F. A. Berezin, Laplace operators on semisimple Lie groups and on certain symmetric spaces, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1957, Volume 12, Issue 1, 152–156

[3] Ю. М. Березанский, О центре группового кольца компактной группы, ДАН **72**, № 5 (1950).
[4] Ю. М. Березанский, Гиперкомплексные системы с дискретным базисом, ДАН **81**, № 3 (1951).
[5] Ю. М. Березанский, К теории почти-периодических последовательностей Б. М. Левитана, ДАН **81**, № 4 (1951).
[6] Ю. М. Березанский, О теории почти-периодических функций относительно сдвига в гиперкомплексных системах, ДАН **85**, № 1 (1952).
[7] Ю. М. Березанский, О гиперкомплексных системах, построенных по уравнению Штурма—Лиувилля на полуоси, ДАН **91**, № 6 (1953).
[8] Ю. М. Березанский и С. Г. Крейн, Гиперкомплексные системы с компактным базисом, Укр. матем. журн. **3**, № 2 (1951).
[9] Ю. М. Березанский, О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам, Укр. матем. журн. **3**, № 4 (1951).
[10] Ю. М. Березанский, Об обобщенных почти-периодических функциях и последовательностях, связанных с дифференциальными и разностными уравнениями, Матем. сб. **32** (**74**), № 1 (1953).

ОПЕРАТОРЫ ЛАПЛАСА НА ПОЛУПРОСТЫХ ГРУППАХ ЛИ И НЕКОТОРЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ф. А. Березин

1. Определение операторов Лапласа. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ — однородное многообразие с группой движений $\mathfrak{G}$ и стационарной подгруппой $\mathfrak{G}_0$. В пространстве функций на $\mathfrak{M}$ рассмотрим операторы T_g, задаваемые формулой

$$T_g f(x) = f(g^{-1}x).$$

Большой интерес представляют дифференциальные операторы на $\mathfrak{M}$, перестановочные с операторами T_g. Эти операторы мы, следуя И. М. Гельфанду [1], называем *операторами Лапласа* на $\mathfrak{M}$.

Обозначим через $\overset{0}{R}$ множество функций на $\mathfrak{M}$, постоянных на подмногообразиях, транзитивных относительно стационарной подгруппы: если $f \in \overset{0}{R}$ и $g \in \mathfrak{G}_0$, то $f(gx) = f(x)$. Очевидно, что множество $\overset{0}{R}$ инвариантно для операторов Лапласа. Оператор, индуцированный в R оператором Лапласа Δ, мы называем *радиальной частью* оператора Δ и обозначаем его $\overset{0}{\Delta}$.

В настоящей работе вычисляются радиальные части операторов Лапласа для случая, когда многообразием является полупростая группа $\mathfrak{G}$, движения в $\mathfrak{G}$ задаются формулой $g \to g_1^{-1} g g_2$, а также для некоторых симметрических пространств.

2. Описание радиальных частей операторов Лапласа. А. Радиальные части операторов Лапласа на компактной полупростой группе. Рассмотрим в качестве примера группу $\mathfrak{U}$ унитарных унимодулярных матриц. Движения в $\mathfrak{U}$ задаются формулой

$$u \to u_1^{-1} u u_2, \tag{1}$$

движения из стационарной подгруппы точки e (e — единичная матрица) — формулой

$$u \longrightarrow u_1^{-1} u u_1. \tag{2}$$

Как известно, всякую унитарную матрицу можно преобразованиями (2) привести к диагональному виду, причем получающаяся диагональная матрица единственна с точностью до произвольной перестановки собственных значений. Поэтому функции из $\overset{0}{R}$, т. е. такие, что $f(u_1^{-1} u u_1) = f(u)$, зависят лишь от собственных значений $\varepsilon_p = e^{it_p}$ матрицы u.

Теорема 1. *Пусть $P(t_1, \ldots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор*

$$\overset{0}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^n}\right) j(t), \tag{3}$$

где

$$j(t) = \prod_{p<q} (e^{it_p} - e^{it_q}),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на $\mathfrak{U}$[1]).

Обратно. *Радиальная часть всякого оператора Лапласа на группе* $\mathfrak{U}$ *представима в виде* (3).

Теорема 1 может быть обобщена на произвольные компактные полупростые группы [2].

В. Радиальные части операторов Лапласа на комплексной полупростой группе. Рассмотрим в качестве примера группу $\mathfrak{G}$ комплексных унимодулярных матриц. Как и выше, радиальные части операторов Лапласа являются дифференциальными операторами в пространстве функций, зависящих лишь от собственных значений, которые мы опять обозначим через $\varepsilon_p = e^{it_p}$ (числа t_p могут быть комплексными).

Теорема 2. *Пусть $P(t_1, \ldots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда операторы*

$$\left.\begin{aligned} \overset{0}{\Delta}(P) &= \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t^n}\right) j(t), \\ \overset{0}{\bar{\Delta}}(P) &= \frac{1}{\overline{j(t)}} P\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \bar{t}^n}\right) \overline{j(\bar{t})}, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где $j(t) = \prod\limits_{p<q} (e^{it_p} - e^{it_q})$, являются радиальными частями некоторых операторов Лапласа на $\mathfrak{G}$.

Обратно. *Радиальная часть всякого оператора Лапласа на $\mathfrak{G}$ представима в виде многочлена от операторов* (4).

В случае произвольной комплексной полупростой группы имеет место аналогичная теорема [2]. Выражения для радиальных частей операторов Лапласа на вещественных полупростых группах несколько сложнее [2].

---

[1]) Оператор $P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right)$, входящий в выражение (3), получен из многочлена $P(t_1, \ldots, t_n)$ путем формальной замены t_k на $\frac{\partial}{\partial t_k}$.

C. Радиальные части операторов Лапласа на многообразии классов смежности комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе. Рассмотрим в качестве примера группу $\mathfrak{G}$ комплексных унимодулярных матриц n-го порядка. Ее максимальной компактной подгруппой является группа $\mathfrak{U}$ унитарных унимодулярных матриц n-го порядка. Многообразие $\mathfrak{G}/\mathfrak{U}$ можно отождествить с многообразием V эрмитовых унимодулярных положительно определенных матриц n-го порядка с движениями

$$v \longrightarrow g^* v g, \tag{5}$$

где g^* — матрица, эрмитово-сопряженная матрица g. При $g \in \mathfrak{U}$ формула (5) переходит в

$$v \longrightarrow u^{-1} v u. \tag{6}$$

Как известно, преобразованиями (6) можно всякую эрмитову матрицу привести к диагональной форме. Поэтому функции из $\overset{0}{R}$, на которых определены радиальные части операторов Лапласа, зависят лишь от собственных значений матрицы v, которые мы обозначим $\varepsilon_p = e^{t_p}$.

Теорема 3. *Пусть $P(t_1, \ldots, t_n)$ — произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор*

$$\overset{0}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) j(t), \tag{7}$$

где

$$j(t) = \prod_{p<q} (e^{t_p} - e^{t_q}),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на V.

Обратно. *Радиальная часть всякого оператора Лапласа на V представима в виде* (7).

Аналогичная теорема имеет место для многообразия классов смежности произвольной комплексной полупростой группы по максимальной компактной подгруппе [2].

D. Радиальные части операторов Лапласа на некоторых симметрических многообразиях нулевой кривизны. Примером пространств рассматриваемого типа является многообразие W всех эрмитовых матриц n-го порядка со следом 0 и движениями

$$w \longrightarrow u^{-1} w u + w_1, \tag{8}$$

где u — унитарная матрица. Группа унитарных матриц является, очевидно, стационарной подгруппой для точки 0. Преобразованиями из стационарной подгруппы

$$w \longrightarrow u^{-1} w u$$

можно, как известно, привести эрмитову матрицу к диагональному виду. Поэтому радиальная часть оператора Лапласа является оператором в пространстве функций от вещественных переменных $t_1, \ldots, t_n$ — собственных значений эрмитовой матрицы.

Теорема 4. *Пусть* $P(t_1, \ldots, t_n)$ — *произвольный симметрический многочлен. Тогда оператор*

$$\overset{0}{\Delta}(P) = \frac{1}{j(t)} P\left(\frac{\partial}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial t_n}\right) j(t), \tag{9}$$

где

$$j(t) = \prod_{p<q} (t_p - t_q),$$

является радиальной частью некоторого оператора Лапласа на W.

Обратно. *Радиальная часть всякого оператора Лапласа на* W *представима в виде* (9).

Общее определение пространств рассматриваемого типа см. в [3]. Для всех этих пространств справедлива теорема, аналогичная теореме 4.

Радиальные части операторов Лапласа на многообразии унитарной группы с движениями (1), многообразии эрмитовых положительно определенных матриц с движениями (5) и многообразии эрмитовых матриц со следом 0 и движениями (8) весьма сходны между собой. Это сходство вызвано связью между самими пространствами. Благодаря этой связи аналогичное сходство имеется между всеми формулами, относящимися к сферическим функциям на указанных многообразиях [3], [4]. Тройку многообразий, связанных между собой так, как три перечисленные, мы называем *родственным*. Общее определение родственных симметрических пространств см. в [3].

3. Некоторые общие свойства операторов Лапласа. Пусть $\mathfrak{M}$ — произвольное однородное многообразие, обладающее инвариантной аффинной связностью. Пусть ∇_k — составленные с помощью этой связности операторы ковариантного дифференцирования и $q^{i_1 \ldots i_k}(x)$ — инвариантное симметрическое тензорное поле на $\mathfrak{M}$.

Теорема 5. *Оператор*

$$\nabla(q) = \sum_{i_1 - i_k} q^{i_1 \ldots i_k} \nabla_{i_1} \ldots \nabla_{i_k} \tag{10}$$

является оператором Лапласа на $\mathfrak{M}$, *причем всякий оператор Лапласа на* $\mathfrak{M}$ *однозначно представим в виде суммы операторов* (10).

Рассмотрим в алгебре Ли G группы движений многообразия $\mathfrak{M}$ базис $\xi_1, \ldots, \xi_n$. Образуем ассоциативную алгебру $B(G)$ с образующими $\xi_1, \ldots, \xi_n$ и соотношениями

$$\xi_i \xi_j - \xi_j \xi_i = \sum_k C_{ij}^k \xi_k,$$

где C_{ij}^k — структурные константы алгебры G. Очевидно, что алгебра дифференциальных операторов на многообразии $\mathfrak{M}$, порожденная операторами Ли, служит представлением алгебры $B(G)$. В частности, элементам z центра Z алгебры $B(G)$ отвечают операторы $\Delta(z)$, перестановочные с операторами Ли, и следовательно, с движениями на G, т. е. операторы Лапласа.

Теорема 6. *Если* $\mathfrak{M}$ *есть симметрическое пространство с полупростой группой движений, то операторами* $\Delta(z)$ *исчерпываются все операторы Лапласа на* $\mathfrak{M}$.

Аналогичная теорема верна для симметрических многообразий нулевой кривизны, родственных симметрическим пространствам с полупростой группой движений.

Как показывают примеры, теорема 6 не может быть обобщена на произвольные однородные многообразия.

Из теоремы 6 вытекает важное следствие: *операторы Лапласа на перечисленных в теореме* 6 *многообразиях перестановочны между собой*. Действительно, по своему определению оператор Лапласа перестановочен со сдвигами, а значит с операторами Ли, следовательно, с многочленами от операторов Ли. Оператор же $\Delta(z)$ сам, очевидно, является многочленом от операторов Ли.

4. Применение операторов Лапласа. Значение операторов Лапласа для теории представлений связано с тем, что сферические функции являются собственными для этих операторов [1], [2], [5]. В частности, зональные сферические функции на однородных многообразиях являются собственными для радиальных частей операторов Лапласа. Решая, в частности, соответствующие дифференциальные уравнения, можно вычислить зональные сферические функции на полупростых группах (рассматриваемых как однородные многообразия относительно движений $g \to g_1^{-1} g g_2$), пространствах классов смежности комплексной полупростой группы по максимальной компактной и на многообразиях, аналогичных пространству эрмитовых матриц со следом 0 ([2], [3], [6]).

Отметим, что в первом случае зональными сферическими функциями являются характеры неприводимых представлений группы. Одновременно с их вычислением удается дать описание всех, с точностью до эквивалентности, неприводимых представлений полупростых групп в нормированных пространствах.

Для компактных и комплексных полупростых групп это проделано в [2], [6].

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. М. Гельфанд, Сферические функции на симметрических римановых многообразиях, ДАН **50**, № 1 (1950).

[2] Ф. А. Березин, Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, ДАН **107**, № 1 (1956).

[3] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, Несколько замечаний к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. о-ва 5 (1956).

[4] Ф. А. Березин, И. М. Гельфанд, М. И. Граев, М. А. Наймарк, Представление групп, УМН **XI**, вып. 6 (1956), 13—40.

[5] E. Cartan, Sur la determination d'un systéme orthogonal complet dans un espace de Riemann symétrique clos, Rend. Circ. matem. Palermo **53** (1929), 217.

[6] Ф. А. Березин, Представления комплексных полупростых групп Ли в банаховом пространстве, ДАН **110**, № 6 (1956).

[7] И. М. Гельфанд, Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. **16** (58) : 1 (1950).

[8] Harich-Chandra, On some application of the universal envelopping algebra o. a semisimple Lie algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **70**, № 1 (1950), 28—47.