А. Р. Итс, В. Б. Матвеев, Координатная асимптотика для уравнения Шредингера с быстроосциллирующим потенциалом, *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 1975, том 51, 119–122

Итс А.Р., Матвеев В.Б.

КООРДИНАТНАЯ АСИМПТОТИКА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С БЫСТРООСЦИЛЛИРУЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

I. Координатная асимптотика. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y''(x)+[\lambda-\tau(x)p(\varphi(x))]y(x)=0, \quad x>0, \quad \lambda>0. \tag{1}$$

Здесь $p(x)$, $\tau(x)$, $\varphi(x)$ – вещественные функции, причем $p(x)$ непрерывна, $p(x+1)=p(x)$ и интеграл от $p(x)$ по промежутку $[0,1]$ равен нулю. Относительно φ и τ предполагается, что $\varphi(x)\in C^3$, существует предел $\lim\limits_{x\to\infty}\varphi'(x)=\pm\infty$, $\tau(x)\in C^2$ и для достаточно больших значений $x_0>0$ функции

$$\frac{\tau\varphi''}{\varphi'^2}, \frac{\varphi''}{\varphi'^2}, \frac{\tau'}{\varphi'}, \frac{\tau''}{\varphi'^2}, \frac{\varphi'''\tau}{\varphi'^3}, \frac{\varphi'''}{\varphi'^3}, \tag{2}$$

абсолютно интегрируемы в промежутке $[x_0,\infty)$. Перечисленным выше условиям удовлетворяют, например, пары функций $\{\varphi(x)=x^{\alpha+1}$, $\alpha>0$, $\tau(x)=x^\beta$, $\beta<\alpha\}$, $\{\varphi(x)=x\ln x$, $\tau(x)=1\}$.

Для построения координатной асимптотики при $x\to\infty$ решений уравнения (I) используется следующее дифференциальное уравнение с периодическим потенциалом

$$f''(x)+\omega^{-2}[\lambda-\nu p(x)]f(x)=0, \tag{3}$$

где ν и ω вещественные числовые параметры. Хорошо известно [I], что при почти всех λ уравнение (3) имеет два линейно независимых решения вида

$$f_{1,2}(x)=e^{\pm i\mu(\omega,\nu,\lambda)x}\chi_{1,2}(x,\omega,\nu,\lambda), \tag{4}$$

где $\chi_{1,2}$ – периодические функции от x с периодом 1, а функция $\mu(\omega,\nu,\lambda)$ фиксирована условием $0\le\mu(\omega,\nu,\lambda)\le\pi$, когда λ/ω^2 принадлежит первому интервалу устойчивости уравнения (3).

Формулируемое ниже утверждение показывает, что функция $\mu(\omega,\nu,\lambda)$ играет основную роль в описании координатной асимптотики уравнения (I).

Теорема I. Пусть p,φ,τ удовлетворяют всем условиям настоящего пункта. Тогда уравнение (I) имеет решения $y_{1,2}$ со следующей асимптотикой при $x\to\infty$:

$$y_{1,2}(x,\lambda)=\exp\{\pm i\int_{x_0}^{x}\mu(\varphi'(t),\tau(t),\lambda)\varphi'(t)dt\}+O(1). \tag{5}$$

Асимптотика (5) равномерна относительно $\lambda \in K$, где K - любой компакт из $R^+ = \{\lambda : \lambda > 0\}$, $x_0 = x_0(K)$.

Наметим план доказательства теоремы I. Решения $\varphi(x,\lambda)$, $\theta(x,\lambda)$ уравнения (3) фиксированные условиями $\varphi(0,\lambda)=0$, $\varphi'(0,\lambda)=1$, $\theta(0,\lambda)=1$, $\theta'(0,\lambda)=0$ удовлетворяют линейным уравнениям типа Вольтерра:

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{\omega}{\kappa}\sin\frac{\kappa x}{\omega} + \int_0^x \frac{\nu}{\omega\kappa}\sin\frac{\kappa}{\omega}(x-t)p(t)\varphi(t,\kappa)dt, \ \kappa>0,\ \kappa^2=\lambda, \tag{6}$$

а уравнение для θ получается заменой свободного члена в (6) на $\cos(\omega^{-1}\kappa x)$. Итерации этих интегральных уравнений имеют асимптотический характер при $\omega \to \pm\infty$, если $\nu = O(\omega^2)$. Впрочем, для наших целей достаточно изучить асимптотику φ и θ, а также их производных по x, ω и ν до второго порядка включительно при $\omega \to \pm\infty$ и $\nu = O(\omega)$. Как показывает конкретный анализ, это условие обеспечивает справедливость при достаточно больших значениях ω важного неравенства

$$0 < F(\lambda,\omega,\nu) < 1, \qquad F = \frac{\varphi'(1,\lambda)+\theta(1,\lambda)}{2}. \tag{7}$$

Известно [I], что оценка (7) влечет за собой вещественность функции $\mu(\omega,\nu,\lambda)$, откуда в свою очередь вытекает осциллятоpный характер асимптотики (6) и отсутствие решений, принадлежащих классу L_2 у уравнения (I).

Имея в своем распоряжении асимптотические оценки для решений φ и θ, а также их производных нетрудно найти асимптотику μ, $\chi_{1,2}$ и их производных при $\omega \to \infty$, $\nu = O(\omega)$. После этого легко проверяется, что функция $\Psi_{1,2}(x,\lambda)$

$$\Psi_{1,2}(x,\lambda) = e^{\pm i\int_{x_0}^{x}\mu(\varphi'(t),\tau(t),\lambda)\varphi'(t)dt}\chi_{1,2}(\varphi(x),\varphi'(x),\tau(x),\lambda), \tag{8}$$

удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Psi''_{1,2} + [\kappa^2 - \tau(x)p(\varphi(x))]\Psi_{1,2} = \Psi_{1,2}\eta(x,\kappa),$$

причем из абсолютной интегрируемости функций (2) вытекает абсолютная интегрируемость η в соответствующем промежутке. Последнее обстоятельство позволяет применить метод эталонного уравнения, чтобы установить существование точных решений уравнения (I), имеющих $\Psi_{1,2}$ своей асимптотикой. Из анализа поведения решений уравнения (3) при $\omega \to \pm\infty$ ясно, что $\chi_{1,2}(\varphi(x),\varphi'(x),\tau(x),\lambda)$ стремится к единице при $x \to \infty$, откуда и следует окончательный результат теоремы I.

В заключение сделаем несколько замечаний по поводу асимптотических формул (5) и (8).

а). Заменяя $\mu(\omega,\tau,\lambda)$ разложением этой функции в ряд по обратным степеням ω, можно извлекать из (5) более простые и явные (однако имеющие меньшую общность!) асимптотические формулы. В частности, для $\tau=1$, $\varphi(x)=x^{1+\alpha}$, $\alpha>0$, $\alpha\neq(2n-2)^{-1}$, $n=2,3,4,\ldots$, решения $y_{1,2}$ имеют, при соответствующем выборе постоянной x_0, следующую асимптотику при $x\to\infty$:

$$y_{1,2}=exp\left\{\pm ikx\pm i\,S_\alpha(x,k)\right\}+O(x^{-\alpha}),$$
$$S_\alpha(x,k)=\sum_{n=2}^{[\alpha^{-1}]+1}\frac{\mu_n(k)\,x^{1-(2n-2)\alpha}}{(1+\alpha)^{2n-2}[1-\alpha(2n-2)]}, \tag{9}$$

где $[\alpha^{-1}]$ обозначает целую часть числа α^{-1}, а коэффициенты μ_n вещественные функции от k. При $\alpha=(2m-2)^{-1}$ следует заменить $x^{1-(2m-2)\alpha}[1-(2m-2)\alpha]^{-1}$ на $\ln x$ в предпоследнем слагаемом суммы S_α, а последнее слагаемое, вклад которого в асимптотику равен в этом случае $O(x^{-2\alpha})$, можно опустить.

в). Асимптотическая формула (8) для решений уравнения (I) оказывается справедливой и в случае $\varphi(x)=x$, если при этом $\tau(x)$ удовлетворяет условию $|\tau^{(n)}(x)|\leq C(1+x)^{-\alpha-n}$, $\alpha>0$, $n=0,1,2$. Формула (8) и вытекающие из нее спектральные следствия были, для этого случая, найдены М.М.Скригановым [2]. Обоснование формулы (I) в этой ситуации отличается от доказательства теоремы I.

с). В недавней работе одного из авторов [3] было найдено условие существования волновых операторов для осциллирующих потенциалов, состоящее в требование квадратичной суммируемости при почти всех $k\in R^1$, включая $k=0$, интеграла $\mathcal{J}(x)$

$$\mathcal{J}(x)=\int_x^\infty e^{ikx}q(x)\,dx\,. \tag{10}$$

Асимптотические формулы настоящей работы и работы [2] показывают, что это условие неулучшаемо. Например, для потенциала $q(x)=\sin x^\alpha$ условие $\mathcal{J}(x)\in L_2(R^+)$ выполняется при $\alpha>3/2$. Но при $\alpha\leq 3/2$ из асимптотики (9) ясно, что волновые операторы не существуют. Асимптотические формулы (8) позволяют в этом случае построить обобщенные волновые операторы и развить теорию рассеяния по схеме, предложенной в работах [3], [4]. Недостаток места не позволяет нам входить в эти построения.

Литература

I. Титчмарш Э.Ч. Разложение по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т.II. М., 1962, 555 с.

2. Скриганов М.М. О собственных значениях оператора Шредингера, расположенных на непрерывном спектре.-Записки

научных семинаров ЛОМИ, т.38, 1973, с.149-153.
3. Матвеев В.Б. Волновые операторы и положительные собственные значения для уравнения Шредингера с осциллирующим потенциалом. - ТМФ, т.15, № 3, 1973, с.353-367.
4. Матвеев В.Б., Скриганов М.М. Задача рассеяния для радиального уравнения Шредингера с медленно убывающим потенциалом. - ТМФ, т.10, № 2, 1972, с.146-159.