Л. А. Аксентьев, Связь внешней обратной краевой задачи с внутренним радиусом области,
Изв. вузов. Матем., 1984, номер 2, 3–11

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1984 МАТЕМАТИКА № 2 (261)

Л. А. Аксентьев УДК 517.544

СВЯЗЬ ВНЕШНЕЙ ОБРАТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ВНУТРЕННИМ РАДИУСОМ ОБЛАСТИ

Структура статьи такова. В первом параграфе приведены сведения о внутреннем радиусе плоской области и выведено необходимое условие экстремума внутреннего радиуса. Во втором параграфе разрешимость внешней обратной краевой задачи для аналитических функций сведена к отысканию экстремальной точки внутреннего радиуса некоторой области и доказаны три теоремы о единственности решения обратной краевой задачи в односвязном случае. В параграфе 3 описываются подходы к разрешимости внешней обратной краевой задачи в многосвязном случае.

§ 1. Внутренний радиус области и его экстремумы

Под внутренним (конформным) радиусом односвязной области D в точке $z_0 \in D$ понимается радиус $R(D, z_0)$ круга, на который отображает область D (на плоскости z) регулярная функция $\zeta = \varphi(z)$ с нормировкой $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$ ([1], с. 32). Внутренний радиус определяется через единственную отображающую (на круг $|\Phi| < 1$) функцию $\Phi(z)$ из теоремы Римана с нормировкой: $\Phi(z_0) = 0$, $\arg \Phi'(z_0) = 0$. Именно, $\varphi(z) = \Phi(z)[\Phi'(z_0)]^{-1}$, $|\Phi| < 1 \to$ $\to |\varphi| < |\Phi'(z_0)|^{-1}$ и $R(D, z_0) = |\Phi'(z_0)|^{-1}$.

Если рассмотреть функцию $z = G(\zeta)$, обратную к функции $\zeta = \Phi(z)$ и регулярную в единичном круге $E = \{\zeta : |\zeta| < 1\}$, то $G'(0)\Phi'(z_0) = 1$ и поэтому

$$R(D, z_0) = |G'(0)|. \tag{1}$$

В формуле (1) предполагается, что $\zeta = 0$ переходит в точку $z = z_0$. На основе этого равенства можно сосчитать значение внутреннего радиуса в любой точке области $D = f(E)$, которая является образом круга E при отображении регулярной функцией $f(\zeta)$. Для этого нужно принять $G(\zeta) = f((\zeta + \zeta_0)/(1 + \bar{\zeta}_0\zeta))$, причем $G(0) = f(\zeta_0)$, и убедиться в том, что $G'(0) = f'(\zeta_0)(1 - |\zeta_0|^2)$. Взяв модуль найденной величины и отбросив индекс у ζ_0, получим из (1)

$$R(D, z) = R(f(E), f(\zeta)) = |f'(\zeta)|(1 - |\zeta|^2). \tag{2}$$

Если положить здесь $\zeta = 0$, то формула (2) перейдет в (1).

Необходимым условием экстремума радиуса $R(D, f(\zeta))$ как функции двух переменных ξ и η ($\xi + i\eta = \zeta$) является система двух вещественных уравнений $\partial R/\partial \xi = 0$, $\partial R/\partial \eta = 0$. Эту систему можно переписать в комплексной форме

$$\partial R/\partial \zeta = (1/2)(\partial R/\partial \xi - i\partial R/\partial \eta) = 0, \tag{3}$$

причем слева стоит формальная частная производная функции $R(\zeta, \bar{\zeta})$ (обозначение функции сохраняем). Поскольку $f'(\zeta) \neq 0$ в силу локальной однолистности отображения $f(\zeta)$, то условие (3) будет эквивалентно равенству

$$0 = 2(\partial R/\partial \zeta)/R = (\partial/\partial \zeta)\ln R^2 = (\partial/\partial \zeta)\,\Omega, \tag{4}$$

где $\Omega(\zeta, \bar{\zeta}) = \ln R^2(\zeta, \bar{\zeta})$.

С помощью представления $\Omega(\zeta, \bar{\zeta}) = \ln f'(\zeta) + \ln \overline{f'(\zeta)} + 2\ln(1 - \zeta\bar{\zeta})$, следующего из (2), получим уравнение $f''(\zeta)/f'(\zeta) - 2\bar{\zeta}(1 - |\zeta|^2)^{-1} = 0$, которое запишем в виде

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1 - |\zeta|^2). \tag{5}$$

(Легко прослеживается и обратный переход: (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3).)

Очевидно, уравнение (5) будет иметь хотя бы одно решение, потому что гладкая поверхность (построенная над кругом E), уравнение которой имеет вид $\Psi = R(\zeta, \bar\zeta)$, будет прикреплена к граничной окружности $|\zeta| = 1$ в виде „шапочки". Прикрепление к окружности будет гарантировано при условии

$$|f'(\zeta)|(1-|\zeta|^2) \underset{|\zeta|\to 1}{\to} 0. \tag{6}$$

Условие (6) наверняка выполнится для ограниченной производной $f'(\zeta)$, $\zeta \in E$, или при выполнении более общего условия $|f'(\zeta)| \leqslant M/(1-|\zeta|^2)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. Наиболее слабым условием, которое обеспечивает (6), является непрерывность $\operatorname{Re} f(\zeta)$ или $\operatorname{Im} f(\zeta)$ в замкнутом круге $\bar E$. Этот факт получается из результата М. З. Двейрина [2]:

$$|f'(\zeta)| \leqslant 2\omega[\operatorname{Re} f(\zeta), 1-|\zeta|]/(1-|\zeta|), \tag{7}$$

причем $\omega[u(\zeta), \varepsilon] = \sup\limits_{|\zeta_1-\zeta_2| \leqslant \varepsilon;\ \zeta_1, \zeta_2 \in E} |u(\zeta_1) - u(\zeta_2)|$. Кстати, как отметил С. Р. Насыров, постоянную 2 в неравенстве (7) можно заменить на постоянную $4/\pi$. Это видно из следующей схемы, в которой $\zeta_0 (\in E)$ — фиксированная точка, $\rho = 1 - |\zeta_0|$ — ее расстояние до окружности ∂E и $\zeta \in E$,

$$|\operatorname{Re}[f(\rho\zeta + \zeta_0) - f(\zeta_0)]| \leqslant \omega(\operatorname{Re} f, \rho) \Rightarrow f(\rho\zeta+\zeta_0) - f(\zeta_0) =$$
$$= (2\omega/\pi)\, i \ln[(1+\psi(\zeta))/(1-\psi(\zeta))]\ (\psi(0) = 0,$$
$$|\psi(\zeta)| \leqslant 1) \Rightarrow \rho|f'(\zeta_0)| \leqslant (4/\pi)\,\omega(\operatorname{Re} f, \rho).$$

В схеме используется функция $\psi(\zeta)$, отображающая E в E, к которой применяется лемма Шварца ($|\psi'(0)| \leqslant 1$). Если непрерывной в замкнутом круге $\bar E$ будет вся функция $f(\zeta)$, то соотношение (7) можно заменить неравенством

$$|f'(\zeta)| \leqslant \omega[f(\zeta), 1-|\zeta|]/(1-|\zeta|), \tag{7'}$$

которое доказывается по аналогичной схеме.

Если $\operatorname{Re} f(\zeta)$ или $\operatorname{Im} f(\zeta)$ являются разрывными на ∂E, то обеспечить (6), вообще говоря, нельзя.

Условие геометрического характера описано в статье Уолша [3]. Именно, если площадь образа круга E при отображении функцией $f(\zeta)$ является ограниченной, то предельное соотношение (6) будет выполняться.

В книге [4] приведены оценки внутренних радиусов для многих областей, указаны соотношения, в которых участвуют внутренние радиусы, и отмечены области, для которых максимальный внутренний радиус достигается в одной точке. В этой же книге описан результат Хиги [5] о внутреннем радиусе для выпуклой области: для любой выпуклой области, отличной от полосы, максимум внутреннего радиуса достигается в единственной точке.

§ 2. О единственной разрешимости уравнения Гахова

Внешняя обратная краевая задача в постановке Ф. Д. Гахова ([6], § 33; [7], § 3) имеет решение в виде

$$z(\zeta) = \int_a^\zeta f'(\zeta)\left(\frac{1-\bar\zeta_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta, \quad |\zeta| < 1, \tag{8}$$

причем a, $|a| < 1$, — комплексная постоянная, $f(\zeta)$ непрерывна в замкнутом круге $\bar E$, функция $\ln|z'(e^{i\theta})| = \ln|f'(e^{i\theta})| = p(\theta)$ выражается через исходные данные, ζ_0 является полюсом функции $z(\zeta)$. Для определения точки ζ_0 служит уравнение

$$0 = \text{выч}_{\zeta_0} z'(\zeta) = f''(\zeta_0)(1-|\zeta_0|^2)^2 - 2f'(\zeta_0)\bar\zeta_0(1-|\zeta_0|^2), \tag{5'}$$

которое после простого преобразования и отбрасывания индекса у ζ_0 запишется в виде (5). Уравнение (5) в теории обратных краевых задач называется уравнением Гахова. Единственность решения этого уравнения означает единственность решения обратной краевой задачи. Получению условий единственности в виде ограничений на функцию $p(\theta)$ посвящены несколько работ, список которых помещен в статье [8] и в обзорной работе [9]. Докажем новые утверждения.

Теорема 1. *Если область $f(E)$ обладает единственной критической точкой (экстремумом) внутреннего радиуса в $f(\zeta_0)$, то решение внешней обратной краевой задачи в форме* (8) *единственно.*

Доказательство. Поскольку единственность критической точки внутреннего радиуса означает единственность решения уравнения (5), то и равенство (5′) выполнится только в этой точке. Поэтому функция (8) будет однозначной только при этом значении ζ_0^*. При остальных значениях $\zeta_0 \neq \zeta_0^*$ получим $\operatorname{выч}_{\zeta_0} z'(\zeta) \neq 0$, и поэтому функция $z(\zeta)$ будет иметь в ζ_0 логарифмическую особенность вместе с полюсом. Итак, решение $z(\zeta)$ в виде (8) будет единственным.

Если взять решение в форме $Z(\zeta) = e^{i\alpha} z(\zeta) + c$ (с постоянными α и c), то для его единственности нужно потребовать нормировку, напр., $Z(a) = 0$, $Z'(a) > 0$.

Следствие. Если внутренний радиус области $\ln f'(E)$ в точке $\ln f'(\zeta)$ строго меньше $2|\zeta|$ при $\zeta \neq 0$, то решение внешней обратной краевой задачи в форме (8) единственно.

Следствие доказывается простым преобразованием неравенства для внутреннего радиуса области $\ln f'(E)$. Именно, при $\zeta \neq 0$

$$|[\ln f'(\zeta)]'|(1-|\zeta|^2) < 2|\zeta| \Leftrightarrow |f''(\zeta)/f'(\zeta)| < 2|\zeta|/(1-|\zeta|^2).$$

Поскольку будет выполняться правое неравенство, то поверхность внутреннего радиуса для области $f(E)$ не будет иметь экстремума при $\zeta \neq 0$. Тем самым установлена единственность экстремума для $R[f(E), f(\zeta)]$. Остается применить теорему 1.

Условия единственности решения внешней обратной краевой задачи или единственности экстремума внутреннего радиуса области $f(E)$ (см. (8)) можно подразделить на *внутренние условия* (по поведению функции $f(\zeta)$) и *внешние условия* (по поведению функции $z(\zeta)$ с представлением (8)). Внешние и внутренние условия можно переформулировать друг через друга, однако простота исходного условия геометрического или аналитического содержания может при этой переформулировке нарушиться. Случаи, когда такого нарушения не происходит, отмечены в теореме 3, приведенной ниже.

Некоторые внутренние условия описаны и доказаны в теореме 2, внешние условия—в теоремах 2′ и 3.

Теорема 2. *Если конечная область $f(E)$ является выпуклой, т. е. выполняется условие*

$$\operatorname{Re}[\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)] \geqslant -1,\ \zeta \in E, \tag{9}$$

или если справедливо более общее условие

$$\operatorname{Re}[e^{i\gamma}\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)] \geqslant -1,\ \zeta \in E \tag{10}$$

(при некоторой фиксированной вещественной постоянной γ, $e^{i\gamma} \neq 1$), но с дополнительным ограничением

$$f''(0) = 0, \tag{11}$$

то решение уравнения (5) *будет единственным.*

Доказательство. Утверждение теоремы при условии (9) совпадает с результатом Хиги [5], но будет доказано по-новому. Утверждение теоремы при условиях (10), (11) с $\gamma=\pi$ по существу совпадает с результатом С. Н. Кудряшова [10]. Достаточно убедиться в том, что функция $F(\zeta)=\int\limits_b^\zeta f'(1/\zeta)\,d\zeta$ будет давать выпуклое отображение внешности E^- единичного круга E. (Кстати, и обоснование условий (10), (11) можно провести с помощью одной из двух вспомогательных функций $\int\limits_{a^{\pm 1}}^\zeta [f'(t^{\pm 1})]^{\pm(\alpha+i\beta)}\,dt$ (при $\alpha+i\beta=e^{i\gamma}$), которая будет удовлетворять условию выпуклости, когда $\zeta\in E^{\pm}$.)

Начнем доказательство с условия (9). Обозначим через ζ_0 решение уравнения (5). Предположим, что существует еще одно решение ζ_1 того же уравнения. Это предположение приведет к противоречию, которое сейчас получим.

Образуем функцию $f((\zeta+\zeta_0)/(1+\bar\zeta_0\zeta))=\varphi(\zeta)$ и сосчитаем ее производную по ζ и логарифмическую производную от первой производной. Будем иметь

$$\ln\varphi'(\zeta)=\ln f'((\zeta+\zeta_0)/(1+\bar\zeta_0\zeta))+\ln(1-|\zeta_0|^2)/(1+\bar\zeta_0\zeta)^2$$

и

$$\frac{\varphi''(\zeta)}{\varphi'(\zeta)}=\left(\frac{f''}{f'}\circ\frac{\zeta+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0\zeta}\right)\frac{1-|\zeta_0|^2}{(1+\bar\zeta_0\zeta)^2}-\frac{2\bar\zeta_0}{1+\bar\zeta_0\zeta}. \tag{12}$$

После подстановки $\zeta=\zeta_2\equiv(\zeta_1-\zeta_0)/(1-\bar\zeta_0\zeta_1)$ (и поэтому $\zeta_1=(\zeta_2+\zeta_0)/(1+\bar\zeta_0\zeta_2)$) запишем (12) с учетом тождества, которое получается из (5) при $\zeta=\zeta_1$. После выполнения несложных преобразований с использованием равенства $1-|\zeta_1|^2=(1-|\zeta_0|^2)(1-|\zeta_2|^2)/[(1+\bar\zeta_0\zeta_2)(1+\zeta_0\bar\zeta_2)]$ получим

$$\frac{\varphi''(\zeta_2)}{\varphi'(\zeta_2)}=\frac{2\bar\zeta_1}{1-|\zeta_1|^2}\,\frac{1-|\zeta_0|^2}{(1+\bar\zeta_0\zeta_2)^2}-\frac{2\bar\zeta_0}{1+\bar\zeta_0\zeta_2}=2\left[\frac{\bar\zeta_2+\bar\zeta_0}{(1-|\zeta_2|^2)(1+\bar\zeta_0\zeta_2)}-\frac{\bar\zeta_0}{1+\bar\zeta_0\zeta_2}\right]=$$
$$=2\bar\zeta_2/(1-|\zeta_2|^2).$$

Итак, мы показали, что

$$f''(\zeta_1)/f'(\zeta_1)=2\bar\zeta_1/(1-|\zeta_1|^2)\Rightarrow\varphi''(\zeta_2)/\varphi'(\zeta_2)=2\bar\zeta_2/(1-|\zeta_2|^2) \tag{13}$$

при $\zeta_2=(\zeta_1-\zeta_0)/(1-\bar\zeta_0\zeta_1)\in E$.

Если в (12) положить $\zeta=0$, то сразу же получим

$$f''(\zeta_0)/f'(\zeta_0)=2\bar\zeta_0/(1-|\zeta_0|^2)\Rightarrow\varphi''(0)=0. \tag{14}$$

Переходы (13) и (14) можно обосновать еще другим способом. Осуществим этот способ для функции $z(\zeta)$ с полюсом порядка $n+1$ в точке ζ_0 у ее производной $z'(\zeta)$. Именно, покажем, что справедлива эквивалентность

$$\text{выч}_{\zeta_1}\left[f'(\zeta)\left(\frac{1-\bar\zeta_1\zeta}{\zeta-\zeta_1}\right)^{n+1}\right]=0\Longleftrightarrow\text{выч}_{\zeta_2}\left[\varphi'(\zeta)\left(\frac{1-\bar\zeta_2\zeta}{\zeta-\zeta_2}\right)^{n+1}\right]=0, \tag{15}$$

где все обозначения имеют прежний смысл.

В силу левого равенства из (15) получим, что функция $\int\limits_a^\zeta f'(t)\left(\frac{1-\bar\zeta_1 t}{t-\zeta_1}\right)^{n+1}dt$ не будет иметь логарифмической особенности. Поэтому логарифмической особенности не будет и у представления

$$\int\limits_a^{T(\zeta)} f'(t)\left(\frac{1-\bar\zeta_1 t}{t-\zeta_1}\right)^{n+1}dt,\quad T(\zeta)=\frac{\zeta+\zeta_0}{1+\bar\zeta_0\zeta},$$

которое после замены $t=T(\tau)$ приводится к виду

$$\int\limits_{T^{-1}(a)}^{\zeta} f'[T(\tau)]\left(\frac{1-\bar{\zeta}_1 T(\tau)}{T(\tau)-\zeta_1}\right)^{n+1} T'(\tau)\,d\tau = C\int\limits_{T^{-1}(a)}^{\zeta} f'[T(\tau)]\,T'(\tau)\left(\frac{1-\bar{\zeta}_2\tau}{\tau-\zeta_2}\right)^{n+1} d\tau,$$

причем $C=[-(1-\zeta_0\bar{\zeta}_1)/(1-\bar{\zeta}_0\zeta_1)]^{n+1}$. Условием отсутствия логарифмической особенности у последнего интегрального представления будет правая часть соотношения (15), т. к. $\varphi'(\zeta)=\{f[T(\zeta)]\}'=f'[T(\zeta)]\,T'(\zeta)$.

Повторяя рассуждения в обратную сторону, получим справедливость перехода в (15) от правого равенства к левому.

Продолжим доказательство теоремы. Так как функция $\varphi(\zeta)=f((\zeta+\zeta_0)/(1+\bar{\zeta}_0\zeta))$ представляет суперпозицию выпуклого отображения (в силу (9)) и отображения круга на круг, то она будет выпуклой функцией, т. е. $\operatorname{Re}[\zeta\varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)]\geqslant -1$. Это условие равносильно такому подчинению:

$$\zeta\varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)\prec P_0(\zeta), \tag{16}$$

где $P_0(\zeta)=2\zeta/(1-\zeta)$ отображает круг E на полуплоскость $\operatorname{Re} w\geqslant -1$. Из (16) получим равенство $\zeta\varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)=P_0[\psi(\zeta)]$, в котором $|\psi(\zeta)|\leqslant 1$ и $\psi(\zeta)=a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\ldots$ в силу (14). Теперь с использованием леммы Шварца будем иметь

$$|\zeta\varphi''(\zeta)/\varphi'(\zeta)|\leqslant 2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2). \tag{17}$$

Знак равенства в (17) достигается при $\zeta=0$ (что соответствует уравнению (14)) и при $\psi(\zeta)=e^{i\delta}\zeta^2$ с вещественной постоянной δ, что нужно отбросить (в силу конечности $f(E)$), т. к. в этом случае $f(\zeta)$ будет давать отображение на полосу. Поэтому в точке ζ_2 будем иметь строгое неравенство $|\varphi''(\zeta_2)/\varphi'(\zeta_2)|< 2|\zeta_2|/(1-|\zeta_2|^2)$, которое противоречит равенству (13). Значит, второго решения уравнения (5) не существует.

Рассмотрим теперь случай условия (10) с $\gamma\neq 0$. В этом случае мы предполагаем, что выполняется (11), т. е. корнем уравнения (5) является $\zeta_0=0$. Докажем, что других решений у уравнения (5) не будет. Действительно, условие (10) означает, что $e^{i\gamma}\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)=P_0[\psi(\zeta)]$, где, как и раньше, $P_0(\zeta)=2\zeta/(1-\zeta)$, а $|\psi(\zeta)|\leqslant 1$ и $\psi(\zeta)=a_2\zeta^2+a_3\zeta^3+\ldots$ Так же, как получено неравенство (15), докажем, что

$$|e^{i\gamma}\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)|<2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2), \tag{18}$$

за исключением $\zeta=0$ и $\psi(\zeta)=e^{i\delta}\zeta^2$. Неравенство (18), переписанное в виде $|f''(\zeta)/f'(\zeta)|<2|\zeta|/(1-|\zeta|^2)$, показывает, что второго корня у уравнения (5) не существует.

Тесно связано с теоремой 2 следующее утверждение, в котором излагаются внешние условия единственности решения внешней обратной краевой задачи.

Т е о р е м а 2'. *Если дополнение к области $z(E)$, полученной при отображении круга E функцией* (8), *является выпуклым множеством, т. е.*

$$\operatorname{Re}[\zeta z''(\zeta)/z'(\zeta)]\leqslant -1,\ |\zeta_0|<|\zeta|<1, \tag{19}$$

или если справедливо условие (*при* $\zeta_0=0$):

$$\operatorname{Re}[e^{i\gamma}\zeta z''(\zeta)/z'(\zeta)]\leqslant -2\cos\gamma+1,\ \zeta\in E, \tag{20}$$

с вещественной постоянной $\gamma\neq 0$, $|\gamma|<\pi/2$, *но с дополнительным ограничением*

$$\lim_{\zeta\to 0}[z'(\zeta)\,\zeta^2]'=0, \tag{21}$$

то решение уравнения (5) *единственно.*

Доказательство. Обоснование теоремы с условием выпуклости (19) при $\zeta_0=0$ принадлежит С. Н. Кудряшову [10]. Общий случай с $\zeta_0\neq 0$ приводится к случаю с $\zeta_0=0$ преобразованием $T(\zeta)=(\zeta+\zeta_0)/(1+\bar\zeta_0\zeta)$, т. к. функция $z[T(\zeta)]$ выпукла вместе с функцией $z(\zeta)$, а разложение $z(\zeta)=c_{-1}/(\zeta-\zeta_0)+c_0+c_1(\zeta-\zeta_0)+\ldots$ влечет разложение $z[T(\zeta)]=$ $=c_{-1}(1-|\zeta_0|^2)^{-1}/\zeta+c_0'+c_1'\zeta+\ldots$ с полюсом первого порядка при $\zeta=0$.

Для доказательства второй части теоремы 2′ запишем на основании представления

$$z(\zeta)=\int\limits_a^\zeta f'(\zeta)/\zeta^2 d\zeta$$

равенство $\mathrm{Re}\,[e^{i\gamma}\zeta z''(\zeta)/z'(\zeta)]=\mathrm{Re}\,[e^{i\gamma}\zeta f''(\zeta)/f'(\zeta)]-2\cos\gamma$. Из него, применяя (20), будем иметь неравенство (10) (с $\gamma+\pi$ вместо γ) из теоремы 2. Так как к тому же условие (21) совпадает с условием (11), то применение теоремы 2 завершает доказательство.

Теорему 2′ можно переформулировать с использованием области $E^-=\{\zeta:|\zeta|>1\}$, заменив (8) функцией

$$F(\zeta)=-e^{i\sigma}\int\limits_b^\zeta g'(\zeta)\left(\frac{1-\bar\zeta_0\zeta}{\zeta-\zeta_0}\right)^2 d\zeta,\ |\zeta|>1,\ |b|>1,\ |\zeta_0|>1, \tag{22}$$

где $\sigma=4\arg\zeta_0$, $g(\zeta)=f(1/\zeta)$ — регулярная функция в E^-. Тогда условия теоремы 2 заменятся следующими: $\mathrm{Re}\,[\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)]\geqslant -1$, $1<|\zeta|<|\zeta_0|$, либо $\mathrm{Re}\,[e^{i\gamma}\zeta F''(\zeta)/F'(\zeta)]\geqslant -1$ при $\zeta_0=\infty$ и $e^{i\gamma}\neq 1$.

С использованием оценок для подчиненных функций в применении к (22) (с $\zeta_0=\infty$ и $\arg\zeta_0=0$) обобщим утверждения, выраженные в следствии 2 из [8]. Именно, справедлива

Теорема 3. *Если функция* $F'(\zeta)\doteq -dz(1/\zeta)/d\zeta=df(1/\zeta)/d(1/\zeta)\equiv f'(1/\zeta)$ *удовлетворяет условию подчинения*

$$F'(\zeta)\prec[F_0'(\zeta;\ a,\ b)]_{\sqrt{\zeta}}^{\alpha+i\beta}, \tag{23}$$

причем $w=F_0'(\sqrt{\zeta};\ a,\ b)$, $F_0'(\infty;\ a,\ b)=1$, *отображает* E^- *на круг* $|w-(a+b)|<a\ (a\geqslant 1,\ 0\leqslant b<1)$, *то соответствующая внешняя обратная краевая задача будет иметь единственное решение, если выполняется такое равенство*:

$$|\alpha+i\beta|(2a+b-1)(1-b)/a=1. \tag{24}$$

Доказательство теоремы 3 основано на применении теоремы 1 из [8] (связанной с результатами [11]) и на оценке

$$A(\psi)\equiv(1-|\psi|)/|(a-2ab+b-b^2)(1-a-b)\psi^2+$$
$$+a(1-2ab-b^2)\psi+a^2|\leqslant A(0)=1/a^2,\ |\psi|\leqslant 1.$$

Эта оценка получается обычным исследованием функции $A(\psi)$ на экстремум и используется в итоговом неравенстве

$$\left|\frac{1}{\zeta}\frac{F''(1/\zeta)}{F'(1/\zeta)}\right|\leqslant|\alpha+i\beta|(2a+b-1)(1-b)a\frac{2|\zeta|^2}{1-|\zeta|^2}\frac{1+|\psi|}{1+|\zeta|^2}A(\psi)\leqslant 2|\zeta|^2/(1-|\zeta|^2).$$

В качестве частных случаев из (23) получаются условия, отмеченные в [8] (с. 324—325). Например, при $a=4/3$, $b=1/3$, $\alpha=1$, $\beta=0$ имеем условие $|3F'-5|\leqslant 4$, которое эквивалентно неравенству $|F'(\zeta)-1|\,|F'(\zeta)+1|^{-1}\leqslant 1/2$; при $a=\infty$, $b=1/2$, $\alpha=1$, $\beta=0$ получается условие $\mathrm{Re}\,F'(\zeta)\geqslant 1/2$.

Приведем еще два следствия из теоремы 3:

$$|F'(\zeta)-1| \leqslant 1 \quad (a=1,\ b=0,\ \alpha=1,\ \beta=0) \quad [12],$$

$$|\arg F'(\zeta)| \leqslant \pi/4 \, (a=\infty,\ b=0,\ \alpha=1/2,\ \beta=0) \quad [8].$$

Отметим, что в силу равенства $F'(\zeta)=f'(1/\zeta)$ внутренние условия, связанные с функцией $f'(\zeta)$, переписываются автоматически из внешних условий для $F'(\zeta)$. Так условие единственности (23) запишется в виде

$$f'(\zeta) \prec [f_0'(\zeta;\ a,\ b)]^{\alpha+i\beta}_{\sqrt{\zeta}},\ \zeta\in E,$$

где $w=f_0'(\sqrt{\zeta};\ a,\ b)$, $f_0'(0;\ a,\ b)=1$, — регулярная функция, отображающая круг E на круг $|w-(a+b)|<a$, причем параметры связаны равенством (24).

Интересно, что при одинаковых условиях на $f'(\zeta)$ и $F'(\zeta)$ геометрические свойства областей $f(E)$ и $F(E^-)$, как правило, будут существенно различными.

Приведем некоторые геометрически наглядные факты, которые являются внутренними условиями отрицательного характера. Например, во всем классе звездных или спиральных функций $f(\zeta)$ нельзя добиться единственности экстремума внутреннего радиуса области $f(E)$. Легко привести примеры звездных, спиральных и почти выпуклых функций, когда у соответствующей поверхности внутреннего радиуса имеются несколько критических точек[1]. Правда, существуют также примеры функций с „плохими“ геометрическими качествами и примеры неоднолистных функций ($f(\zeta)=e^{\delta\zeta}$, $\delta>\pi$) с единственным экстремумом внутреннего радиуса у $f(E)$.

Замечание 1. На основании отмеченной связи между критическими точками внутреннего радиуса области $f(E)$ и единственностью решения внешней обратной краевой задачи все факты о единственности экстремума внутреннего радиуса можно переформулировать в терминах обратных краевых задач, и наоборот, факты о единственности решения внешней обратной краевой задачи сформулировать в терминах внутреннего радиуса. Так любое из условий $\operatorname{Re} f'(\zeta)>1/2$ или $|f'(\zeta)-1|\leqslant 1$ определяет класс функций $f(\zeta)$, для каждой из которых область $f(E)$ имеет единственную точку экстремума внутреннего радиуса.

Замечание 2. Существование решения уравнения (5) следует из того, что решение определяет точку, над которой имеется экстремум поверхности $\Psi=R(\zeta,\ \bar{\zeta})$. Конечно, существование решения уравнения (5) можно вывести и из поведения поверхности $\Omega=\Omega(\zeta,\ \bar{\zeta})$, как это принято при изложении теории внешней обратной краевой задачи. Однако поведение поверхности $\Psi=R(\zeta,\ \bar{\zeta})$, которая прикреплена к окружности $|\zeta|=1$ и имеет форму „шапочки“, более наглядно, чем поведение поверхности $\Omega=\Omega(\zeta,\ \bar{\zeta})$, для которой нужно рассматривать асимптотический цилиндр, т. к. $\lim\limits_{|\zeta|\to 1}\Omega(\zeta,\ \bar{\zeta})=-\infty$ при выполнении (6).

---

[1] Примечание при корректуре. Недавно Ю. Е. Хохлов и С. Р. Насыров доказали единственность решения внешней обратной краевой задачи в классах звездных и спиральных функций $F(\zeta)$, $\zeta\in E^-$. С. Р. Насыров получил в этих классах экстремальные функции, на которых не выполняется теорема единственности. Одно семейство таких функций $F(\zeta)=\zeta(1+1/\zeta)^{1+\alpha}(1-1/\zeta)^{1-\alpha}$, $\zeta\in E^-$, $0<\alpha<1$, с корнями уравнения Гахова в точках $\zeta_0=\infty$ и $\zeta_1=1/\alpha$ опровергает утверждение из статьи [12] о том, что существует такое число $\rho_0\approx 2{,}6$, что уравнение Гахова для любой функции из класса Σ не будет иметь корней в области $|\zeta|>\rho_0$, кроме $\zeta_0=\infty$. Собственно, необоснованность этого утверждения видна уже из оценок, полученных Ф. Г. Авхадиевым для эллиптических интегралов в его диссертации „Некоторые достаточные условия однолистности и их применение к обратным краевым задачам“ (Казань, 1972).

§ 3. Случай многосвязной области

Предварительное исследование внешней обратной краевой задачи для двусвязной области намечено в [7] (§ 12). Как показано в докладе автора, М. И. Киндера и С. Б. Сагитовой (который будет опубликован в „Трудах семинара по краевым задачам", издательство Казанского университета, за 1983 год), аналог уравнения Гахова в случае многосвязной области приводится к виду

$$f''(\zeta)/f'(\zeta)=2\varphi_1'(\zeta,\ \zeta)/\varphi(\zeta,\ \zeta)\Rightarrow(\partial/\partial\zeta)\ln[\,|f'(\zeta)|/|\varphi(\zeta,\ \zeta)|\,]=0. \tag{25}$$

Здесь $f'(\zeta)$ — регулярная функция с граничными значениями $\ln|f'(\zeta)|\,\big|_{L_k}=$ $=p_k(\theta)+h_k,\ k=0,\dots,n$ (функции $p_k(\theta)$ выражаются через исходные данные задачи, а вещественные величины h_k определяются из требования однозначности функции $f'(\zeta)$); L_0 — внешняя граничная окружность, $L_k\,(k=\overline{1,\ n})$ — внутренние окружности, составляющие границу круговой $(n+1)$-связной области D_ζ; $\varphi(\zeta,\ \zeta_0)=\Phi(\zeta,\ \zeta_0)/(\zeta-\zeta_0)$, а $\Phi(\zeta,\ \zeta_0)$ задает конформное отображение области D_ζ на круг с концентрическими разрезами, радиусы которых обозначим через $r_k<1\,(k=\overline{1,\ n})$ и $r_0=1$; наконец, $\varphi_1'(\zeta,\ \zeta)$ означает производную по первому аргументу от функции $\varphi(\zeta,\ \zeta)$.

Решение внешней обратной краевой задачи имеет вид

$$z(\zeta)=\int_a^\zeta f'(\zeta)\,\Phi^{-2}(\zeta,\ \zeta_0)\,d\zeta. \tag{26}$$

Количество решений в форме (26) будет зависеть от числа корней уравнения Гахова (25). Переформулируем эту зависимость в терминах внутреннего радиуса области $f(D_\zeta)$ в предположении, что $\int_{L_k} f'(\zeta)\,d\zeta=0,\ k=\overline{1,\ n}$.

В силу формулы (2.4) из книги [13] (с. 10) получим, что функция $|\varphi(\zeta,\zeta)|$ будет просто выражаться через внутренний радиус многосвязной области D_ζ:

$$|\varphi(\zeta,\ \zeta)|=\prod_{k=1}^{n} r_k^{\omega_k(\zeta)}\,/\,R(D_\zeta,\ \zeta),$$

где $\omega_k(\zeta)$ является гармонической мерой окружности $L_k\,(k=\overline{1,\ n})$ относительно области D_ζ. Тогда количество решений уравнения (25) будет равно числу критических (включая сюда и экстремальные) точек поверхности $\Omega=\ln[\,|f'(\zeta)|^2/|\varphi(\zeta,\ \zeta)|^2]$, либо поверхности

$$\Psi=R(D_\zeta,\ \zeta)\,|f'(\zeta)|\Big/\prod_{k=1}^{n} r_k^{\omega_k(\zeta)}\equiv R^*(\zeta,\ \bar\zeta).$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 4. *Количество решений уравнения Гахова в случае многосвязной области будет равно числу критических точек видоизмененного внутреннего радиуса* $R^*(\zeta,\bar\zeta)=R[f(D_\zeta),f(\zeta)]\prod_{k=1}^{n}r_k^{-\omega_k(\zeta)}$ *конечной области* $f(D_\zeta)$.

Из геометрических соображений сразу получается, что число критических точек внутреннего радиуса в случае $(n+1)$-связной области $(n\geqslant 1)$ больше или равно двум. Было бы интересно обосновать, что число критических точек внутреннего радиуса зависит от связности области и это число не меньше $n+1$. Для зеркально симметричных областей (с осью симметрии, пересекающей все граничные кривые) эта гипотеза легко доказывается [1].

В заключение заметим, что основные результаты статьи были доложены на конференции „Проблемы гидродинамики больших скоростей и краевых задач" [14] (Дивноморск, сентябрь 1982 года).

Автор благодарит участников семинара по геометрической теории функций при Казанском университете за полезные замечания по данной статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного.— 2-е изд.— М., 1966.— 628 с.
2. Двейрин М. З. Теорема Харди—Литтлвуда и приближение гармонических функций в областях с квазиконформной границей.— ДАН УССР. Сер. А, 1982, № 1, с. 11—14.
3. Walsh J. L. Note on the derivatives of functions analytic in the unit circle.— Bull. Amer. Math. Soc., 1947, v. 53, № 6, p. 515—523.
4. Пойа Д., Сеге Г. Изопериметрические неравенства в математической физике.— М., 1962.— 336 с.
5. Haegi H. R. Extremalprobleme und Ungleichungen konformer Gebietsgrössen.— Compositio math., 1950, v. 8, p. 81—111.
6. Гахов Ф. Д. Краевые задачи.— 3-е изд.— М., 1977.— 640 с.
7. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. Обратные краевые задачи и их приложения.— 2-е изд.— Казань, 1965.— 333 с.
8. Аксентьев Л. А., Хохлов Ю. Е., Широкова Е. А. О единственности решения внешней обратной краевой задачи.— Матем. заметки, 1978, т. 24, № 3, с. 319—330.
9. Аксентьев Л. А., Ильинский Н. Б., Нужин М. Т., Салимов Р. Б., Тумашев Г. Г. Теория обратных краевых задач для аналитических функций и ее приложения.— В сб.: Итоги науки и техн. Матем. анализ. М., 1980, т. 18, с. 67—124.
10. Кудряшов С. Н. О числе решений внешних обратных краевых задач.— Изв. вузов. Матем., 1969, № 8, с. 30—32.
11. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. Принцип подчиненности в достаточных условиях однолистности.— ДАН СССР, 1973, т. 211, № 1, с. 19—22.
12. Аксентьев Л. А., Авхадиев Ф. Г. Об одном классе однолистных функций.— Изв. вузов. Матем., 1970, № 10, с. 12—20.
13. Митюк И. П. Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций.— Краснодар, 1980.— 91 с.
14. Аксентьев Л. А. О разрешимости внешней обратной краевой задачи.— В сб.: Пробл. гидродинамики больших скоростей и краев. задач. Краснодар, 1982, с. 41.

г. Казань

Поступила
30.04.1982

М. В. Бушманова, В. К. Иванов

УДК 517.983

О КОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ К РЕШЕНИЮ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

В работе рассматривается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

в банаховых пространствах. Решение уравнения (1) построено методом конечномерных приближений и показано, что этот метод является регуляризующим алгоритмом. Получены оценки устойчивости конечномерных приближений через поперечники множеств. Указаны эффективные критерии сходимости конечномерных приближений в пространствах L^p $(1 < p < \infty)$, в которых использованы оценки модуля непрерывности метрической проекции, полученные О. Ганнером [1], В. И. Бердышевым [2], [3] и Б. О. Бьернестолом [4].

---

[1] Недавно М. И. Киндер обосновал это предположение в общем случае с привлечением субгармонических функций и векторных полей.