А. А. Фонарёв, О решении одной нелинейной задачи Неймана, *Изв. вузов. Матем.*, 1982, номер 6, 60–62

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 6 (241)

А. А. Фонарёв УДК 517.988 : 519.632

О РЕШЕНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА

Рассматривается ИП (итерационный процесс), сходящийся к решению нелинейной задачи Неймана

$$\begin{cases} \mathscr{L}u \equiv -\operatorname{div}(k(x)\nabla u) = f(x,\ u,\ D^\alpha u),\ x \in Q; \\ \partial u/\partial n = 0,\ x \in \partial Q, \end{cases} \tag{1}$$

где Q — ограниченная область в l-мерном евклидовом пространстве R_l с границей $\partial Q \in C^2$, вещественнозначная функция $k(x) \in C^1(\overline{Q})$, $k(x) \geqslant k_0 > 0$ для всех $x \in Q$, α — мультииндекс, $1 \leqslant |\alpha| \leqslant 2$ (здесь и далее используются обозначения из [1]). Далее, для задачи (1) рассматриваются ПМ (проекционный метод) и ПИП (проекционно-итерационный процесс).

Предположим, что функция $f(x, u, \xi): Q \times R_1 \times R_m \to R_1$, где $0 \leqslant m \leqslant l(l+3)/2$, удовлетворяет условиям: 1) $f(x, u, \xi)$ непрерывна по совокупности переменных $(u, \xi) \in R_1 \times R_m$ почти при каждом фиксированном $x \in Q$ и измерима в Q по x при любых фиксированных $(u, \xi) \in R_1 \times R_m$; 2) $f(x, 0, 0) \in L_2(Q)$; 3) $|f(x, u, \xi) - f(x, v, \eta)| \leqslant L(|u-v|^2 + |\xi - \eta|^2)^{1/2}$ для всех $x \in Q$, (u, ξ), $(v, \eta) \in R_1 \times R_m$ (L — константа); 4) $f(x, u, \xi)$ имеет частную производную по u, т. е. $f'_u(x, u, \xi)$, и $f'_u(x, u, \xi) \geqslant a(x)$ для всех $x \in Q$, $(u, \xi) \in R_1 \times R_m$, причем $\int a(x)\,dx \equiv \gamma^{-1} > 0$ (здесь и далее интегралы рассматриваются по всей области Q).

Введем вещественные пространства: $X = \{u \in H^2(Q): \partial u/\partial n = 0,\ x \in \partial Q\}$, $\|u\|_{H^2(Q)} = \Big(\sum\limits_{|\alpha| \leqslant 2} \int |D^\alpha u|^2\,dx\Big)^{1/2}$ для $u \in X$, $Y = L_2(Q)$, $\|y\|_{L_2(Q)} = \Big(\int |y|^2\,dx\Big)^{1/2}$ для $y \in Y$, $X_1 = \Big\{u \in X: \int u\,dx = 0\Big\}$, $Y_1 = \Big\{y \in Y: \int y\,dx = 0\Big\}$, $X_2 = Y_2 = \{\mathrm{const}\}$. Пространства X и Y являются прямыми суммами ортогональных подпространств X_1, X_2 и Y_1, Y_2, соответственно, при этом для $u \in X$ имеем $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in X_1$, $u_2 \in X_2$, $u_2 = \mu^{-1} \int u(x)\,dx$ (здесь и далее μ — объем Q), $\|u\|^2_{H^2(Q)} = \|u_1\|^2_{H^2(Q)} + \mu |u_2|^2$, а для $y \in Y$ имеем $y = y_1 + y_2$, где $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$, $y_2 = \mu^{-1} \int y(x)\,dx$, $\|y\|^2_{L_2(Q)} = \|y_1\|^2_{L_2(Q)} + \mu |y_2|^2$.

Запишем задачу (1) в операторном виде

$$Au = F(u), \tag{2}$$

где $A: X \to Y$ — линейный и $F: X \to Y$ — нелинейный операторы, $Au = \mathscr{L}u$ и $F(u) = f(x, u, D^\alpha u)$ для $u \in X$ (из условий 1) — 3) в силу необходимого и достаточного условия действия и непрерывности оператора Немыцкого в пространствах Лебега (см. [2], теорема 19.2) вытекает, что $F(u) \in Y$ для $u \in X$). Так как уравнение $Bu = y$, где $B: X_1 \to Y_1$ — сужение оператора A на X_1, при каждом $y \in Y_1$ однозначно разрешимо в X_1, причем для решения $u \in X_1$ имеет место оценка $\|u\|_{H^2(Q)} \leqslant \beta \|y\|_{L_2(Q)}$, где $\beta > 0$ — некоторая константа (см. [1], [3]), то уравнение (2) эквивалентно уравнению

$$(u_1,\ u_2) = \Phi(u_1,\ u_2), \tag{3}$$

где $\Phi(u_1, u_2)$ — отображение из банахова пространства $X_1 \times X_2$ (с нормой $\|(u_1, u_2)\| = (\|u_1\|^2_{H^2(Q)} + \mu |u_2|^2)^{1/2}$ для $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$) в $X_1 \times X_2$; $\Phi(u_1, u_2) = (B^{-1}(F(u) - \mu^{-1}\psi(u)),\ u_2 - \theta\psi(u))$, $\psi(u) = \int f(x,\ u(x),\ D^\alpha u(x))\,dx$, $u = u_1 + u_2$ для $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$, параметр $\theta > 0$. Действительно, если $u \in X$ есть решение уравнения (2), то $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$, где $u_1 + u_2 = u$ есть решение уравнения (3). И наоборот, если $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$ есть решение уравнения (3), то $u_1 + u_2 = u \in X$ есть решение уравнения (2).

Зафиксируем (u_1, u_2), $(v_1, v_2) \in X_1 \times X_2$ (далее, $u = u_1 + u_2$, $v = v_1 + v_2$). Из $\|B^{-1}(F(u) - F(v) - \mu^{-1}(\psi(u) - \psi(v)))\|^2_{H^2(Q)} \leqslant \beta^2(\|F(u) - F(v)\|^2_{L_2(Q)} - \mu^{-1}(\psi(u) - \psi(v))^2)$, $\|F(u) - F(v)\|_{L_2(Q)} \leqslant L\|(u_1, u_2) - (v_1, v_2)\|$, $\psi(u) - \psi(v) = \psi(u_1 + v_2) - \psi(v) + \int f'_u(x, u_1 + v_2 + \tau(u_2 - v_2), D^\alpha u_1)(u_2 - v_2)\,dx$ ($\tau = \tau(x) \in (0, 1)$, здесь рассматривалась разность $\psi(u) - \psi(u_1 + v_2)$ и применялась формула Лагранжа), $|\psi(u_1 + v_2) - \psi(v)| \leqslant L\mu^{1/2}\|u_1 - v_1\|_{H^2(Q)}$, $(u_2 - v_2 - \theta(\psi(u) - \psi(v)))^2 = (u_2 - v_2)^2 - 2\theta(\psi(u) - \psi(v))(u_2 - v_2) + \theta^2(\psi(u) - \psi(v))^2$ вытекает, что $\|\Phi(u_1, u_2) - \Phi(v_1, v_2)\|^2 \leqslant \beta^2 L^2\|(u_1, u_2) - (v_1, v_2)\|^2 + (\mu\theta^2 - \mu^{-1}\beta^2)(\psi(u) - \psi(v))^2 + \mu(1 - 2\theta\gamma^{-1})|u_2 - v_2|^2 + 2\theta\mu^{3/2}L|u_2 - v_2|\|u_1 - v_1\|_{H^2(Q)}$. Следовательно, при $0 < \theta \leqslant \beta/\mu$, учитывая неравенство $2\mu^{1/2}|u_2 - v_2|\|u_1 - v_1\|_{H^2(Q)} \leqslant \|u_1 - v_1\|^2_{H^2(Q)} + \mu|u_2 - v_2|^2$, имеем $\|\Phi(u_1, u_2) - \Phi(v_1, v_2)\|^2 \leqslant S\|u_1 - v_1\|^2_{H^2(Q)} + \mu p(\theta)|u_2 - v_2|^2$, где $S = \beta L(1 + \beta L)$ и $p(\theta) = S + 1 - 2\theta\gamma^{-1}$, т. е. $\|\Phi(u_1, u_2) - \Phi(v_1, v_2)\|^2 \leqslant q^2\|(u_1, u_2) - (v_1, v_2)\|^2$, где $q^2 = \max(S, p(\theta))$. Далее, при $M < 2$, где $M = L\mu\gamma(1 + \beta L)$, для $\theta \in (c, \beta/\mu]$, где $c = \gamma S/2$, имеем $p(\theta) < 1$. Если же $\mu\gamma \leqslant 2\beta$, то $p(\theta) \leqslant S$.

Лемма 1. *Пусть*: 1) $S < 1$; 2) *либо* $M < 2$ *и* $\theta \in (c, \beta/\mu]$, *либо* $\mu\gamma \leqslant 2\beta$ *и* $\theta \in [\gamma/2, \beta/\mu]$. *Тогда отображение* $\Phi(u_1, u_2)$ *удовлетворяет условию Липшица с постоянной* $q \in (0, 1)$, *равной либо* $(\max(S, p(\theta)))^{1/2}$, *либо* $S^{1/2}$ (*в соответствии с условием* 2 *леммы*).

Из принципа Каччопполи—Банаха (см. [4], с. 605—606) вытекает

Теорема 1. *Пусть выполнены условия леммы* 1. *Тогда задача* (1) *имеет единственное решение* $z \in X$ *и при любом* $(u_1^1, u_2^1) \in X_1 \times X_2$ *для ИП* $(u_1^{i+1}, u_2^{i+1}) = \Phi(u_1^i, u_2^i)$ *имеем* $\|u_1^i + u_2^i - z\|_{H^2(Q)} \leqslant q^{i-1}(1-q)^{-1}\|(u_1^2, u_2^2) - (u_1^1, u_2^1)\|$ $(i = 1, 2, \dots)$ *с* q *из заключения леммы* 1.

Отметим, что теорема 1 значительно отличается от теоремы 5 из [5].

Рассмотрим для оператора B последовательность собственных значений $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots, \lambda_n \to \infty$ $(n \to \infty)$, и соответствующую последовательность собственных функций $\{w_n(x)\}$, ортонормированную и полную в Y_1 (см. [1], [3]). Введем операторы P_n ортогонального проектирования Y_1 на Y_1^n (Y_1^n — подпространство Y_1, натянутое на $w_1(x), \dots, w_n(x)$), т. е.

$$P_n w = \sum_{i=1}^{n} \left(\int w(x)\, w_i(x)\, dx \right) w_i(x)$$

для $w \in Y_1$ $(n = 1, 2, \dots)$. Отметим, что для $w \in Y_1$ последовательность $\{B^{-1}P_n w\}$ сходится к $B^{-1}w$ в X_1 и $B^{-1}P_n w = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{-1}\left(\int w(x)\, w_i(x)\, dx\right) w_i(x)$ при $n = 1, 2, \dots$

Зафиксируем n и рассмотрим уравнение

$$(u_1, u_2) = \Phi_n(u_1, u_2) \quad ((u_1, u_2) \in X_1^n \times X_2), \tag{4}$$

где $X_1^n \times X_2$ — подпространство $X_1 \times X_2$, $X_1^n = B^{-1}(Y_1^n)$, $\Phi_n(u_1, u_2) : X_1 \times X_2 \to X_1^n \times X_2$, $\Phi_n(u_1, u_2) = (B^{-1}P_n(F(u) - \mu^{-1}\psi(u)),\ u_2 - \theta\psi(u))$, $u = u_1 + u_2$ для $(u_1, u_2) \in X_1 \times X_2$. Показывается так же, как для оператора $\Phi(u_1, u_2)$, что для оператора $\Phi_n(u_1, u_2)$, справедлива лемма 1, ибо $\|P_n\| = 1$.

Предположим, далее, что выполнены условия леммы 1, и будем использовать число q из заключения леммы 1. Тогда уравнение (4) имеет единственное решение $(u_1^n, u_2^n) \in X_1^n \times X_2$ для каждого n.

Для решения $z \in X$ задачи (1) рассмотрим последовательность $(z_1^n, z_2) \in X_1^n \times X_2$ $(n = 1, 2, \dots)$ такую, что $z_2 \in X_2$ и $z - z_2 \in X_1$, $z_1^n = B^{-1}P_n F(z)$ для $n = 1, 2, \dots$ $(\psi(z) = 0)$. Из $\|(u_1^n, u_2^n) - (z_1^n, z_2)\| \leqslant q\|u_1^n + u_2^n - z\|_{H^2(Q)}$ вытекает, что $\|(u_1^n, u_2^n) - (z_1^n, z_2)\| \leqslant q(1 - q)^{-1}\|z_1^n + z_2 - z\|_{H^2(Q)}$ для $n = 1, 2, \dots$ Значит, $u_1^n + u_2^n$ сходится к z в X, ибо z_1^n сходится к $z - z_2$ в X_1 $(n \to \infty)$.

Теорема 2 (о ПМ). *Для каждого n уравнение* (4) *имеет единственное решение* $(u_1^n, u_2^n) \in X_1^n \times X_2$ *и* $\|u_1^n + u_2^n - z\|_{H^2(Q)} \to 0$ *при* $n \to \infty$, *где* $z \in X$ — *решение задачи* (1); *при фиксированном n для любого* $(v_1^1, v_2^1) \in X_1^n \times X_2$ *при* $(v_1^{i+1}, v_2^{i+1}) = \Phi_n(v_1^i, v_2^i)$ *имеем* $\|(v_1^i, v_2^i) - (u_1^n, u_2^n)\| \leqslant q^{i-1}(1-q)^{-1}\|(v_1^2, v_2^2) - (v_1^1, v_2^1)\|$ *для* $i = 1, 2, \ldots$

Из теоремы 2 и [6], с. 107 вытекает

Теорема 3. *При любом* $(y_1^1, y_2^1) \in X_1^1 \times X_2$ *для ПИП* $(y_1^{i+1}, y_2^{i+1}) = \Phi_{i+1}(y_1^i, y_2^i)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ *имеем* $\|y_1^i + y_2^i - z\|_{H^2(Q)} \to 0$ *при* $i \to \infty$, *где* $z \in X$ — *решение задачи* (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных.— М. 1976.— 392 с.
2. Вайнберг М. М. Вариационные методы исследования нелинейных операторов.— М., 1956.—344 с.
3. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных.— М., 1977.— 432 с.
4. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.— 2-е изд.— М., 1977.— 744 с.
5. Фам Ки Ань. Об одном приближенном методе решения квазилинейных операторных уравнений.— ДАН СССР, 1980, т. 250, № 2, с. 291—295.
6. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.— М., 1978.—336 с.

г. Москва

Поступила
27 X 1980