Ю. Л. Шмульян, Теория линейных отношений и пространства с индефинитной метрикой, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, том 10, выпуск 1, 67–72

Функциональный анализ и его приложения,
т. 10, вып. 1, 1976, 67—72.

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ОТНОШЕНИЙ И ПРОСТРАНСТВА С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Ю. Л. Шмульян

Пусть H — гильбертово пространство со скалярным произведением (x, y), $H = H_+ \oplus H_-$ — некоторое его ортогональное разложение, $P_\pm$ — ортопроектор на $H_\pm$ $(P_+ + P_- = I)$. Положим $J = P_+ - P_-$ и введем в H новое, вообще говоря, индефинитное скалярное произведение $[x, y] = (Jx, y)$. Гильбертово пространство H, в котором наряду со скалярным произведением (x, y) введено описанным выше способом индефинитное скалярное произведение $[x, y]$, называется *J-пространством.*

В настоящее время имеется немало работ, посвященных геометрии и теории операторов в J-пространствах [1] — [7]. Из этих работ мы заимствуем терминологию и обозначения.

Ряд положений теории операторов приобретает более законченный характер, если ввести понятие *линейного отношения*, обобщающее понятие графика оператора. Упомянем, например, теорию расширения операторов [8] — [11], теорию расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций [12]. Теория линейных отношений в линейных пространствах была развита Маклейном [13] и Аренсом [14], а в гильбертовых пространствах и J-пространствах — Аренсом [14], Коддингтоном [9] — [11], Бенневитцем [15] и Глуховым [16], [17].

Настоящая статья посвящена изучению некоторых важных классов линейных отношений в J-пространствах.

§ 1. Линейные отношения в линейных пространствах

1. Пусть E и E' — два линейных пространства, $\mathbf{E} = E \dotplus E'$ — их прямая сумма, определяемая как совокупность пар $\langle x, x' \rangle$ $(x \in E, x' \in E')$ с естественной линеаризацией. *Линейным отношением* (в дальнейшем л. о.) $E \to E'$ будем называть любой линеал в $\mathbf{E}$. Для каждого л. о. A: $E \to E'$ полагаем: $\mathfrak{D}(A) = \{x \in E\colon \exists x' \in E', \langle x, x' \rangle \in A\}$ — область определения A; $\ker A = \{x \in E\colon \langle x, 0 \rangle \in A\}$ — ядро A; $\mathfrak{R}(A) = \{x' \in E'\colon \exists x \in E, \langle x, x' \rangle \in A\}$ — область значений A; $\operatorname{ind} A = \langle x' \in E'\colon \{0, x' \rangle \in A\}$ — неопределенность A.

Л. о. A: $E \to E'$ можно интерпретировать как многозначное отображение E в E', если поставить каждому $x \in \mathfrak{D}(A)$ $(\subset E)$ в соответствие множество всех $x' \in E'$ таких, что $\langle x, x' \rangle \in A$. В частности, $A0 = \operatorname{ind} A$. Если L — линеал в E, то по определению AL есть объединение всех Ax $(\forall x \in \mathfrak{D}(A) \cap L)$. Множество AL — линеал в E', содержащий $\operatorname{ind} A$.

Пусть $\mathbf{E}^\# = E' \dotplus E$. Если A — л. о. $E \to E'$, то обратное л. о. A^{-1}: $E' \to E$ определяется как множество всех пар $\langle x', x \rangle \in \mathbf{E}^\#$ таких, что $\langle x, x' \rangle \in A$. Заметим, что $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{R}(A^{-1})$, $\ker A = \operatorname{ind} A^{-1}$.

2. Будем в дальнейшем предполагать, что рассматриваемые линейные пространства *гильбертовы*. Прямую сумму $\mathbf{H} = H \dotplus H'$ двух таких пространств H и H' будем считать ортогональной и записывать в виде $\mathbf{H} = H \oplus H'$. Л. о. A: $H \to H'$ будем называть *замкнутым*, если замкнут соответствующий линеал. Для такого л. о. замкнутыми являются $\ker A$ и $\operatorname{ind} A$.

§ 2. Линейные отношения в J-пространствах

1. Ортогональное разложение $H = H_+ \oplus H_-$ J-пространства H, описанное во введении, будем называть *каноническим*.

Пусть H и H' — два J-пространства, $H = H_+ \oplus H_-$ и $H' = H'_+ \oplus \oplus H'_-$ — их канонические разложения. В гильбертово пространство $\mathbf{H} = H \oplus H'$, состоящее из всевозможных пар $\langle x, x' \rangle$ ($x \in H$, $x' \in H'$), следующим образом введем индефинитное скалярное произведение: если $\mathbf{x} = \langle x, x' \rangle$, $\mathbf{y} = \langle y, y' \rangle \in \mathbf{H}$, то

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = [x, y] - [x', y']. \tag{1}$$

Легко проверить, что $\mathbf{H}$ является J-пространством, причем компоненты его канонического разложения $\mathbf{H} = \mathbf{H}_+ \oplus \mathbf{H}_-$ имеют вид $\mathbf{H}_+ = H_+ \oplus \oplus H'_-$, $\mathbf{H}_- = H'_+ \oplus H_-$.

J-пространство $\mathbf{H}$, в котором индефинитная метрика введена формулой (1), будем обозначать через $H \widetilde{\oplus} H$ (исходя из этого, каноническое разложение произвольного J-пространства H следует писать в виде $H = = H_+ \widetilde{\oplus} H_-$).

J-пространство $H' \widetilde{\oplus} H$ будем обозначать через $\mathbf{H}^{\#}$. Операция $^{\#}$, отображающая $\mathbf{H}$ на $\mathbf{H}^{\#}$ по формуле $\langle x, x' \rangle^{\#} = \langle x', x \rangle$, является антиизометрией:

$$[\langle x, x' \rangle, \langle y, y' \rangle[_{H \widetilde{\oplus} H'} = -[\langle x', x \rangle, \langle y', y \rangle]_{H' \widetilde{\oplus} H}.$$

2. В геометрии и теории операторов мы придерживаемся терминологии и обозначений из [5]—[7]. В частности, J-ортогональность векторов и линеалов будем обозначать символом $[\perp]$; J-ортогональное дополнение линеала L будет обозначаться через $L^{\perp}$.

Пусть H и H' — J-пространства, $\mathbf{H} = H \widetilde{\oplus} H'$. Графики операторов из H в H' того или иного класса удобно интерпретировать в терминах геометрии J-пространств. Так, оператор T является *J-растягивающим* (*J-сжимающим*, *J-изометрическим*) тогда и только тогда, когда его график — неположительный (неотрицательный, нейтральный) линеал в $\mathbf{H}$. В связи с этим введем следующее

Определение. Л. о. T: $H \to H'$ будем называть *J-растягивающим* (*J-сжимающим*, *J-изометрическим*), если линеал T ($\subset \mathbf{H}$) неположителен (неотрицателен, нейтрален).

Такое л. о. характеризуется тем, что для любого $\langle x, x' \rangle \in T$ выполняется неравенство $[x', x'] \geqslant (\leqslant, =)\ [x, x]$. Поэтому линеал $\ker T$ неположителен (неотрицателен, нейтрален), а линеал $\operatorname{ind} T$ неотрицателен (неположителен, нейтрален).

Если T — J-сжимающее (J-растягивающее, J-изометрическое) л. о. $H \to H'$, то л. о. T^{-1}: $H' \to H$ является J-растягивающим (J-сжимающим, J-изометрическим).

Пусть T — л. о. $H \to H'$. Подпространство $(T^{\perp})^{-1}$ в J-пространстве $\mathbf{H}^{\#}$ будем называть линейным отношением, *сопряженным с* T, и обозначать через T^c.

Определение. Замкнутое л. о. T: $H \to H'$ назовем *J-бирастягивающим* (*J-бисжимающим*), если T и T^c — J-растягивающие (J-сжимающие) л. о.

Теорема 1. *Для того чтобы л. о. T было J-бирастягивающим (J-бисжимающим), необходимо и достаточно, чтобы подпространство T было максимальным неположительным (максимальным неотрицательным) в* $\mathbf{H}$.

Доказательство проведем для J-бирастягивающего случая. Подпространство T является максимальным неположительным тогда и только тогда, когда T неположительно, а $T^{\perp}$ неотрицательно; неотрицательность же $T^{\perp}$ равносильна неположительности $T^c = (T^{\perp})^{-1}$.

Определение. Л. о. T: $H \to H'$ назовем *J-полуунитарным* (*J-унитарным*), если T — максимальное нейтральное (гипермаксимальное нейтральное) подпространство в $H \widetilde{\oplus} H'$.

J-унитарное л. о. T характеризуется каждым из условий: 1) $T^{\perp} = T$; 2) $T^c = T^{-1}$ (см. [14], [17]). Вместе с T J-унитарным будет и T^{-1}.

Теорема 2. *Если T — J-унитарное л. о., то* а) $\ker T = \mathfrak{D}(T)^{\perp}$, б) $\operatorname{ind} T = \mathfrak{R}(T)^{\perp}$.

Доказательство. Как показано в [14], [16], $\mathfrak{D}(T)^{\perp} = \operatorname{ind} T^c$. Поскольку $T^c = T^{-1}$, утверждение а) доказано. Утверждение б) получается путем рассмотрения J-унитарного л. о. T^{-1}.

§ 3. Дробно-линейное преобразование линейных отношений в J-пространствах

В. П. Потаповым в [18] было рассмотрено дробно-линейное преобразование (д. л. п.), переводящее J-сжимающие матрицы в сжимающие. Это преобразование было обобщено Ю. П. Гинзбургом [1], [19] на случай ограниченных J-бисжимающих операторов в бесконечномерном J-пространстве. Однако даже в конечномерном случае не всякое сжатие является образом какого-либо J-бисжимающего оператора. В настоящем параграфе показывается, что указанное д. л. п. можно распространить на все J-бисжимающие л. о. При этом образы этих л. о. заполняют множество всех сжатий. Кроме того, это преобразование получает естественную трактовку в терминах геометрии J-пространств.

Пусть T — J-бисжимающее л. о. $H \to H'$, т. е. максимальное неотрицательное подпространство в $\mathbf{H} = H \widetilde{\oplus} H'$. Обозначим через $K = K_T$ угловой оператор T относительно $\mathbf{H}_+$. Этот оператор является сжатием из $\mathbf{H}_+ = H_+ \oplus H'_-$ в $\mathbf{H}_- = H'_+ \oplus H_-$. Если $\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}$ — матричное представление оператора K относительно упомянутых разложений $\mathbf{H}_+$ и $\mathbf{H}_-$, то л. о. T состоит из тех и только тех пар $\langle x, x' \rangle$, которые допускают представление

$$x = z_1 + K_{21}z_1 + K_{22}z_2, \quad x' = z_2 + K_{11}z_1 + K_{12}z_2, \tag{2}$$

где z_1 и z_2 пробегают независимо друг от друга H_+ и H'_- соответственно. Полагая $z_1 + z_2 = z$ $(\in \mathbf{H}_+)$, получим эквивалентные формулы

$$x = \begin{pmatrix} I & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} z, \quad x' = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} z. \tag{3}$$

Обратно, всякое сжатие K, $\mathfrak{D}(K) = \mathbf{H}_+$, $\mathfrak{R}(K) \subset \mathbf{H}_-$, порождает по формулам (3) множество пар $\langle x, x' \rangle$, образующее J-бисжимающее л. о.

Из формул (3) нетрудно вывести равенства для линеалов, связанных с л. о. T,

$$\mathfrak{D}(T) = \mathfrak{R}\left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}\right), \quad \mathfrak{R}(T) = \mathfrak{R}\left(\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix}\right);$$

$$\ker T = \{z_1 + K_{21}z_1 \colon z_1 \in \ker K_{11}\}, \quad \operatorname{ind} T = \{z_2 + K_{12}z_2 \colon z_2 \in \ker K_{22}\};$$
$$\dim \ker T = \dim \ker K_{11}, \quad \dim \operatorname{ind} T = \dim \ker K_{22}.$$

Из этих равенств легко вытекает утверждение, выражающее связь свойств J-бисжимающего л. о. T и соответствующего сжатия K.

Теорема 3. а) T — *оператор* (*т. е.* $\operatorname{ind} T = 0$) $\Leftrightarrow K_{22}$ — *мономорфизм*;

б) $\mathfrak{D}(T) = H \Leftrightarrow \mathfrak{R}(K_{22}) = H_-$;

в) $\overline{\mathfrak{D}(T)} = H \Leftrightarrow \overline{\mathfrak{R}(K_{22})} = H_- \Leftrightarrow K_{22}^*$ — *мономорфизм*;

г) $\mathfrak{D}(T)$ *замкнуто* $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(K_{22})$ *замкнуто*;

д) $\ker T = 0 \Leftrightarrow K_{11}$ — *мономорфизм*;

е) $\mathfrak{R}(T) = H' \Leftrightarrow \mathfrak{R}(K_{11}) = H'_+$;

ж) $\overline{\mathfrak{R}(T)} = H' \Leftrightarrow \overline{\mathfrak{R}(K_{11})} = H'_+ \Leftrightarrow K_{11}^*$ — *мономорфизм*;

з) $\mathfrak{R}(T)$ *замкнуто* $\Leftrightarrow \mathfrak{R}(K_{11})$ *замкнуто*.

Следствие. *Л. о. T будет всюду заданным ограниченным оператором тогда и только тогда, когда K_{22} — изоморфизм H'_- на H_-.*

В этом случае из (3) вытекает, что

$$\begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} z = x' = Tx = T \begin{pmatrix} I & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} z,$$

т. е.

$$T = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} K_{11} - K_{12}K_{22}^{-1}K_{21} & K_{12}K_{22}^{-1} \\ -K_{22}^{-1}K_{21} & K_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Последняя формула представляет собой дробно-линейное преобразование сжатия K с непрерывно обратимым K_{22} в J-бисжимающий оператор T. Обратное преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} T_{11} - T_{12}T_{22}^{-1}T_{21} & T_{12}T_{22}^{-1} \\ -T_{22}^{-1}T_{21} & T_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

Соответствие $T \leftrightarrow K_T$ представляет собой упоминавшееся выше дробно-линейное преобразование Потапова — Гинзбурга, связывающее ограниченные J-бисжимающие операторы и сжатия.

Замечание. J-унитарным л. о. T, и только им, отвечают унитарные операторы K из $\mathbf{H}_+$ на $\mathbf{H}_-$. Из одного предложения Спитковского [20] *) и из теоремы 3 (г), з)) вытекает, что для J-унитарного л. о. T линеалы $\mathfrak{D}(T)$ и $\mathfrak{R}(T)$ замкнуты лишь одновременно. В силу теоремы 3, б), е)) J-унитарное л. о. T является графиком J-унитарного оператора из H на H' тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(K_{11}) = H'_+$, $\mathfrak{R}(K_{22}) = H_-$.

§ 4. Обобщенное дробно-линейное преобразование, порождаемое линейным отношением

Пусть $H = H_+ \widetilde{\oplus} H_-$ — каноническое разложение J-пространства H, $\mathfrak{K}$ — множество сжатий из H_- в H_+. В [21] показано, что всякий ограниченный всюду заданный J-бисжимающий оператор T в H порождает некоторое д. л. п. $Z \to Z' = \varphi_T(Z)$ множества $\mathfrak{K}$ в свою часть. При этом, если L_Z — максимальное неположительное подпространство с угловым оператором Z относительно H_-, то $\varphi_T(Z)$ — угловой оператор подпространства TL_Z относительно H_-. В настоящем параграфе это предложение обобщается на J-бисжимающие л. о.

*) В [20] рассматриваются матрицы унитарных операторов, действующих в одном гильбертовом пространстве. Однако упомянутый результат легко переносится на случай унитарных операторов, действующих из одного гильбертова пространства в другое.

Пусть $H = H_+ \tilde{\oplus} H_-$ и $H' = H'_+ \tilde{\oplus} H'_-$ — канонические разложения двух J-пространств H и H', $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{K}'$ — множества сжатий соответственно из H_- в H_+ и из H'_- в H'_+, T — некоторое J-бисжимающее л. о. $H \to H'$, K — его угловой оператор, как в § 3. Обозначим через $\mathfrak{K}_T$ множество тех $Z \in \mathfrak{K}$, для которых оператор $I - ZK_{21}$ непрерывно обратим. Это множество содержит, в частности, все $Z \in \mathfrak{K}$, для которых $\| Z \| < 1$. (Если $\| K_{21} \| < 1$, то $\mathfrak{K}_T = \mathfrak{K}$.)

Пусть $Z \in \mathfrak{K}_T$. Линеал $TL_Z = T(L_Z \cap \mathfrak{D}(T))$, очевидно, неположителен. Покажем, что этот линеал является максимальным неположительным подпространством в H', и найдем его угловой оператор относительно H'_-. В силу (2) множество $L_Z \cap \mathfrak{D}(T)$ состоит из тех $x = u + Zu \in L_Z$, для которых $u = K_{21}z_1 + K_{22}z_2$, $Zu = z_1$. Отсюда $z_1 = ZK_{21}z_1 + ZK_{22}z_2$, $(I - ZK_{21})z_1 = ZK_{22}z_2$, и, следовательно, $z_1 = (I - ZK_{21})^{-1} \times ZK_{22}z_2$, причем z_2 пробегает H'_-. Согласно (2) линеал $T(L_Z \cap \mathfrak{D}(T))$ состоит из всех x' вида

$$x' = z_2 + K_{11}(I - ZK_{21})^{-1}ZK_{22}z_2 + K_{12}z_2 = z_2 + Z'z_2,$$

где

$$Z' = K_{12} + K_{11}(I - ZK_{21})^{-1}ZK_{22} \ (\in \mathfrak{K}'). \tag{4}$$

Поскольку z_2 пробегает все H'_-, то TL_Z — максимальное неположительное подпространство в H' с угловым оператором Z' относительно H'_-.

З а м е ч а н и е 1. Формулу (4) можно записать в виде

$$Z' = K_{12} + K_{11}Z(I - K_{21}Z)^{-1}K_{22},$$

причем оператор $I - K_{21}Z$ непрерывно обратим вместе с $I - ZK_{21}$.

З а м е ч а н и е 2. Формула (4) является обобщением формулы д. л. п.

$$Z' = \varphi_T(Z) = (T_{11}Z + T_{12})(T_{21}Z + T_{22})^{-1}$$

из [21] и может быть преобразована в нее, если K_{22} — непрерывно обратимый оператор (т. е. если T — всюду заданный ограниченный J-бисжимающий оператор). Для этого следует воспользоваться формулами из § 3, связывающими матричные элементы операторов T и K_T.

Одесский институт инженеров морского флота

Поступила в редакцию 20 августа 1974 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Г и н з б у р г Ю. П., О J-нерастягивающих операторах в гильбертовом пространстве, Научн. записки Одесск. пед. ин-та 22, № 1 (1958), 13—19.
2. Г и н з б у р г Ю. П., О подпространствах гильбертова пространства с индефинитной метрикой, Научн. записки Одесск. пед. ин-та 25, № 2 (1961), 3—9.
3. P h i l l i p s R. S., Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 90, № 2 (1959), 193—254 (русск. перевод: Математика 6: 4 (1962), 11—70).
4. P h i l l i p s R. S., The extension of dual subspaces, invariant under an algebra, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem, 1960, Jerusalem Acad. Press, Oxford — London — New York — Paris, Pergamon Press, 1961, 366—498 (русск. перевод: Математика 8: 6 (1964), 81—108).
5. Г и н з б у р г Ю. П., И о х в и д о в И. С., Исследования по геометрии бесконечномерных пространств с билинейной метрикой, УМН XVII, вып. 4 (1962), 3—56.
6. К р е й н М. Г., Введение в геометрию индефинитных J-пространств и теорию операторов в этих пространствах, Вторая летн. матем. школа, I, Киев, «Наукова думка», 1965, 15—92.
7. К р е й н М. Г., Ш м у л ь я н Ю. Л., О плюс-операторах в пространстве с индефинитной метрикой, Матем. исследования, Кишинев, 1, № 1 (1966), 131—161.
8. Ш м у л ь я н Ю. Л., Теория расширения операторов и пространства с индефинитной метрикой, Изв. АН СССР, серия матем. 38 (1974), 896—908.

9. C o d d i n g t o n E., Extension theory of formally normal and summetric subspaces, Mem. Amer. Math. Soc. 134 (1973).
10. C o d d i n g t o n E., Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators, Bull. Amer. Math. Soc. 79, № 4 (1973), 712—715.
11. C o d d i n g t o n E., Selfadjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators, Adv. Math. 14, № 3 (1974), 309—332.
12. Р о ф е - Б е к е т о в Ф. С., О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, Теория функций, функц. анализ и их приложения, Харьков, вып. 8 (1969), 3—24.
13. M a c L a n e S., An algebra of additive relations, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 47, № 7 (1961), 1043—1051 (русск. перевод: Математика 7: 6 (1963), 3—12).
14. A r e n s R., Operational calculus of linear relations, Pacif. J. Math. 11 (1961), 9—23.
15. B e n n e v i t z Ch., Symmetric relations on a Hilbert spaces, Lect. Notes Math. 280 (1972), 212—218.
16. Г л у х о в В. П., О линейных соответствиях в пространствах с индефинитной метрикой, Функц. анализ 1, Ульяновск (1973), 37—46.
17. Г л у х о в В. П., О преобразованиях Кэли линейных соответствий, Функц. анализ 1, Ульяновск (1973), 47—50.
18. П о т а п о в В. П., Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Труды Моск. матем. о-ва IV (1955), 125—236.
19. Г и н з б у р г Ю. П., J-нерастягивающие аналитические оператор-функции, Канд. диссертация, Одесса, 1958.
20. С п и т к о в с к и й И. М., О восстановлении унитарного оператора по двум его диагональным блокам, Матем. исследования, Кишинев, 8, № 4 (1973), 187—193.
21. К р е й н М. Г., Ш м у л ь я н Ю. Л., О дробно-линейных преобразованиях с операторными коэффициентами, Матем. исследования, Кишинев, 2, № 3 (1967), 64—96.