



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Савенков, Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2020, 008

DOI: 10.20948/prepr-2020-8

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.88

15 января 2025 г., 06:22:13





ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Савенков Е.Б.**

Конечноэлементный вариант  
метода проекции  
ближайшей точки для  
решения уравнений на  
поверхностях с краем

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Савенков Е.Б. Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 8. 36 с. <http://doi.org/10.20948/prepr-2020-8>  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-8>

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК  
ОРДЕНА ЛЕНИНА  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ  
имени М. В. КЕЛДЫША

Е.Б. Савенков

**Конечноэлементный вариант метода проекции  
ближайшей точки  
для решения уравнений на поверхностях с краем**

Москва, 2020

*Е.Б. Савенков*, Конечноэлементный вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем

**Аннотация.** В работе предложен класс слабых постановок задач, которые позволяют построить вариант метода проекции ближайшей точки для решения уравнений на поверхностях с краем в контексте метода конечных элементов. Основное внимание уделено вариационно-согласованному обобщению способа задания граничных условий. Рассматривается вариант метода как для решения задач в двумерных областях, так и для решения уравнений на произвольных достаточно гладких поверхностях с краем.

**Ключевые слова:** метод проекции ближайшей точки, метод конечных элементов.

*E.B. Savenkov*, Finite element framework for closest point projection method for surface PDEs

**Abstract.** We present a class of weak problem statements which natural approximation using finite element method leads to finite element version of the closest point projection method for surface PDEs. Substantial attention is paid to variationally consistent treatment of Dirichlet boundary conditions using closest point projection approach. We consider conventional 2D problem settings as well as their generalization to the case of an arbitrary sufficiently smooth surfaces embedded into 3D space.

**Key words and phrases:** closest point projection method, finite element method.

# 1 Введение

В работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009] был предложен оригинальный метод решения уравнений на поверхностях, основанный на представлении поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Суть метода заключается в том, что сначала с помощью оператора проекции ближайшей точки строится продолжение уравнения с поверхности в трехмерное пространство. Далее «продолженная» задача аппроксимируется подходящим разностным методом на сетке, не согласованной с геометрией поверхности. В качестве решения исходной задачи на поверхности рассматривается след решения продолженной, трехмерной, задачи на ней. Одновременно с этим оператор проекции ближайшей точки используется для аппроксимации граничных условий Дирихле (и Неймана) на границе как исходной поверхности, так и трехмерной области, в которой рассматривается продолженное уравнение.

Особенностью этого метода является то, что он естественным (в отличие от ряда других методов, см. [Савенков2020]) образом позволяет решать уравнения на поверхностях с *краем* — а также в областях, являющихся объединением многообразий различной (ко)размерности, вложенных в трехмерное пространство.

Целью настоящей работы является попытка рассмотреть предложенный метод в контексте вариационных (слабых) постановок задач, естественные конечномерные аппроксимации которых приводят к аппроксимациям метода конечных элементов — в том числе с использованием предложенного в [Macdonald2011] способа задания граничных условий. В соответствии с идеологией проекционно-сеточных методов, это требует построения соответствующих слабых постановок задач для «продолженного» уравнения.

В настоящей работе предлагается ряд слабых постановок, существенно опирающихся на способ задания поверхности с помощью оператора проекции ближайшей точки. Показывается, что формальные аппроксимации построенных постановок приводят к конечноэлементному аналогу оригинальной версии метода проекции ближайшей точки.

Сначала рассматривается вопрос о способах учета граничных условий Дирихле для модельной двумерной задачи для уравнения Пуассона. Результирующая постановка эффективно использует способ учета граничных условий с использованием проектора ближайшей точки. Далее полученные постановки обобщаются непосредственно на случай решения уравнения теплопроводности на поверхности с краем.

## 2 Метод «ближайшей точки» (closest point method)

В настоящем разделе коротко описаны основные идеи метода решения уравнений на поверхностях, предложенного и развитого в работах [Ruuth2008, Merriman2007, Macdonald2011, Macdonald2008, Macdonald2009]. Он использует неявное представление поверхности и продолжение уравнения на поверхности во вмещающее ее пространство, однако использует с этой целью не распространенный метод множеств уровня (см. обзор в [Савенков2020]), а метод проекции ближайшей точки.

Рассмотрение будем вести на примере модельной краевой задачи для параболического уравнения с оператором оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [Дубровин1986]) на криволинейной поверхности  $\mathcal{F}$  с краем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_{\mathcal{F}} u = 0, \quad (1)$$

дополненного граничным условием нужного вида.

Будем считать, что поверхность  $\mathcal{F}$  целиком расположена внутри пространственной области  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Пусть для произвольной точки  $\mathbf{x} \in \Omega$ , точка  $\mathbf{x}_{\text{cp}}$  — ближайшая к ней точка на поверхности  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathbf{x}_{\text{cp}} = \arg \min_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|,$$

где  $\|\cdot\|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^3$ . Точку  $\mathbf{x}_{\text{cp}}$  будем называть проекцией точки  $\mathbf{x}$  на поверхность  $\mathcal{F}$ , а соответствующий оператор будем обозначать  $\mathbf{P}$ ,

$$\mathbf{x}_{\text{cp}} = \mathbf{P} \mathbf{x}.$$

Оператор  $\mathbf{P}$  является векторнозначным: он отображает область  $\Omega$  на поверхность  $\mathcal{F}$ , рассматриваемую как подмножество в  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ .

Если для поверхности  $\mathcal{F}$  можно задать функцию знакового расстояния  $d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x})$  (например, если  $\mathcal{F}$  — ориентированная поверхность без края), то для оператора  $\mathbf{P}$  справедливо представление:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) \nabla d_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}), \quad d(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{P} \mathbf{x}\|.$$

Так же, как и функция знакового расстояния (или пара таких функций, в случае поверхности с краем), проектор  $\mathbf{P}$  однозначно описывает поверхность  $\mathcal{F}$ ,

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{x}\}.$$

Однако последний способ является более общим: он позволяет описывать геометрию поверхности с краем, неориентируемые многообразия или многообразия коразмерности больше единицы (то есть, в случае трехмерной области,

кривые (корузмерность 2) и точки (корузмерность 3)) — а также объединение объектов различной корузмерности [Macdonald2011].

С помощью проектора  $\mathbf{P}$  легко построить продолжение произвольной функции, заданной на поверхности, во всю область  $\Omega$ : для произвольной функции  $u$ , заданной на поверхности, ее продолжение  $\mathcal{E}[u]$  в  $\Omega$  определим как:

$$\mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P} \mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Таким способом построенный оператор продолжения может быть определен для произвольных функций, заданных в *пространстве*. А именно, любая функция, заданная в пространстве, однозначно определяет функцию на поверхности как свой собственный след на ней. Поэтому для функций, заданных в пространстве, определим оператор  $\mathcal{E}$  следующим образом:

$$\mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P} \mathbf{x}).$$

В этом случае оператор  $\mathcal{E}$  является проектором в том смысле, что  $\mathcal{E}^2 = I$ , где  $I$  — тождественный оператор.

Отметим, что:

- для произвольной функции в  $\Omega$ , постоянной в направлении нормали к  $\mathcal{F}$ ,

$$(\nabla u)|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}}(u|_{\mathcal{F}});$$

- для произвольного векторного поля в  $\Omega$ , касательного к поверхности  $\mathcal{F}$ ,

$$(\nabla \cdot \mathbf{q})|_{\mathcal{F}} = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (q|_{\mathcal{F}}).$$

Тогда в силу свойств проектора  $\mathbf{P}$  и оператора продолжения  $\mathcal{E}$  имеем:

$$\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{P} \mathbf{x}) = \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

В силу того, что восполнение  $\mathcal{E}[u](\mathbf{x})$  постоянно вдоль направлений, нормальных к поверхности, векторное поле  $\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x})$  является касательным к  $\mathcal{F}$ . Отсюда следует, что

$$\nabla \cdot [\nabla \mathcal{E}[u](\mathbf{x})] = \nabla \cdot [\nabla u(\mathbf{P} \mathbf{x})] = \nabla_{\mathcal{F}} \cdot \nabla_{\mathcal{F}} u.$$

Аналогичные продолжения можно построить и для более сложных эллиптических операторов дивергентного типа, см. [März2012].

Таким образом, исходное уравнение (1) может быть продолжено во всю область  $\Omega$ . Далее продолженное уравнение аппроксимируется подходящим

разностным методом на трехмерной сетке, введенной в области  $\Omega$  и не согласованной с геометрией поверхности. Решение исходной задачи на поверхности восстанавливается как след решения трехмерной задачи на поверхности. Строгое обоснование описанных выше построений представлено в работе [März2012]. Детали метода подробно изложены в цитированных выше в данном разделе работах.

Отдельной задачей в рамках рассмотренного подхода является учет граничных условий на границе  $\partial\mathcal{F}$  поверхности  $\mathcal{F}$ . В работе [Macdonald2011] предложен удобный вариант способа их задания, основанный на использовании специального вида оператора продолжения с поверхности в пространство.

В последующих разделах будет рассмотрен конечно-элементный вариант описанного выше подхода. Его основой являются специального вида слабые постановки задачи (1). Их построению будет уделено основное внимание в работе.

### 3 Способы учета граничных условий Дирихле в слабой постановке краевой задачи

Настоящий раздел носит вспомогательный характер, однако важен для дальнейшего рассмотрения. В нем на сравнительно простом примере рассматриваются способы построения слабой постановки задачи, которые далее будут использованы как отправная точка для построения слабых постановок с учетом граничных условий Дирихле с использованием оператора проекции ближайшей точки.

Рассмотрим следующую операторную постановку задачи в области  $\bar{\Omega} \subset \mathbb{R}^2$ : определить функцию  $u \in D(A)$ , удовлетворяющую следующим уравнению в области  $\Omega$  и граничным условиями Дирихле на ее границе  $\Gamma = \partial\Omega$ ,  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ :

$$Au = f, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\Gamma} = g, \quad (2)$$

где  $D(A)$  — область определения оператора  $A$ ,  $f \in \text{Im}(A)$  — правая часть,  $\text{Im}(A)$  — область значений оператора  $A$ . Далее будем считать, что  $A$  — симметричный положительно определенный оператор. В качестве конкретного примера далее рассмотрен оператор Лапласа,  $A = -\Delta$ .

Будем считать, что для оператора  $A$  справедлива следующая формула Грина

$$(Au, v) = a(u, v) + \langle \gamma u, \delta v \rangle,$$

где  $a(\cdot, \cdot)$  — порожденная оператором задачи непрерывная симметричная положительно определенная билинейная форма,  $\gamma$  и  $\delta$  — операторы следа и ко-нормальной производной [Обэн1977]. В случае  $A = -\Delta$  (как симметричного



положительно определенного оператора) такая формула существует. Соответствующая билинейная форма имеет вид

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega;$$

отношение двойственности  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  для достаточно гладких функций определено как

$$\langle u, v \rangle = \int_{\Gamma} uv \, d\gamma;$$

операторы  $\gamma$  и  $\delta$  определены как

$$\gamma u = u|_{\Gamma}, \quad \delta u = \left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right|_{\Gamma},$$

где  $\mathbf{n}$  — вектор единичной внешней нормали к  $\Gamma$ .

Слабая постановка задачи [Обэн1977, Марчук1985] имеет вид: определить функцию  $u \in V_g(\Omega)$ , такую что

$$a(u, v) = f(v), \quad v \in V_0(\Omega), \quad (3)$$

где

$$V_g(\Omega) = \{u \in V(\Omega) : u|_{\Gamma} = g\}, \quad V_0(\Omega) = \{u \in V(\Omega) : u|_{\Gamma} = 0\}.$$

Далее предполагается, что все нужные функции как элементы соответствующих функциональных пространств имеют требуемую гладкость. Конкретный вид пространств далее не важен. В том случае, если это потребуется, будут сделаны соответствующие уточнения.

Слабая постановка (3) является основой для построения аппроксимаций метода конечных элементов, см., например, [Марчук1985].

Опишем коротко способ построения аппроксимаций. Пусть  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega)$  — заданное в области  $\Omega$  ее правильное разбиение на треугольные конечные элементы  $\omega$  (другими словами, два конечных элемента либо имеют пустое пересечение, либо общее ребро, либо общий узел). Будем считать, что

$$\Omega_h = \bigcup_{\omega \in \mathcal{T}_h} \omega = \Omega,$$

то есть область  $\Omega$  и ее граница аппроксимируются точно.

Пусть  $\mathcal{N}$  — множество узлов триангуляции, с каждым из которых связана базисная функция  $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i \in \mathcal{N}$ . Далее можно считать, что используются простейшие непрерывные кусочно-линейные конечные элементы Куранта.

Тогда конечномерное пространство  $V_h(\Omega) \subset V(\Omega)$  может быть определено как

$$V_h(\Omega) = \text{span}_{i \in \mathcal{N}} \varphi_i(\mathbf{x}). \quad (4)$$

Будем считать, что граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  аппроксимируется расчетной сеткой точно, то есть образована ребрами конечных элементов. Пусть  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma$ ,  $\mathcal{N}_\Omega$  и  $\mathcal{N}_\Gamma$  — множество узлов внутри области  $\Omega$  и на ее границе  $\Gamma$ , соответственно. Тогда элементы пространства  $V_h$  имеют вид

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega \cup \mathcal{N}_\Gamma} v_i \varphi_i(\mathbf{x});$$

пространства  $V_{0,h}$ :

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega} v_i \varphi_i(\mathbf{x}); \quad v_i = 0, \quad i \in \mathcal{N}_\Gamma;$$

пространства  $V_{g,h}$ :

$$v_h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathcal{N}_\Omega} v_i \varphi_i(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{N}_\Gamma} g(\mathbf{x}_i) \varphi_i(\mathbf{x}),$$

где  $\mathbf{x}_i$  — координаты узла  $i \in \mathcal{N}_\Gamma$ .

Вектор с компонентами  $v_i$  далее будем обозначать как  $\mathbf{v}$ , величины  $v_i$  будем иногда называть «степенями свободы».

Тогда конечномерные аппроксимации задачи (3) имеют вид: определить функцию  $u \in V_{g,h}(\Omega)$ , такую что

$$a(u_h, v_h) = f(v_h), \quad v_h \in V_{0,h}(\Omega). \quad (5)$$

Последняя задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $u_i$ , см., например, [Марчук1985].

Одной из важных проблем, возникающих при построении конечномерной задачи, является аппроксимация и способ задания граничных условий для сеточного решения  $u_h$ , то есть построение конечномерных пространств  $V_{g,h}(\Omega)$  и  $V_{0,h}(\Omega)$ .

Наиболее простой (рассмотренный выше) способ состоит в построении дискретных аппроксимаций  $\Omega_h$  области  $\Omega$  (ее разбиения на конечные элементы) таким способом, что задание граничного условия сводится к явному заданию степеней свободы решения в узлах расчетной сетки. Однако во многих важных прикладных случаях так сделать нельзя. Примером является задание граничных условий в случае, когда граница  $\Gamma$  области  $\Omega$  является кривой общего положения относительно сетки, то есть не согласована с ней

(другими словами, граница дискретной области  $\Omega_h$  не образована ребрами расчетной сетки).

Существует целый ряд способов решения этой задачи. Примерами являются метод множителей Лагранжа, метод штрафа, метод Нитше [Freund1995, Juntunen2009], методы типа диффузной (или «толстой») границы (см., например, обзор в [Nguen2017], особенно [Maury2001, Ratz2006, Lervåg2014, Li2014, Schlottbom2016]) и многие другие. Ниже будет рассмотрен ряд из них, имеющих непосредственное отношения к дальнейшим построениям.

Вариационно-согласованным способом задания граничных условий в слабой постановке задачи является метод множителей Лагранжа (и метод Нитше, который ниже не рассматривается). В рамках этого подхода граничное условие рассматривается как ограничение на решение, которое формально определяется как элемент пространства  $V(\Omega)$  — а не как элемент пространства  $V_g(\Omega)$ .

Постановка задачи в этом случае имеет вид: определить пару функций  $(u, \lambda) \in V \times \Lambda$ , удовлетворяющих уравнениям:

$$a(u, v) + \langle \lambda, v \rangle = f(v), \quad (6a)$$

$$\langle u - g, \mu \rangle = 0 \quad (6b)$$

для произвольных функций  $(v, \mu) \in V \times \Lambda$ . Здесь  $\Lambda$  — пространство (множителей Лагранжа) достаточно гладких функций с областью определения  $\Gamma$ . Задача вида (6) называется задачей о седловой точке. Теория таких задач, в том числе в абстрактной постановке, рассмотрена, например, в [Brezzi1991]. Важно отметить, что решение  $u$  задачи о седловой точке (6) совпадает с решением вариационной задачи (3), а множитель Лагранжа  $\lambda = -\partial u / \partial \mathbf{n}$  на  $\Gamma$ .

Далее рассмотрим регуляризованный вариант постановки (6), который имеет вид (см. [Brezzi1991, Burger2015]): определить пару функций  $(u_\beta, \lambda_\beta) \in V \times \Lambda$ , удовлетворяющих уравнениям

$$a(u_\beta, v) + \langle \lambda_\beta, v \rangle = f(v), \quad (7a)$$

$$\langle u_\beta - g, \mu \rangle - \beta \langle \lambda_\beta, \mu \rangle = 0, \quad (7b)$$

для произвольных функций  $(v, \mu) \in V \times \Lambda$ . Параметр  $\beta$  в постановке (7) считается малым и положительным. Можно показать, что решения задач (6) и (7) близки при условии малости параметра  $\beta$  и совпадают в пределе  $\beta \rightarrow 0$ . Смысл использования такой регуляризованной постановки заключается в том, что для существования и единственности решения задачи о седловой точке (7) не требуется (как в континуальной, так и в дискретной постановке) соблюдения так называемых inf-sup условий (или условий Ладыженской-Бабушки-Бреззи), которые накладывают ограничения на пару пространств  $V$

и  $\Lambda$  и обеспечивают устойчивость решения задачи, см. [Brezzi1991]. Построение inf-sup устойчивых пар пространств в дискретном случае может являться сложной задачей.

В силу того, что уравнение (7b) справедливо для любой достаточно гладкой функции  $\mu$ , положим формально

$$\mu = \frac{1}{\beta} v \Big|_{\Gamma},$$

и, после подстановки этого выражения в (7b), сложим результат с уравнением (7a). В результате придем к методу штрафа (см. [Babuška1973, Utku1982, Barret1986]): определить функцию  $u_\beta \in V(\Omega)$ , удовлетворяющую уравнению

$$a(u_\beta, v) + \frac{1}{\beta} \langle u_\beta - g, v \rangle = f(v) \quad (8)$$

для произвольной функции  $v \in V(\Omega)$ .

В этой постановке, так же как и в постановках (6) и (7), выполнение граничных условий (точное для (6) или приближенное для (7)) является следствием рассматриваемых уравнений, а не определяется пространством, в котором ищется решение. Таким образом, проблемы построения конечномерных аппроксимаций пространства  $V_g(\Omega)$  при рассмотрении подобных постановок не возникает.

Целый ряд способов аппроксимации задачи с учетом граничных условий Дирихле может быть построен на основе рассмотренных выше вариационных постановок (3), (6) и (7). Во всех этих постановках, однако, требуется, чтобы сетка была согласована с границей  $\Gamma$  области  $\Omega$  в том смысле, что граница  $\Gamma_h$  дискретной области  $\Omega_h$  образована ребрами расчетной сетки.

Рассмотрим теперь случай, когда это условие не выполняется. Будем считать, что область  $\Omega$  содержится в большей области  $\Omega_{\text{ext}}$ ,  $\Omega \subset \Omega_{\text{ext}}$ . Пусть в области  $\Omega_{\text{ext}}$  задана триангуляция  $\mathcal{T}_h = \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$ . Конечномерное пространство, в котором ищутся решения рассмотренных выше задач, определяется как ограничение конечномерного пространства  $V_h(\Omega_{\text{ext}})$  вида (4) на область  $\Omega$ :

$$V_h(\Omega) = \{v|_{\Omega}, v \in V(\Omega_{\text{ext}})\}.$$

В этом случае задать граничное условие на границе  $\Gamma_h$  непосредственно (то есть явным указанием значений степеней свободы конечных элементов) сложно — в силу того, что узлы сетки, вообще говоря, не принадлежат  $\Gamma$ .

Однако пересечение каждого конечного элемента сетки  $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$  при подходящем способе описания границы области (например, с помощью метода множеств уровня) определить не сложно. Поэтому вычисление интегралов в рассмотренных выше постановках также не представляет труда. Сложность

заключается в способе задания пространства множителей Лагранжа в постановке (6). Именно поэтому интерес представляют регуляризованные постановки метода множителей Лагранжа (7) и метода штрафа (8).

Отметим, что в рассмотренных выше постановках интегрирование по пространству всегда осуществляется по области  $\Omega$ . В ряде случаев это не всегда удобно и более удобным является интегрирование по области  $\Omega_{\text{ext}}$ . В частности, определенной (технической) проблемой является интегрирование в ходе процедуры сборки матрицы жесткости задачи по «обрезанным» границей  $\Gamma$  треугольниками конечно-элементной сетки  $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$ .

Лишенная описанных недостатков слабая постановка задачи, сформулированная в виде задачи о седловой точке, была предложена в рамках метода фиктивной области [Glowinski1994]: определить функцию  $u \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$ , удовлетворяющую уравнению

$$a_{\Omega_{\text{ext}}}(u, v) + \langle \lambda, v \rangle_{\Gamma} = f_{\Omega_{\text{ext}}}(v), \quad (9a)$$

$$\langle u - g, \mu \rangle_{\Gamma} = 0, \quad (9b)$$

для произвольной пробной функции  $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$ , где пространство  $V_0(\Omega_{\text{ext}})$  состоит из функций, равных нулю на  $\partial\Omega_{\text{ext}}$ .

В уравнениях выше интегрирование в билинейной форме  $a_{\Omega_{\text{ext}}}(\cdot, \cdot)$  осуществляется по области  $\Omega_{\text{ext}}$  (а не  $\Omega$ ),  $f_{\Omega_{\text{ext}}}$  — подходящее продолжение правой части  $f$ , определенной в  $\Omega$ , на  $\Omega_{\text{ext}}$ .

Можно показать, что ограничение решения задачи (9), на область  $\Omega$  совпадает с решениями задач (3) и (6). Как и ранее, с помощью постановки (9) могут быть построены описанным выше способом регуляризованные постановки задачи о седловой точке и метода штрафа.

## 4 КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «плоский» случай

В настоящем разделе рассмотренные выше вариационные постановки задач модифицируются с учетом того, что для описания границы области, в которой решается задача, используется метод проекции ближайшей точки. Далее показывается, как в рамках предложенного подхода может быть построен конечно-элементный аналог способа учета граничных условий, аналогичный рассмотренному в [Macdonald2011].

Вообще говоря, предложенные постановки имеют независимый интерес. Они могут применяться каждый раз, когда область, в которой ищется решение задачи, описывается проектором ближайшей точки.

Рассмотрим третий вариант слабой постановки, дополняющий постановки, рассмотренные в предыдущем разделе. Сам по себе он не несет допол-

нительных удобств по сравнению с рассмотренными в предыдущем разделе, однако может быть эффективно использован в рамках метода проекции ближайшей точки.

Будем считать, что область  $\Omega$  расположена внутри большей вмещающей ее области  $\Omega_{\text{ext}}$ . Предложим, что существует оператор продолжения  $\mathbb{E}$  функций  $u$ , определенных в области  $\Omega$ , в область  $\Omega_{\text{ext}}$ , с сохранением соответствующего класса гладкости, то есть

$$\mathbb{E} : u \in V(\Omega) \mapsto u_{\text{ext}} \in V(\Omega_{\text{ext}}), \quad u_{\text{ext}}|_{\Omega} = u.$$

Рассмотрим теперь следующую операторную постановку задачи: определить функцию  $u \in D(A)$ , такую, что

$$Au = f, \quad x \in \Omega; \quad u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}[u_g]|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}, \quad (10)$$

где  $u_g \in V_g(\Omega)$  — произвольная функция, удовлетворяющая граничному условию на  $\Gamma$ . Другими словами, потребуем, чтобы решение  $u$  удовлетворяло бы нужному уравнению в области  $\Omega$  и совпадало бы с продолжением  $\mathbb{E}[u_g]$  заданного вида (который определяется оператором  $\mathbb{E}$  и функцией  $u_g$ ) в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ . Очевидно, что в этом случае  $u$  удовлетворяет требуемому граничному условию на  $\Gamma$  в силу определения  $\mathbb{E}$ . Это следует из определения функции  $u_g$  и гладкости функции  $u$  в окрестности границы.

Операторная постановка (10) приводит к следующей слабой постановке задачи: определить функцию  $u \in V(\Omega; \mathbb{E})$ , такую, что

$$a(u, v) = f(v), \quad (11)$$

где  $v \in V_0(\Omega)$  — произвольная функция из  $V_0(\Omega)$ , пространство  $V(\Omega; \mathbb{E})$  определено как:

$$V(\Omega; \mathbb{E}) = \{u \in V(\Omega_{\text{ext}}) : u|_{\Omega} \in V(\Omega), u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}[u_g|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}]\}.$$

Задача построения конечномерной аппроксимации пространства  $V(\Omega; \mathbb{E})$  может быть, как будет показано ниже, решена конструктивно. Однако применение (11) требует еще и построения аппроксимаций пространства  $V_0(\Omega)$ , что является нетривиальной задачей.

Поэтому рассмотрим другой вариант слабой постановки, сформулированный в виде задачи о седловой точке: определить  $(u, \lambda) \in V(\Omega_{\text{ext}}) \times \Lambda(\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega)$ , такую, что

$$\begin{aligned} a(u, v) + (\lambda, v)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} &= f_{\Omega_{\text{ext}}}(v), \\ (u - \mathbb{E}[u_g], \mu)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

для произвольных функций  $(v, \mu) \in V_0(\Omega_{\text{ext}}) \times \Lambda(\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega)$ . В постановке выше правая часть считается продолженной нулем в область  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ , то есть

$$\text{supp } f_{\Omega_{\text{ext}}} = \Omega, \quad f_{\Omega_{\text{ext}}}|_{\Omega} = f.$$

Как и ранее, отталкиваясь от постановки (12), можно построить регуляризованные постановки описанного выше типа. В частности, постановка с использованием метода штрафа будет иметь вид: определить функцию  $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$ , такую что

$$a(u, v) + \frac{1}{\beta}(u - \mathbb{E}[u_g], v)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = f_{\Omega_{\text{ext}}}(v) \quad (13)$$

для произвольной функции  $v \in V(\Omega_{\text{ext}})$ .

Отметим, что интегрирование в билинейных формах  $a(\cdot, \cdot)$  и  $(\cdot, \cdot)_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega}$  осуществляется по непересекающимся областям, дополняющим друг друга до области  $\Omega_{\text{ext}}$ .

Граничные условия для решения  $u$  задачи (12) на границе  $\Gamma$  выполняется в силу того, что вне области  $\Omega$  функция  $u$  совпадает с некоторой функцией, которая (а) является продолжением некоторой функции из  $V_g(\Omega)$  и (б) имеет требуемую гладкость как элемент пространства  $V(\Omega_{\text{ext}})$ . Возникает вопрос о том, как следует выбирать функцию  $u_g \in V(\Omega)$ . При наличии нужного семейства неравенств о вложении и продолжении и теорем о следах (как, например, в случае  $V(\Omega) = W_2^1(\Omega)$ ,  $V(\Gamma) = W_2^{1/2}(\Omega)$ ) функция  $u_g$  может быть выбрана произвольно, но удовлетворяющей условию  $u_g|_{\Gamma} = g$ . Далее будут рассмотрены два конкретных варианта выбора функции  $u_g$ .

Отметим также следующее. В описанной выше постановке значение продолжение  $\mathbb{E}[u_g]$  может определяться как значениями  $u_g$  только на границе области  $\Omega$ , так значениями  $u_g$  в ее внутренних точках области.

В рассмотренных выше в настоящем разделе постановках, для практической реализации требуется интегрировать по пространственной области, включающей в себя «разрезанные» конечные элементы  $\omega \in \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}, h})$ , для которых  $\omega \cap \Omega \neq \omega$ , — и по сегментам границы, соответствующим пересечению границы  $\Gamma$  с конечными элементами. В постановке (б) метода фиктивных областей интегрирование по разрезанным конечным элементам не производится, однако все еще требуется использовать интегрирование по сегментам границы.

Понятно, что указанные подходы имеет «меньшую точность» по сравнению с методами, которые предполагают интегрирование только по  $\omega \in \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$ . Термин «меньшая точность» с использованием строгих оценок в соответствующих функциональных нормах здесь не определяется, однако должен быть понятен интуитивно. Так, например, решение рассмотренных задач в области  $\Omega_{\text{ext}}$  может иметь разрыв производной по направлению нормали на границе  $\Gamma$ . Вместе с тем такой разрыв на  $\Gamma$  не могут иметь конечно-элементные аппроксимации решения (в случае, когда сетка и граница не согласованы). Возможен двойкий выход из такой ситуации: (а) использование «скорректированных» конечномерных пространств функций, с помощью ко-

торых разрыв может быть представлен, или (б) определение такого способа продолжения правой части и коэффициентов задачи в область  $\Omega_{\text{ext}}$ , при котором разрыв нормальной производной не возникает. Первый способ широко используется, например, в рамках расширенного метода конечных элементов (X-FEM, см., например [Moës1999, Sukumar2001]). Анализ второго способа авторам неизвестен, однако, возможно, может быть основан на рассматриваемых ниже способах продолжения решения и уравнения в большую, по сравнению с  $\Omega$ , область с использованием оператора проекции ближайшей точки.

Способом, позволяющим формально избавиться от интегрирования по частям  $\omega \cap \Omega \neq \omega$ , «разрезанных» конечных элементов  $\omega$  и их границам является использование методов типа «диффузной границы». Общая схема их применения в контексте учета граничных условий Дирихле может быть описана следующим образом. Сначала строится слабая постановка задачи, в которой так или иначе (с использованием методов множителей Лагранжа, метода штрафа, метода Нитше или других) главные граничные условия учитываются в слабой постановке задачи, непосредственно в соответствующем вариационном уравнении. Далее интегралы по областям и/или их границам приближенно заменяются на интегралы по областям конечной ширины, окружающим границу. При стремлении ширины «диффузной» области к нулю «диффузные» интегралы по пространству сходятся к соответствующим интегралам по поверхности. В настоящее время существует множество подходов, основанных на этой идее. Для примера укажем работы [Nguyen2017, Maury2001, Ramière2007, Li2014, Lervåg2014, Schlottbom2016] и ссылки там.

Применим такой подход для постановки (13). А именно, рассмотрим характеристическую функцию  $\chi$  области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ ,

$$\chi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 1, & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Далее, пусть  $d(\mathbf{x})$  — расстояние от точки области  $\Omega_{\text{ext}}$  до  $\Gamma$ ,  $d_s(\mathbf{x})$  — соответствующая функция знакового расстояния,

$$d(\mathbf{x}) = \text{dist}(\mathbf{x}, \Gamma) = \min_{\mathbf{y} \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \quad d_s(\mathbf{x}) = \begin{cases} +d(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ -d(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases}$$

Пусть  $S(t)$  — по крайней мере непрерывная функция, такая, что  $S(t) = \text{sign}(t)$  при  $|t| \geq 1$ . В случае, когда от функции  $S(t)$  требуется не более чем просто непрерывность, достаточно взять  $S(t) = t$  при  $-1 < t < +1$ . Определим



семейство функций  $\phi_\epsilon(\mathbf{x})$  как (см., например, [Burger2015]) :

$$\phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \left[ 1 + S \left( -\frac{d_s(\mathbf{x})}{\epsilon} \right) \right], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}},$$

где  $\epsilon > 0$  — малый параметр.

Множество (линию) уровня  $\epsilon$  функции  $d_s(\mathbf{x})$  и ограниченную ей область будет обозначать как

$$\Gamma_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_s(\mathbf{x}) = \epsilon\}, \quad \Omega_\epsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 : d_s(\mathbf{x}) \leq \epsilon\},$$

при этом имеем  $\Gamma_0 = \Gamma$ ,  $\Omega_0 = \Omega$ . Значения функции  $\phi_\epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , отличны от нуля вне области  $\Omega_{+\epsilon}$ , при этом вне области  $\Omega_{-\epsilon}$  ее значения равны единице. Семейство функций  $\phi_\epsilon$  при  $\epsilon \rightarrow 0$  приближает характеристическую функцию  $\chi(\mathbf{x})$  области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ . В соответствии с методом диффузной границы, значение интеграла по области  $\Omega$  может быть приближенно вычислено как

$$\int_{\Omega} f d\Omega \approx \int_{\Omega_{\text{ext}}} f(1 - \phi_\epsilon) d\Omega, \quad \int_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} f d\Omega \approx \int_{\Omega_{\text{ext}}} f \phi_\epsilon d\Omega.$$

Вопросы сходимости такого приближения при  $\epsilon \rightarrow 0$  рассмотрены в различных работах, см., например, [Burger2015, Schlottbom2016].

В результате, заменяя интегралы в (13) на их диффузные приближения, приходим к следующей постановке: определить функцию  $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$ , такую что

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \nabla v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_{\text{ext}}} (u - \mathbb{E}[u_g]) v \phi_\epsilon d\Omega = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega \quad (14)$$

для произвольной функции  $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$ , где последнее пространство состоит функций, обращающихся в ноль на  $\partial\Omega_{\text{ext}}$ .

Рассмотрим теперь два конкретных способа выбора оператора продолжения  $\mathbb{E}$ . Для этого введем в области  $\Omega_{\text{ext}}$  оператор проекции ближайшей точки  $\mathbf{P}$  на  $\Gamma$ , см. раздел 2. Приведенные ниже способы соответствуют двум описанным в [Macdonald2011] способам задания граничных условий.

**Способ 1.** Построим продолжение функции, заданной в  $\Omega$ , используя заданную на  $\Gamma$  функцию  $g$  (причем пока не обязательно  $g = u|_\Gamma$ ):

$$\mathbb{E}_g[u](\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{g,1}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ g(\mathbf{P}(\mathbf{x})), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega. \end{cases} \quad (15)$$

Таким образом построенная функция, вообще говоря, не будет непрерывной в случае, если  $g \neq u|_\Gamma$ .

В силу того, что значения продолжения в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$  зависят только от значений на границе, далее иногда будем писать  $\mathbb{E}_1[u] \equiv \mathbb{E}_1[g]$ , где  $g = u|_\Gamma$ .

**Способ 2.** Построим продолжение другим способом, используя значения  $g$  на границе и значения  $u$  внутри области  $\Omega$ . Конкретно, положим, аналогично [Macdonald2011],

$$\mathbb{E}_g[u](\mathbf{x}) = \mathbb{E}_{g,2}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega, \\ 2g(\mathbf{P}\mathbf{x}) - u(\mathbf{x}_{\text{sym}}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\text{ext}}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $\mathbf{x}_{\text{sym}} = \mathbf{x} + 2[\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}]$ , точка  $\mathbf{x}_{\text{sym}}$  является «отражением» точки  $\mathbf{x}$  относительно границы  $\Gamma$ . Значение продолжения в точке  $\mathbf{x}_{\text{sym}}$  определяется соотношением

$$\frac{1}{2}(u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}_{\text{sym}})) = g(\mathbf{x}_{\text{cp}}), \quad \mathbf{x}_{\text{cp}} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Важно отметить следующее. Если (в обоих случаях)  $u|_{\Gamma} \neq g$ , то построенные продолжения не являются непрерывными. Если же  $g = u|_{\Gamma}$ , то построенные продолжения являются непрерывными. В том случае, если используется соболевская линейка пространств,  $V(\cdot) = W_2^1(\cdot)$ , построенное продолжение будет иметь требуемую гладкость.

При этом для первого способа значение производной продолжения по направлению нормали к  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{x}_{\text{cp}}$  может иметь разрыв. Значение продолжения в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$  не зависит от выбора функции  $u$ . Геометрически продолжение строится как постоянное продолжение значения функции  $g$  в точке границы вдоль внешней нормали к ней.

Для второго способа при выполнении условия  $g = u|_{\Gamma}$  продолжение (а) является непрерывным и (б) имеет непрерывные первые производные вдоль направления внешней нормали к границе  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{x}_{\text{cp}}$ .

Отметим следующее:

- Формально оператор продолжения обоих описанных видов определен для произвольной функции из  $V(\Omega)$ , не обязательно имеющей след  $g$  на границе  $\Gamma$ . Однако в этом случае результат продолжения не будет непрерывной на  $\Gamma$  функцией.

По этой причине условие гладкости продолжения в  $\Omega_{\text{ext}}$  играет принципиальную роль: именно оно гарантирует то, что решение задачи будет иметь след  $g$  на границе  $\Gamma$ .

- В качестве определенной в области  $\Omega$  функции  $u_g$ , фигурирующей в постановке (13), может выступать произвольное (в том числе слабое) решение рассматриваемого уравнения в  $\Omega$ .

Эти соображения приводят к следующей постановке задачи: определить

функцию  $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$ , такую, что

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \nabla v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega_{\text{ext}}} (u - \mathbb{E}_g[u|\Omega]) v \phi_\epsilon d\Omega = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f v (1 - \phi_\epsilon) d\Omega \quad (17)$$

для произвольной функции  $v \in V_0(\Omega_{\text{ext}})$ .

В такой постановке выполнение граничного условия, по существу, является следствием того, что

- в области  $\Omega$  функция  $u$  является решением нужного уравнения;
- в области  $\Omega_{\text{ext}}$  она является (слабым) решением *функционального* уравнения

$$u|_{\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega} = \mathbb{E}_g[u|\Omega];$$

- функция  $u$  в  $\Omega_{\text{ext}}$  обладает требуемой гладкостью, то есть  $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$ .

Оба способа построения оператора продолжения  $\mathbb{E}$  являются конструктивными: как в континуальном, так и в дискретном случае значение оператора продолжения может быть легко вычислено, как только определен оператор  $\mathbf{P}$  проекции ближайшей точки на границу (см. [Иванов2017]).

Основным отличием двух рассмотренных выше способов задания функции  $u_g$  в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$  — то есть способов определения оператора продолжения  $\mathbb{E}$  — является то, что продолжение функции  $u_g$  во втором случае имеет бóльшую гладкость (оно имеет непрерывную производную в направлении нормали к границе), чем в первом случае (когда продолжение является непрерывным, но, вообще говоря, имеет разрыв нормальной производной к границе). Это позволяет считать, что асимптотическая точность сходимости в части выполнения граничных условий на границе во втором случае будет выше, чем в первом. В работе [Macdonald2011] этот факт подтверждается расчетами при использовании конечно-разностных схем.

Наконец, покажем, что рассмотренный подход имеет тесную связь с классическим методом фиктивных областей ([Марчук1989], см. также [Ramière2007]). В терминах настоящего раздела соответствующую слабую постановку задачи из [Ramière2007] можно записать в виде: определить функцию  $u \in V(\Omega_{\text{ext}})$ , удовлетворяющую следующему уравнению:

$$\int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla u \cdot \nabla v d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\bar{\Omega}_{\text{ext}} \setminus \Omega} (u - \mathbb{E}[u_g]) v d\Omega = \int_{\Omega} f v d\Omega, \quad (18)$$

для произвольного  $v \in V(\Omega_{\text{ext}})$ . В терминах работы [Ramière2007] такой подход называется методом «внешнего штрафа» (“exterior penalty”). Термин

«внешний» означает, что в конечномерном случае область  $\Omega$  состоит из конечных элементов, расположенных внутри области  $\Omega$  или имеющих непустое пересечение с ее границей  $\Gamma$ . В этом случае второе слагаемое и правая часть в (18) формально соответствует второму слагаемому и правой части в (13), если формально положить, что сглаженная характеристическая функция  $\phi_\epsilon(\mathbf{x})$  области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$  совпадает с ее характеристической функцией  $\chi(\mathbf{x})$ . Свойства соответствующей конечномерной задачи и способы выбора штрафа  $\beta$  подробно рассмотрены в [Ramière2007].

Таким образом, по-существу, конечно-элементным аналогом предложенных в [Macdonald2011] способов задания граничных условий является метод фиктивных областей (в варианте с диффузной или с четкой границей) при специальном выборе продолжения решения задачи в область  $\Omega_{\text{ext}}$ .

## 5 Конечномерные аппроксимации

Для построения конечномерных аппроксимаций задачи (14) поступим стандартным способом. Введем в области  $\Omega_{\text{ext}}$  конечно-элементную сетку и соответствующие пространства конечных элементов  $V_h(\Omega_{\text{ext}})$ .

Тогда следствием (14) будет следующая конечномерная задача: определить вектор  $\mathbf{u}$ , который является решением следующей системы уравнений:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\mathbf{M}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\text{ext}}) = \mathbf{f}, \quad (19)$$

где элементы матриц  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{M}$  определены как

$$[\mathbf{A}]_{ij} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j (1 - \phi_\epsilon) d\Omega, \quad [\mathbf{M}]_{ij} = \int_{\Omega_{\text{ext}}} \varphi_i \varphi_j \phi_\epsilon d\Omega,$$

$$[\mathbf{f}]_i = \int_{\Omega_{\text{ext}}} f \varphi_i (1 - \phi_\epsilon) d\Omega,$$

где  $i, j \in \mathcal{N}$ ;  $\varphi_i = \varphi_i(\mathbf{x})$ ,  $i \in \mathcal{N}$  — базисные функции,  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  — конечномерная аппроксимация значения оператора продолжения. В силу вида функции  $\phi_\epsilon$  матрица последней системы будет иметь «почти» блочно-диагональный вид — так как слагаемые  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{M}$  будут одновременно отличны нуля только в тех узлах, которые расположены в области  $\text{supp}(1 - \phi_\epsilon) \cap \text{supp}(\phi_\epsilon)$ , которая представляет собой полосу шириной  $2\epsilon$  в окрестности границы  $\Gamma$ . Отметим, что способ построения оператора продолжения  $\mathbb{E}$  не меняется в рассматриваемом конечномерном случае, см. [Иванов2017].

Более того, в случае первого способа построения оператора продолжения значения  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  в узлах сетки, которые расположены в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ , заданы

непосредственно граничным условием  $g$  и никак не зависят от значения решения в узлах, расположенных внутри области  $\Omega$ . Это означает, что значение решения  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  в этих узлах известно.

В том случае, когда используется второй способ построения оператора продолжения, значения функции  $\mathbf{u}_{\text{ext}}$  в узлах сетки, расположенных на границе  $\Gamma$  или в области  $\Omega_{\text{ext}} \setminus \Omega$ , могут быть явно выражены через значения решения  $\mathbf{u}$  в узлах сетки, расположенных внутри области  $\Omega$  аналогично [Macdonald2011], для конечноэлементного варианта — см. [Иванов2017].

Далее систему (19) можно упростить, заменяя матрицу масс  $\mathbf{M}$  на диагонализированную матрицу  $\tilde{\mathbf{M}}$  (“lumped mass matrix”, что может рассматривать как приближенный способ ее вычисления, см., например, [Chen1985, Hinton1976]).

Для обоих (дискретных) способов определения оператора продолжения можно показать (см. [Иванов2017]), что оператор продолжения является линейным, то есть  $\mathbf{u}_{\text{ext}} = \mathbf{E}\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{E}$  — матрица соответствующей размерности. При этом для степеней свободы решения, которые соответствуют узлам сетки, расположенным в  $\Omega$  или на ее границе, оператор  $\mathbf{E}$  является тождественным.

В этом случае систему уравнений (19) принимает вид:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} + \frac{1}{\beta}\tilde{\mathbf{M}}[I - \mathbf{E}]\mathbf{u} = \mathbf{f}.$$

Эта постановка является законченной и может применяться непосредственно.

Формально ее можно привести к виду, в точности совпадающему с предложенным в [Macdonald2011] следующим образом. Пусть  $\mathcal{N}_\omega$  — множество узлов сетки  $\mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}})$ , которые расположены строго внутри области  $\Omega$ ,  $\mathcal{N}_{\tilde{\omega}} = \mathcal{N} \setminus \mathcal{N}_\omega$ . Определим сеточные области  $\omega_h$  и  $\tilde{\omega}_h$  как

$$\omega_h = \bigcup_{i \in \mathcal{N}_\omega} \text{supp } \varphi_i(\mathbf{x}), \quad \tilde{\omega}_h = \mathcal{T}_h(\Omega_{\text{ext}}) \setminus \omega_h, \quad \tilde{\omega}_h = \mathcal{T}(\Omega_{\text{ext}}) \setminus \omega_h.$$

Другими словами, область  $\omega_h$  является объединением конечных элементов, имеющих непустое пересечение с  $\Omega$ ,  $\tilde{\omega}_h$  — ее дополнение до  $\Omega_{\text{ext}}$ . Определим формально в слабой постановке задачи

$$\phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \chi_{\tilde{\omega}_h}(\mathbf{x}).$$

Тогда

$$1 - \phi_\epsilon(\mathbf{x}) = 1 - \chi_{\tilde{\omega}_h}(\mathbf{x}) = \chi_{\omega_h}(\mathbf{x}).$$

Тогда, подставляя соответствующие выражения в (17), формально получим систему уравнений вида:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\mathcal{N}_\omega \mathcal{N}_\omega} & \mathbf{A}_{\mathcal{N}_\omega \mathcal{N}_{\bar{\omega}}} \\ \frac{1}{\beta} \mathbf{E}_{\mathcal{N}_{\bar{\omega}} \mathcal{N}_\omega} & -\frac{1}{\beta} \mathbf{I}_{\mathcal{N}_{\bar{\omega}} \mathcal{N}_{\bar{\omega}}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{\mathcal{N}_\Omega} \\ \mathbf{u}_{\tilde{\mathcal{N}}_\Omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{\mathcal{N}_\Omega} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Эта система уравнений в точности соответствует предложенному в [Macdonald2011] методу, с той лишь разницей, что для построения аппроксимаций задачи используется метод конечных элементов, а не конечных разностей. Индексы у матриц и векторов в последнем уравнении обозначают, что соответствующие строки и столбцы соответствуют множествам узлов  $\mathcal{N}_\omega$  и  $\mathcal{N}_{\bar{\omega}}$ .

## 6 КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «пространственный» случай

Ниже построения предыдущего раздела обобщаются на случай произвольной достаточно гладкой поверхности с краем, вложенной в трехмерное пространство.

### 6.1 Геометрические построения

Рассмотрим одностороннюю поверхность  $\bar{\mathcal{F}}$  с краем  $\partial\mathcal{F}$ , погруженную в трехмерное пространство  $\mathbb{R}^3$ . Тогда

$$\bar{\mathcal{F}} = \mathcal{F} \cup \partial\mathcal{F},$$

где открытая область  $\mathcal{F}$  — внутренняя часть поверхности,  $\partial\mathcal{F}$  — ее граница. В некоторых случаях, когда это не будет вызывать неоднозначности, будем отождествлять обозначения  $\mathcal{F}$  и  $\bar{\mathcal{F}}$ . Будем считать, что  $\mathcal{F}$  и ее край имеют требуемую гладкость.

Поверхность  $\bar{\mathcal{F}}$  будем считать расположенной внутри пространственной области  $\Omega$ . Пусть  $\Omega$  такова, что в каждой ее точке однозначно определены значения проектора ближайшей точки  $\mathbf{P}$  на  $\bar{\mathcal{F}}$  (см. раздел 2).

В зависимости от расположения точки в пространстве, ее проекция на  $\bar{\mathcal{F}}$  принадлежит либо  $\mathcal{F}$ , либо  $\partial\mathcal{F}$ . Это позволяет представить область  $\Omega$  в виде объединения

$$\Omega = \Omega_{\mathcal{F}} \cup \Omega_{\partial\mathcal{F}},$$

где

$$\Omega_{\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{P} \mathbf{x} \in \mathcal{F}\}, \quad \Omega_{\partial\mathcal{F}} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \mathbf{P} \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}\}.$$

Границу  $\partial\Omega_{\mathcal{F}}$  области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  представим в виде

$$\partial\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \Gamma_{\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \cap \partial\Omega, \quad \Gamma_{\partial\mathcal{F}} = \partial\Omega_{\mathcal{F}} \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}.$$

## 6.2 Операторная постановка задачи

Рассмотрим следующую начально-краевую задачу: определить заданную в  $\bar{\mathcal{F}}$  функцию  $u = u(\mathbf{x}, t)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla_{\mathcal{F}} \cdot (-\nabla_{\mathcal{F}} u) &= f, \quad \mathbf{x} \in \mathcal{F}, \\ u|_{\partial\mathcal{F}} &= g, \quad \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}, \end{aligned} \quad (20)$$

с начальным условием  $u(\mathbf{x}, t = 0) = u_0(\mathbf{x})$ .

В соответствии со способом, предложенным в [Macdonald2011] и описанным выше в разделе 2, рассмотрим продолжение уравнения (20) в пространственную область  $\Omega_{\mathcal{F}}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot (\nabla \mathcal{E}[u]) = \mathcal{E}[f], \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}. \quad (21)$$

След решения этого уравнения на  $\mathcal{F}$  является решением уравнения (20).

Граничные условия для уравнения (21) на «боковой» границе  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$  области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  могут быть построены как продолжение граничных условий на  $\partial\mathcal{F}$  исходной задачи (20):

$$u|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}} = \mathcal{E}[u|_{\partial\mathcal{F}}] = \mathcal{E}[g], \quad (22)$$

или, что то же,

$$u(\mathbf{x}) = g(\mathbf{P} \mathbf{x}) = g(\mathbf{x}_{\text{ср}}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \mathbf{x}_{\text{ср}} = \mathbf{P} \mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}.$$

Отметим, что значения решения задачи (21) на части границы  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  полностью определяются как продолжение  $u$  из внутренних точек поверхности  $\mathcal{F}$ . По этой причине граничные условия для (21) на этой части границы не ставятся.

## 6.3 Слабая постановка со штрафом на $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$

Для построения слабой постановки задачи воспользуемся одним из ранее рассмотренных методов, а именно, соответствующим слабой постановке (14) и (17). Другие способы (например, на основе метода множителей Лагранжа) также могут быть рассмотрены, однако здесь этого не делается.

Тогда, в соответствии с (14), слабая постановка задачи имеет вид: определить функцию  $u \in V(\Omega)$ , такую что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E}[u] \nabla v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (u - \mathbb{E}[u_g]) v \phi_{\epsilon} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathcal{E}[f] v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega \quad (23) \end{aligned}$$

для произвольной функции  $v \in V_0(\Omega)$ . Здесь  $\phi_{\epsilon}$  — сглаженная характеристическая функция области  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , пространство  $V_0(\Omega)$  определено как

$$V_0(\Omega) = \{v \in V(\Omega) : v|_{\partial\Omega \setminus \Gamma_{\mathcal{F}}} = 0\}.$$

Оператор продолжения  $\mathbb{E}$  может быть построен точно так же, как и в предыдущем разделе, на основе оператора проектора ближайшей точки на «боковую» поверхность  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$  области  $\Omega_{\mathcal{F}}$ .

Отметим, что в последнем вариационном уравнении используется два оператора продолжения. Роль первого —  $\mathcal{E}$  — продолжить уравнение с поверхности в пространственную область  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , роль второго —  $\mathbb{E}$  — продолжить заданную в  $\mathcal{F}$  функцию в (большую) область  $\Omega$ .

В силу того, что  $\text{supp}(1 - \phi_{\epsilon}) \supset \Omega_{\mathcal{F}}$ , оператор продолжения  $\mathcal{E}$  должен быть определен не только в области  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , но и в области  $\Omega_{\partial\mathcal{F}}$ . Конкретный способ его задания будет указан ниже.

Снова, аналогично предыдущему разделу, рассмотрим два способа построения оператора продолжения  $\mathbb{E}$ .

**Способ 1.** Определим оператор  $\mathbb{E}$  с помощью оператора  $\mathcal{E}$  как

$$\mathbb{E}_1[u](\mathbf{x}) \equiv \mathcal{E}[u](\mathbf{x}) = u(\mathbf{P}(\mathbf{x})).$$

В этом случае значения функции, заданной в  $\Omega_{\mathcal{F}}$  продолжаются в область  $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$  ее значениями на границе  $\partial\mathcal{F}$  поверхности  $\mathcal{F}$ . Здесь считается, что оператор продолжения  $\mathcal{E}$  действует на функции, заданные в  $\Omega_{\mathcal{F}}$  описанным в разделе 2 способом.

Этот способ аналогичен способу 1 предыдущего раздела, см. (15).

**Способ 2.** Рассмотрим вспомогательный оператор  $\tilde{\mathbf{P}}$ , который определим как [Macdonald2011]:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(2\mathbf{P}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}).$$



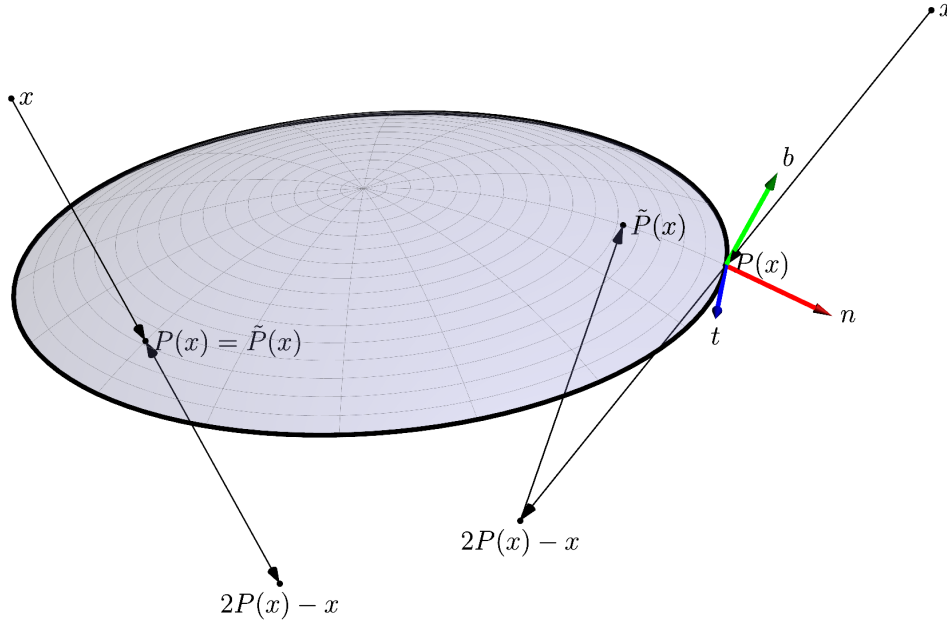


Рис. 1. К определению оператор  $\mathbf{P}$  и  $\tilde{\mathbf{P}}$

Из геометрических соображений (см. рисунок 1) следует, что для точек  $\mathbf{x}$ , проекции которых принадлежат краю поверхности, справедливо соотношение

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{P}(\mathbf{x}),$$

а для точек, проекции которых принадлежат внутренним точкам  $\mathcal{F}$ , значения проекторов  $\tilde{\mathbf{P}}$  и  $\mathbf{P}$  совпадают:

$$\tilde{\mathbf{P}}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}(\mathbf{x}).$$

Другими словами, в области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  значения обоих проекторов совпадают,

$$\mathbf{P} \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{P}} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}.$$

Определим теперь оператор продолжения  $\tilde{\mathcal{E}}$  как

$$\tilde{\mathcal{E}}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{P} \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ 2u(\mathbf{P} \mathbf{x}) - u(2\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Таким образом, значение продолжения в точке  $\mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}$  выбирается так, что бы значение граничного условия в точке  $\mathbf{P} \mathbf{x}$  являлось результатом линейной интерполяции между точками  $\mathbf{x}$  и  $2\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x}$ .

Далее положим

$$\mathbb{E}_2[u] = \tilde{\mathcal{E}}[u].$$

При этом значения операторов  $\mathcal{E}$  и  $\tilde{\mathcal{E}}$  в области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  совпадают.

Теперь поступим так же, как в предыдущем разделе, и заменим в определении введенных операторов значения  $u|_{\partial\mathcal{F}}$  на значения заданной на  $\partial\mathcal{F}$  функции  $g$ . Соответствующие определения будут иметь вид:

$$\mathbb{E}_{g,1}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathcal{E}[u], & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ g(\mathbf{P}\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}} \end{cases}$$

и

$$\mathbb{E}_{g,2}[u](\mathbf{x}) = \begin{cases} u(\mathbf{P}\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}, \\ 2g(\mathbf{P}\mathbf{x}) - u(2\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}. \end{cases}$$

Напомним, что для точек  $\mathbf{x} \in \Omega_{\partial\mathcal{F}}$  значения  $\mathbf{P}\mathbf{x}$  принадлежат границе  $\partial\mathcal{F}$  поверхности  $\mathcal{F}$ . Более того, для точек  $\mathbf{x} \in \Omega_{\mathcal{F}}$  имеем

$$u(\mathbf{P}\mathbf{x}) = 2g(\mathbf{P}\mathbf{x}) - u(2\mathbf{P}\mathbf{x} - \mathbf{x}).$$

Здесь справедливы все комментарии к определению проекторов, представленные в предыдущем разделе. А именно, если продолжение будет гладкой функцией, то оно будет иметь значение  $g$  на  $\partial\mathcal{F}$  и  $\mathcal{E}[g]$  на «боковой» поверхности  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$  области  $\Omega_{\mathcal{F}}$ .

Как и ранее, аппроксимации обоих операторов продолжения легко могут быть построены в дискретно случае, см. [Иванов2017]. Разница между ними аналогична таковой в предыдущем разделе: при втором способе задания гладкость продолженной функции в окрестности границы  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  выше, чем в первом.

В силу того, что внутри области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  значения построенного оператора совпадают со значениями оператора  $\mathcal{E}$ , будем использовать обозначения  $\mathbb{E}_{g,1,2} = \mathcal{E}_g$  или просто  $\mathbb{E} = \mathcal{E}$ , если нет необходимости подчеркивать разницу между ними.

Таким образом, приходим к следующей постановке задачи (которая является аналогом постановки (17)): определить  $u \in V_0(\Omega)$ , такую, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} uv(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \\ \int_{\Omega} \nabla \mathcal{E}_g[u] \nabla v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\Omega} (u - \mathcal{E}_g[u])v\phi_{\epsilon} d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathcal{E}_g[f]v(1 - \phi_{\epsilon}) d\Omega \quad (24) \end{aligned}$$

для произвольной функции  $v \in V_0(\Omega)$ . При этом в билинейной форме задачи и в слагаемом, задающем штраф, оператор продолжения — один и тот же. Аналогично разделу (5), для постановки (24) могут быть построены конечно-элементные аппроксимации. Как и ранее, она может быть применена в случае, когда поверхность  $\mathcal{F}$  не согласована с геометрией расчетной сетки.

Для полноты отметим, что функция  $\phi_\epsilon$  соответствует сглаженной характеристической функции области  $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$ . Конструктивный способ ее задания удобно дать в терминах рассматриваемой задачи. Это может быть сделано следующим образом.

Пусть функция  $\tilde{d}(\mathbf{x})$  определена как

$$\tilde{d}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}_{\text{ср}} - \mathbf{x}_{\text{ср},2}\|,$$

где  $\mathbf{x}_{\text{ср}} = \mathbf{P} \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x}_{\text{ср},2} = \mathbf{P}(2\mathbf{P} \mathbf{x} - \mathbf{x})$ . Таким образом, построенная функция не является функцией расстояния  $d = d(\mathbf{x})$  от точки  $\mathbf{x}$  пространства до границы  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ , однако (а) совпадает с ней, если поверхность  $\mathcal{F}$  является частью плоскости (имеет нулевую кривизну) и отличается от  $d(\mathbf{x})$  на величину  $\mathcal{O}(d)$  при  $d \rightarrow 0$ , (б) монотонно убывает с убыванием функции расстояния и (в) равна нулю на границе  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ .

В заключение настоящего раздела обратим внимание на следующее:

- Любой из рассмотренных в настоящем разделе операторов продолжения может быть формально определен для любой достаточно гладкой функции  $u \in V(\Omega)$  (а не только для функция на поверхности  $\mathcal{F}$ ):

$$\mathcal{E}[u] = \mathcal{E}[u|_{\mathcal{F}}].$$

- Для использованных построений, вообще говоря, не требуется, чтобы был определен след функции, заданной в трехмерной области  $\Omega$  на одномерной границе  $\partial\mathcal{F}$ .
- Билинейная форма (относительно  $u$ ) задачи не является симметричной. Но, при условии требуемой гладкости продолжения, является непрерывной и положительно определенной в соболевской линейке пространств. Это обеспечивает применимость леммы Сеа и, как следствие, корректность задачи.
- Использованные операторы продолжения, при определенных ограничениях на гладкость поверхности  $\mathcal{F}$  и ее границы, являются непрерывными. Это следует из регулярности функции расстояния и знакового расстояния в окрестности поверхности  $\mathcal{F}$ , см. например, [Ambrosio1998, Krantz1981, Foot1984, Krantz1999].

## 6.4 Слабая постановки со штрафом на $\partial\mathcal{F}$

В рассмотренной выше постановке задачи, в том числе для продолженного уравнения, граничное условие полностью определяется своими значениями на границе  $\partial\mathcal{F}$  области  $\mathcal{F}$ . Этот факт можно использовать для построения еще одного класса слабых постановок для решения уравнений на поверхности с краем методом проекции ближайшей точки. Рассмотрим их, для простоты, для стационарного случая уравнения Пуассона на поверхности  $\mathcal{F}$ .

Напомним, что граница области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  представляется в виде объединения  $\Omega_{\mathcal{F}} = \Gamma_{\mathcal{F}} \cup \Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ . В силу способа построения оператора продолжения  $\mathcal{E}$  значения решения  $u$  на части границы  $\Gamma_{\mathcal{F}}$  определяются исключительно его значениями на поверхности  $\mathcal{F}$ , то есть решением *уравнения* (20). Значения же решения краевой задачи на поверхности  $\Gamma_{\partial\Omega}$  определяются граничным условием на  $\partial\mathcal{F}$ . Для задачи в области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  они могут быть записаны в виде:

$$u|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}} = \mathcal{E}[g]|_{\Gamma_{\partial\mathcal{F}}},$$

или, другими словами:

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{P}\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}, \quad \mathbf{P}\mathbf{x} \in \partial\mathcal{F}.$$

Это условие эквивалентно

$$u(\mathbf{x}, t) = \mathcal{E}[u], \quad \mathbf{x} \in \Gamma_{\partial\mathcal{F}}; \quad u|_{\partial\mathcal{F}} = g.$$

Другими словами, считается, что  $u$  определено всюду в  $\Omega_{\mathcal{F}}$  и на  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$  как продолжение с поверхности и ее границы.

Далее учет граничных условий может быть осуществлен в слабой постановке задачи тем или иным вариационным способом, например, методом штрафа или вариационно-согласованным методом множителей Лагранжа. Ниже рассмотрен первый вариант.

В этом случае с учетом сделанных построений можно формально прийти к следующей слабой постановке: определить функцию  $u \in V_0(\Omega)$ , такую, что

$$\int_{\Omega_{\mathcal{F}}} \nabla \mathcal{E}[u] \cdot \nabla v \, d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{\partial\mathcal{F}} (u|_{\partial\mathcal{F}} - g)v \, d\gamma = \int_{\Omega_{\mathcal{F}}} f v \, d\Omega \quad (25)$$

для любых функций  $v \in V_0(\Omega)$ .

С использованием стандартных аргументов видно, что решение такой задачи, если оно существует, будет удовлетворять уравнению (20) и (приближенно, с точностью, определяемой величиной штрафа  $\beta \ll 1$ ) граничным условиям на  $\partial\mathcal{F}$ . В рассмотренной постановке соответствующее слагаемое метода штрафа обеспечивает выполнение граничного условия на  $\partial\mathcal{F}$ . Его

выполнение на  $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$  является следствием того, что в ее точках значения  $u$  определяются описанным выше оператором продолжения, см. (22).

Для того чтобы иметь возможность использовать расчетные сетки, заданные в области  $\Omega$  и не согласованные с геометрией области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  и поверхностью  $\mathcal{F}$ , снова воспользуемся методом диффузной границы.

Сначала рассмотрим интеграл по  $\partial\mathcal{F}$  в (25), который заменим на объемный.

Формально это можно сделать введением меры Дирака  $\delta_{\partial\mathcal{F}}$  на линии  $\partial\mathcal{F}$  и последующим приближением ее гладкой « $\delta$ -образной» функцией с компактным носителем,

$$\int_{\partial\mathcal{F}} (u - g)v \, d\gamma = \int_{\mathbb{R}^3} (u - g)v \delta_{\partial\mathcal{F}} \, d\Omega \approx \int_{\mathbb{R}^3} (u - g)v \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega, \quad (26)$$

где  $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}(\mathbf{x})$ ,  $\epsilon > 0$  — семейство функций с компактным носителем, таких, что для произвольной достаточно гладкой функции  $v$  справедливо:

$$\int_{\mathbb{R}^3} \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega = 1, \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^3} v \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \, d\Omega = \int_{\partial\mathcal{F}} v \, d\gamma, \quad \text{supp } \delta_{\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \subseteq T(\epsilon, \partial\mathcal{F}) \subseteq \Omega, \quad (27)$$

где  $v$  — произвольная достаточно гладкая функция точки пространства,

$$T(\epsilon, \partial\mathcal{F}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F}) \leq \epsilon \},$$

— трубчатая окрестность радиуса  $\epsilon$  границы  $\partial\mathcal{F}$ ,  $\text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F})$  — кратчайшее расстояние от точки пространства до границы  $\partial\mathcal{F}$  поверхности  $\mathcal{F}$ . Помимо этого будем считать, что  $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} \geq 0$ , хотя это условие и не является необходимым для дальнейшего. Более подробно построение функций  $\delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)}$  будет рассмотрено ниже.

Отметим также, что последнее равенство в (26) является приближенным и переходит в точное в предел  $\epsilon \rightarrow 0$ . На самом деле небольшой модификацией его можно сделать точным, см. [Kublik2016, Kublik2018] — и таким образом, отказаться от рассмотрения описанной  $\delta$ -образной последовательности (значение интеграла по границе в точности будет равняться объемному с точностью до ошибок сеточной аппроксимации). Это позволяет избавиться от параметра метода  $\epsilon$ , задающего радиус трубчатой окрестности, как от величины, которая определяет точность приближенного равенства в (26).

Рассмотрим теперь способ задания регуляризованной  $\delta$ -функции Дирака, отнесенной к линии  $\partial\mathcal{F}$ .

Пусть  $\phi^{(\epsilon)}(r)$  — семейство функций, являющихся при  $\epsilon \rightarrow 0$  симметричной аппроксимацией  $\delta$ -функции Дирака на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Способы построения

таких аппроксимаций, в том числе для целей вычислительного анализа, рассмотрены, например, в [Zahedi2010, Hosseinia2015] (см. также обзор и ссылки в этих работах). Для дальнейшего важно, что элементы последовательности удовлетворяют минимальным необходимым требованиям, в частности,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \phi^{(\epsilon)} \rightarrow \delta_{\mathbb{R}^2}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \phi^{(\epsilon)} d\Omega = \int_{B_0(\epsilon)} \phi^{(\epsilon)} d\Omega = 1,$$

где сходимость понимается в смысле распределений (\*-слабая),  $B_0(\epsilon)$  — шар радиуса  $\epsilon$  с центром в точке  $0$  в  $\mathbb{R}^2$ .

Далее положим, что значения функций  $\delta_{\partial\Omega}^{(\epsilon)}$  зависят только от расстояния от точки пространства до ее проекции на  $\partial\mathcal{F}$  и определяются функцией  $\phi^{(\epsilon)}$ , то есть

$$\delta_{\partial\mathcal{F}}^\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{1}{\alpha} \phi^{(\epsilon)}(r), \quad r = \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\mathcal{F}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{P}_{\partial\mathcal{F}} \mathbf{x}\|,$$

где  $r$  — расстояние от точки  $\mathbf{x}$  до  $\partial\mathcal{F}$ ,  $\mathbf{P}_{\partial\mathcal{F}}$  — оператор проекции ближайшей точки на  $\mathcal{F}$ ,  $\alpha$  — константа, обеспечивающая условие нормировки в (27).

Важно отметить, что способ выбора  $\phi^{(\epsilon)}(r)$  имеет большое значение. В частности, от выполнения *условия моментов* принципиально зависит величина ошибки между  $\delta$ -функцией и ее регулярным приближением и, как следствие, точность приближенного равенства в (26) в смысле порядка малости относительно величины параметра  $\epsilon$ , см., например, [Zahedi2010, Hosseinia2015] и ссылки там.

Помимо этого, требование симметричности аппроксимации  $\delta$ -функции (то есть зависимости ее значений только от  $r$ ) не является необходимым — возможно использование любой ее аппроксимации, в том числе как произведения аппроксимаций одномерных  $\delta$ -функций (в этом случае носитель уже не имеет форму шара).

В результате придем к следующей слабой постановке задачи: определить функцию  $u \in V_0(\Omega)$ , такую, что

$$\int_{\Omega_{\mathcal{F}}} \nabla \mathcal{E}[u] \cdot \nabla v d\Omega + \frac{1}{\beta} \int_{T(\epsilon, \partial\mathcal{F})} (u - g) v \delta_{\partial\mathcal{F}}^{(\epsilon)} d\Omega = \int_{\Omega_{\mathcal{F}}} f v d\Omega \quad (28)$$

для любых функций  $v \in V_0(\Omega)$ .

Далее необходимо заменить интегрирование по области  $\Omega_{\mathcal{F}}$  в пространственных интегралах на интегрирование по области  $\Omega$ . Это может быть сделано с использованием его «диффузного» приближения, которое уже было построено выше и может быть использовано без изменений.

Дальнейшее исследование рассмотренных в настоящем разделе постановок проводить не будем.

Отметим только, что для того, чтобы (28) имело смысл, аргументы соответствующих билинейных форм должны быть определены не только в  $\Omega_{\mathcal{F}}$ , но и всюду в  $\Omega$ . Если считать, что области  $\Omega \setminus \Omega_{\mathcal{F}}$  значения  $u$  продолжены в соответствии со вторым описанным выше способом, то в континуальном случае слагаемое со штрафом равно нулю, а в дискретном — является малой величиной, убывающей при стремлении шага расчетной сетки к нулю.

## 7 Заключение

В настоящей работе:

- Дана интерпретация способа учета граничных условий типа предложенного в [Macdonald2011] в контексте вариационных постановок краевых задач и проекционно-сеточных методов их решения. Несмотря на то что конкретные способы задания функциональных пространств не рассматривались, всюду, где они возникают, можно использовать стандартную соболевскую линейку пространств.

Структура полученных постановок, как в континуальном, так и в дискретном случае, позволяет провести их теоретический анализ непосредственно, используя стандартные способы анализа метода конечных элементов. Некоторой особенностью работы и рассмотренных постановок является использование идей метода диффузной границы, теоретическое изучение которого как в континуальном, так и в дискретном случае рассмотрено в целом ряде работ, опубликованных в последние годы.

- На примере рассмотренной модельной задачи показан способ построения слабой постановки специального вида, которая в дальнейшем непосредственно обобщается на случай конечноэлементного метода решения уравнений на поверхностях в рамках метода проекции ближайшей точки.
- В качестве «финального» варианта постановки, предполагающего дальнейшую аппроксимацию, в основном рассматриваются постановки типа метода штрафа. Однако проектор ближайшей точки (совместно с методом «диффузной границы» или независимо) может быть применен для построения других вариантов постановок, в частности основанных на методе множителей Лагранжа.

## Список литературы

- [Дубровин1986] Дубровин Б.А., Новиков С.П., Фоменко А.Т. Современная геометрия: методы и приложения, М.: Наука, 1986. 760 с.
- [Иванов2017] Иванов А.В. , Савенков Е.Б. Моделирование и визуальное представление динамики поверхности с подвижным краем на стационарной неструктурированной сетке // Научная визуализация. 2017, том 9, № 2, с. 64-81.
- [Марчук1985] Марчук, Г.И., агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы: М.: Мир, 1985. – 432 с.
- [Марчук1989] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1989. 608 с.
- [Обэн1977] Обэн, Ж.-П. Приближенное решение эллиптических краевых задач. М.: Мир, 1977. – 383 с.
- [Савенков2020] Савенков Е.Б. Решение уравнений в частных производных на поверхностях: обзор алгоритмов // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2020. № 5. 18 с.
- [Салимов2013] Салимов В.Г., Ибрагимов Н.Г., Насыбуллин А.В., Салимов О.В. Гидравлический разрыв карбонатных пластов. М.: Нефтяное хозяйство, 2013. 471 с.
- [Economides2007] Экономидес М., Олини Р., Валько П. Унифицированный дизайн гидроразрыва пласта. От теории к практике. М.: Институт компьютерных исследований, 2007. 236 с.
- [Adalsteinsson2003] Adalsteinsson, D. Sethian, J.A. Transport and diffusion of material quantities on propagating interfaces via level set methods // J. Comput. Phys., 185, 271–288, 2003.
- [Ambrosio1998] Ambrosio, L., Mantegazza, C. Curvature and distance function from a manifold // The Journal of Geometric Analysis. vol. 8, iss. 5, pp. 723–748. 1998.
- [Babuška1973] Babuška, I. The Finite Element Method with Penalty // Mathematics of Computation Vol. 27, No. 122 (Apr., 1973), pp. 221-228.
- [Bertalmio2001] Bertalmio, M., Cheng, L.T., Osher, S., Sapiro, G. Variational problems and partial differential equations on implicit surfaces // J. Comput. Phys., 174, 759–780, 2001.



- [Brezzi1991] Brezzi, F., Fortin, M. Mixed and Hybrid Finite Element Methods // Springer Series in Computational Mathematics, 1991.
- [Burger2015] Burger, M., Elvetun, O.L., Schlottbom, M. Analysis of the Diffuse Domain Method for Second Order Elliptic Boundary Value Problems // Found Comput Math (2017), vol. 17, issue 3, pp. 627–674.
- [Barret1986] Barrett, J.W., Elliott, C.M. Finite Element Approximation of the Dirichlet Problem Using the Boundary Penalty Method // Numer. Math. 49, 343-366 (1986)
- [Berger2014] Berger M., Tagliasacchi A., Seversky L., Alliez, P., Levine, J., Sharf, A., Silva, C. State of the Art in Surface Reconstruction from Point Clouds // EUROGRAPHICS 2014 / S. Lefebvre and M. Spagnuolo. STAR — State of The Art Report, 2014.
- [Bradman2007] Bradman, J. A level-set method for computing the eigenvalues of elliptic operators defined on compact hypersurfaces // J. Sci. Comput., 37, 282–315, 2007.
- [Chen1985] Chen, C. M., Thomee, V. The lumped mass finite element method for a parabolic problem // J. Austral. Math. Soc. Ser. B 26 (1985), 329-354.
- [Cheng2002] Cheng, L., Burchard, P., Merriman, B., Osher, S. Motion of curves constrained on surfaces using a level set approach // J. Comput. Phys. 175 (2002), pp. 604–644.
- [Deckelnick2010] Deckelnick, K., Dziuk, G., Elliott, C.M, Heine, C.-J. An  $h$ -narrow band finite-element method for elliptic equations on implicit surfaces // IMA Journal of Numerical Analysis (2010) 30, pp. 351-376.
- [Demlow2007] Demlow, A., Dziuk, G. An adaptive finite element method for the Laplace–Beltrami operator on implicitly defined surfaces // SIAM J. Numer. Anal., 45, 421–442, 2007.
- [Dziuk1988] Dziuk, G. Finite elements for the Beltrami operator on arbitrary surfaces // Partial Differential Equations and Calculus of Variations (S. Hildebrandt & R. Leis eds). Lecture Notes in Mathematics, vol. 1357. Berlin, Springer, pp. 142–155.
- [Dziuk2007a] Dziuk, G., Elliott, C.M. Finite elements on evolving surfaces // IMA J. Numer. Anal., 27, 262–292, 2007.
- [Dziuk2007b] Dziuk, G., Elliott, C.M. Surface finite elements for parabolic equations // J. Comput. Math., 25, 385–407, 2007.

- [Dziuk2008a] Dziuk, G., Elliott, C.M, Eulerian finite element method for parabolic PDEs on implicit surfaces // *Interfaces and Free Boundaries* 10 (2008), pp. 119–138.
- [Dziuk2010] Dziuk, G., Elliott, C.M. An Eulerian approach to transport and diffusion on evolving implicit surfaces // *Comput Visual Sci* (2010) 13:17–28.
- [Eilks2008] Eilks, C., Elliott, C.M. Numerical simulation of dealloying by surface dissolution via the evolving surface finite element method // *Journal of Computational Physics* 227 (2008) 9727–9741.
- [Foot1984] Foote, R.L. Regularity of the distance function // *Proceedings of the American Mathematical Society*, Volume 92, Number 1, pp. 153-155. 1984.
- [Freund1995] Freund, J., Stenberg, R. On weakly imposed boundary conditions for second-order problems // *Proceedings of the Ninth Int. Conf. Finite Elements in Fluids, Venice 1995*. M. Morandi Cecchi *et al.*, Eds. pp. 327-336.
- [Greer2006a] Greer, J.B. An Improvement of a Recent Eulerian Method for Solving PDEs on General Geometries // *Journal of Scientific Computing*, Vol. 29, No. 3, 200,
- [Greer2006b] Greer, G.B., Bertozzi, A.L., Sapiro, G. Fourth order partial differential equations on general geometries // *Journal of Computational Physics* 216 (2006) 216–246.
- [Glowinski1994] Glowinski, R., Pan, T.-W., Periaux, J. A fictitious domain method for Dirichlet problem and applications // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* vol. 111, Issues 3–4, 1994, pp. 283-303.
- [Hinton1976] Hinton, E., Rock, T., Zienkiewicz, O. C. A note on mass lumping and related processes in finite element method // *Earthquake engineering and structural dynamics*, vol. 4 (1976), pp. 245-249.
- [Hosseinia2015] Hosseini, B., Nigam, N., Stockie, J., On regularizations of the Dirac delta distribution // *Journal of Computational Physics*, Volume 305, 15 January 2016, Pages 423-447.
- [Juntunen2009] Juntunen, M., Stenberg, R. Nitsche’s method for general boundary conditions // *Math. Comp.* 78(267), 1353–1374 (2009).
- [Kimmel1997] Kimmel, R. Intrinsic scale space for images on surfaces: The geodesic curvature flow // *Graph. Models Image Process.*, 59 (1997), pp. 365–372.

- [Krantz1981] Krantz, S.G., Parks, H.R. Distance to  $C^k$  Hypersurfaces // Journal of Differential Equations, 40, pp. 116-120. 1981.
- [Krantz1999] Krantz, S.G., Parks, H.R. The Geometry of Domains in Space. Birkhäuser Advanced Texts Basler Lehrbücher), 1999th Edition, Birkhäuser, 308 pp.
- [Kublik2016] Kublik, C., Tsai, R., Integration over curves and surfaces defined by the closest point mapping // Res. Math. Sci. 3 (2016), Paper No. 3, 17.
- [Kublik2018] Kublik, C., Tsai, R. An extrapolative approach to integration over hypersurfaces in the level set framework // Math. Comp. 87 (2018), 2365-2392.
- [Lervåg2014] Lervåg, K.Y., Lowengrub, J. Analysis of the diffuse-domain method for solving PDEs in complex geometries // arXiv preprint arXiv:1407.7480, 2014.
- [Li2014] Li, X., Lowengrub, J., Rätz, A., Voigt, A. Solving PDEs in complex geometries: a diffuse domain approach // Communications in Mathematical Sciences, 7(1):81, 2009.
- [Liang2013] Liang, J., Zhao, H. Solving Partial Differential Equations on Point Clouds // Article in SIAM Journal on Scientific Computing 35(3), 2013.
- [Macdonald2008] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. Level set equations on surfaces via the Closest Point Method // J. Sci. Comput., 35 (2008), pp. 219–240.
- [Macdonald2011] Macdonald, C.B., Brandman, J., Ruuth, S.J. Solving eigenvalue problems on curved surfaces using the Closest Point Method // J. Comput. Phys., 230 (2011), pp. 7944–7956.
- [Macdonald2009] Macdonald, C.B., Ruuth, S.J. The implicit Closest Point Method for the numerical solution of partial differential equations on surfaces // SIAM J. Sci. Comput., 31 (2009), pp. 4330–4350.
- [Macdonald2013] Macdonald, C., Merriman, B., Ruuth, S. Simple computation of reaction-diffusion processes on point clouds // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. 110. 2013.
- [März2012] März, T., Macdonald, C.B. Calculus on Surfaces with General Closest Point Functions // SIAM J. Numer. Anal., 50(6), 3303–3328.
- [Maury2001] Maury, B. A fat boundary method for the Poisson problem in a domain with holes // Journal of Scientific Computing, 16(3):319–339, 2001.

- [Merriman2007] Merriman, B., Ruuth, S.J. Diffusion generated motion of curves on surfaces // *Journal of Computational Physics* 225 (2007) pp. 2267–2282.
- [Moës1999] Moës, N., Dolbow, J., Belytschko, T. A finite element method for crack growth without remeshing // *Int. J. Numer. Methods Engrg.* 46 (1) (1999) 131-150.
- [Nguen2017] Nguyen, L.H., Stoter, S.K.F., Ruess, M., Uribe, M.A.S., Schillinger, D. The diffuse Nitsche method: Dirichlet constraints on phase-field boundaries // *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 113, issue 4, 2018. pp. 601-633.
- [Olshanskii2009] Olshanskii, M.A., Reusken, A., Grande, J. A finite Element Method for Elliptic Equations on Surfaces // *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. 47, No. 5, pp. 3339–3358, 2009.
- [Olshanskii2009a] Olshanskii, M. Reusken, A. A finite element method for surface PDEs: matrix properties // *Numer. Math.*, 114:491–520, 2009.
- [Olshanskii2012] Olshanskii, M.A. Reusken, A., Xu, X. A Volume Mesh Finite Element Method for PDEs on Surfaces // *European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering (ECCOMAS 2012)* J. Eberhardsteiner et.al. (eds.) Vienna, Austria, September 10-14, 2012.
- [Ramière2007] Ramière, I., Angot, P., Belliard, M. A fictitious domain approach with spread interface for elliptic problems with general boundary conditions // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:766–781, 2007.
- [Ratz2006] Ratz, A., Voigt, A. PDEs on Surfaces: A Diffuse Interface Approach // *Comm. Math.Sci.*, Vol. 4, No. 3, pp. 575–590, 2006.
- [Ruuth2008] Ruuth, S.J., Merriman, B. A simple embedding method for solving partial differential equations on surfaces // *Journal of Computational Physics*, 227, pp. 1943–1961, 2008.
- [Schlottbom2016] Schlottbom, M. Error analysis of a diffuse interface method for elliptic problems with Dirichlet boundary conditions // *Applied Numerical Mathematics* 109 (2016) pp. 109–122.
- [Sukumar2001] Sukumar, N., Chopp, D.L., Moës, N., Belytschko, T. Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method // *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 190 (2001) pp. 6183-6200.

- [Utku1982] Utku, M., Carey, G.F. Boundary penalty techniques // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering Vol. 30, Issue 1, April 1982, pp. 103-118.
- [Xu2003] Xu, J.-J., Zhao, H.-K. An Eulerian formulation for solving partial differential equations along a moving interface // J. Sci. Comput., 19, 573–594, 2003.
- [Zahedi2010] Zahedi, S., Tornberg, A.-K. Delta function approximations in level set methods by distance function extension // Journal of Computational Physics 229 (2010) 2199–2219.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Метод «ближайшей точки» (closest point method)</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Способы учета граничных условий Дирихле в слабой постановке краевой задачи</b>	<b>6</b>
<b>4</b>	<b>КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «плоский» случай</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Конечномерные аппроксимации</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>КЭ вариант метода проекции ближайшей точки: «пространственный» случай</b>	<b>20</b>
6.1	Геометрические построения . . . . .	20
6.2	Операторная постановка задачи . . . . .	21
6.3	Слабая постановка со штрафом на $\Gamma_{\partial\mathcal{F}}$ . . . . .	21
6.4	Слабая постановки со штрафом на $\partial\mathcal{F}$ . . . . .	26
<b>7</b>	<b>Заключение</b>	<b>29</b>