$$\int_0^T (M, u)\,dt = \int_0^T (F, u)\,dt + \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla^k u_0\|^2 - \frac{\varepsilon}{2}\|\nabla^k u(T)\|^2.$$

И, следовательно, учитывая неотрицательность b_n, получаем

$$\int_0^T (M - A(w),\ u - w)\,dt \geqslant 0.$$

Возьмем здесь $w = u - \lambda\psi$, $\lambda > 0$, ψ — гладкая функция. Тогда

$$\int_0^T (M - A(u - \lambda\psi),\ \psi)\,dt \geqslant 0.$$

В силу непрерывности A (из $H_0^k(\Omega)$ в $H^{-k}(\Omega)$) в этом неравенстве можно перейти к пределу при $\lambda \to 0$. И тогда, пользуясь произвольностью ψ, получим $M = A(u)$.

Теперь нетрудно установить разрешимость исходной задачи. Решение (2), (10), (3) обозначим через u_ε, v_ε. Для этого решения имеют место оценки (15) (где значок n следует заменить на ε), для получения которых нужно провести указанные в п. 1 выкладки. При этом все действия будут законны, причем постоянные c_3 и c_4 можно считать не зависящими от ε. Поэтому существует последовательность u_ε, v_ε (обозначение прежнее) такая, что при $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \to u \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; H_0^k(\Omega)),$$

$$v_\varepsilon \to v \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; B_{\mu_2}),$$

$$v_{\varepsilon t} \to v_t \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0, T; B_{\mu_0}),$$

$$\int_0^\infty m\omega^2 v_\varepsilon d\omega \to \int_0^\infty m\omega^2 v d\omega \text{ сильно в } L^2(Q).$$

Эта сходимость дает возможность перейти к пределу в уравнении (10) при $\varepsilon \to 0$. Если

$$A(u_\varepsilon) \to N \quad *\text{-слабо в } L^\infty(0,\ T;\ H^{-k}(\Omega)),$$

то в пределе получим

$$N = \int_0^\infty m\omega^2 v\, d\omega.$$

Свойство монотонности оператора A позволяет аналогично предыдущему установить равенство $N = A(u)$. Существование решения доказано.

Единственность. Предполагая существование двух различных решений u_1, v_1 и u_2, v_2, получим уравнение

$$(-1)^k [\varphi(\|\nabla^k u_1\|^2)\Delta^k u_1 - \varphi(\|\nabla^k u_2\|^2)\Delta^k u_2] + \alpha(u_1 - u_2) =$$

$$= \int_0^\infty m\omega^2 (v_1 - v_2)\, d\omega.$$

Пользуясь монотонностью и оценкой вида (5), выводим

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|^2 \leqslant c\|u_1(t) - u_2(t)\| \int_0^t \|u_1(\tau) - u_2(\tau)\|\, d\tau,$$

где c — постоянная. Отсюда получаем требуемое равенство $u_1 \equiv u_2$.

3. Исследуем теперь свойство монотонности оператора $B(u) = (-1)^k \times \varphi\left(\int_\Omega |\nabla^k u|^2 dx\right) \Delta^k u$ в терминах функции φ.

Лемма. *Для того чтобы оператор B, действующий из $H_0^k(\Omega)$ в $H^{-k}(\Omega)$, был монотонным, необходимо и достаточно, чтобы функция $\sqrt{s}\varphi(s)$ была неубывающей.*

Докажем сначала достаточность. Пусть u_1, $u_2 \in H_0^k(\Omega)$. Тогда с учетом неравенства Коши

$$L(u_1,\ u_2) \equiv (-1)^k (\varphi(\|\nabla^k u_1\|^2)\Delta^k u_1 - \varphi(\|\nabla^k u_2\|^2)\Delta^k u_2,\ u_1 - u_2) \geqslant$$

$$\geqslant (\sqrt{s_1} - \sqrt{s_2})(\sqrt{s_1}\varphi(s_1) - \sqrt{s_2}\varphi(s_2)) \geqslant 0,$$

где $s_i = \|\nabla^k u_i\|^2$, $i = 1,\ 2$.

Для доказательства необходимости предположим противное. Тогда существуют $s_1 > s_2 > 0$ и $\delta < 0$, для которых

$$\sqrt{s_1}\varphi(s_1) - \sqrt{s_2}\varphi(s_2) = \delta.$$

Возьмем такую функцию u_1, чтобы $\|\nabla^k u_1\|^2 = s_1$, и положим $u_2 = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}\, u_1$. Тогда $L(u_1,\ u_2) < 0$, что противоречит монотонности оператора B.

Задача Дирихле для уравнения $Bu + \alpha u = f$, $\alpha \geqslant 0$, $f \in H^{-k}(\Omega)$, φ удовлетворяет условиям теоремы и при $\sqrt{s}\,\varphi(s) \to +\infty$, $s \to +\infty$, имеет решение $u \in H_0^k(\Omega)$. Для доказательства можно воспользоваться теоремой 2.1 [6, гл. 2]. Достаточными условиями единственности будут: положительность величины α либо строгое возрастание функции $\sqrt{s}\varphi(s)$.

Отметим также, что оператор $B + \alpha$ является градиентом (выпуклого) функционала

$$u \to \frac{1}{2}\int\limits_0^{\|\nabla^k u\|^2} \varphi(\tau)\,d\tau + \frac{\alpha}{2}\|u\|^2,$$

так что задача Дирихле эквивалентна вариационной.

Рассмотрим отдельно стержень с массами-осцилляторами. Теперь

$$\|\psi\|^2_{B_{\mu_i}} = \int\limits_0^\infty m(\omega)\,\omega^i\,\|\psi(\omega)\|^2_{H_0^2(\Omega)}\,d\omega.$$

Справедлива

Теорема 2. *Пусть*

$$v_0 \in B_{\mu_2},\ v_1 \in B_{\mu_0};\ m(\omega),\ m(\omega)\,\omega^4 \in L^1(0,\ \infty).$$

Тогда существует единственная пара функций u, v такая, что

$$u \in L^\infty(0,\ T;\ H_0^2(\Omega)),\ v \in L^\infty(0,\ T;\ B_{\mu_2}),\ v_t \in L^\infty(0,\ T;\ B_{\mu_0}),$$

удовлетворяющая уравнениям

$$u_{xxxx} - u_{xx}\left(1 + \frac{1}{2}\int\limits_0^l u_x^2\,dx\right) = -\int\limits_0^\infty m(\omega)\,v_{tt}\,d\omega,$$

$$v_{tt} + \omega^2 v = \omega^2 u$$

и начальным условиям

$$v(0,\ x,\ \omega) = v_0,\ v_t(0,\ x,\ \omega) = v_1.$$

Литература

1. Пальмов В. А. Об одной модели среды сложной структуры.— ПММ, 1969, т. 33, № 4, с. 768—773.
2. Слепян Л. И. Волна деформаций в стержне с амортизированными массами.— Инж. журн. МТТ, 1967, № 5, с. 34—40.
3. Каудерер Г. Нелинейная механика.— М.: ИЛ, 1961.— 777 с.
4. Хлуднев А. М. О разрешимости начально-краевой задачи для одного класса квазилинейных систем.— В сб.: Динамика сплошной среды. Новосибирск, 1977, вып. 28, с. 118—129.
5. Хлуднев А. М. О разрешимости начально-краевых задач для одной слабо нелинейной системы.— Дифференц. уравнения, 1978, т. 14, № 11, с. 2026—2037.
6. Лионс Ж.-Л.— Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.— М.: Мир, 1972.— 587 с.

Институт гидродинамики СО АН СССР

Поступила в редакцию 24 января 1978 г.