Механика

УДК 531.396

ЗАДАЧА БУЛГАКОВА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ И РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

В. Н. Жермоленко[1], Р. Темолтзи-Авила[2]

Рассматривается неоднородное волновое уравнение с диссипацией при наличии неопределенности во внешнем воздействии. Исследуется проблема отыскания решений с максимально возможными амплитудами. Предложен способ решения этой проблемы, основанный на методе разделения переменных Фурье и задаче Булгакова о максимальном отклонении решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с внешними неопределенными возмущениями. Обосновано применение метода Фурье. Исследовано свойство робастной устойчивости рассмотренного волнового уравнения.

Ключевые слова: внешние возмущения, ряды Фурье, максимальные отклонения.

An inhomogeneous wave equation with dissipation in the presence of an external uncertain perturbation is considered. The problem of finding solutions with the maximum possible amplitudes is investigated. A method for solving this problem based on the Fourier method of separating variables and the Bulgakov problem of the maximum deviation of solutions of second-order ordinary differential equations with external uncertain perturbations is proposed. The application of the Fourier method is justified. The robust stability property of the considered wave equation is investigated.

Key words: external perturbations, Fourier series, maximum deviations.

1. Введение. Задаче Булгакова о накоплении возмущений (максимальном отклонении) [1] посвящено большое количество работ, в частности [2–7]. Она по-прежнему привлекает внимание исследователей и находит новые приложения (см., например, [8–10]). При изучении возмущаемых колебательных систем с неопределенностью, в том числе систем с распределенными параметрами, может быть поставлена задача отыскания в заданном функциональном множестве такого возмущения, которое вызывает наибольший дестабилизирующий эффект, т.е. приводит к колебаниям с максимально возможными амплитудами. Такое возмущение называется *наихудшим.* При исследовании колебательных объектов, описываемых уравнениями в частных производных, для нахождения решения в явном виде часто применяется метод разделения переменных Фурье. При этом исходная задача редуцируется к соответствующим задачам для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с неопределенностью во внешнем или параметрическом возмущении. Такой подход, основанный на методе Фурье и задаче Булгакова о максимальном отклонении, был использован в [7] и предлагается в настоящей работе.

2. Постановка задачи. Рассматривается неоднородное волновое уравнение с диссипацией, описывающее, в частности, колебания струны длины L, защемленной на концах, с нулевыми начальными условиями, при наличии неопределенности во внешнем воздействии:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\mu \frac{\partial y}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + u\,(x,t)\,, \quad (x,t) \in \Omega := [0,L] \times [0,+\infty)\,, \quad 0 < \mu < \frac{\pi c}{L}; \tag{1}$$

$$y\,(0,t) = 0, \quad y\,(L,t) = 0; \tag{2}$$

$$y\,(x,0) = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial t}\,(x,0) = 0; \tag{3}$$

[1] *Жермоленко Виктор Николаевич* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. высшей математики РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина, e-mail: zhermol@yandex.ru.

[2] *Темолтзи-Авила Рауль* — канд. матем. наук, проф. отделения математики и физики Автономного ун-та штата Идальго (Мексика), e-mail: temoltzi@uaeh.edu.mx.

Zhermolenko Victor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Gubkin Russian State University, Higher Mathematics Department.

Temoltzi Avila Raul — PhD of Mathematical Sciences, Professor, Autonomous University of the State of Hidalgo (Mexico), Academic Area of Mathematics and Physics.

$$\|u(x,t)\| = \sup_{(x,t)\in\Omega} |u(x,t)|\,;$$

$$u\,(x,t) \in \mathcal{U}_{\Omega} := \left\{ u\,(x,t) : \|u\,(x,t)\| \leqslant \delta;\; u\,(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) : u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k} \right\}; \tag{4}$$

$$\mathcal{U}_{\delta_k} := \left\{ u_k(t) \in \mathcal{KC}(\mathbb{R});\; \Delta := \{\delta_k \geqslant 0\;:\; \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k = \delta\};\;\; \exists\,\{\delta_k\} \in \Delta\,:\, |u_k(t)| \leqslant \delta_k \right\},$$

где $\mathcal{KC}(\mathbb{R})$ — множество кусочно-непрерывных на $\mathbb{R}$ функций; Δ — семейство последовательностей $\{\delta_k\}$ неотрицательных чисел, таких, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \delta_k = \delta$.

Распространим определение устойчивости при постояннодействующих возмущениях, введенное Г.Н. Дубошиным и И.Г. Малкиным [11, 12] для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, на уравнение в частных производных (1)–(4). Отметим, что, в отличие от [11, 12], начальные условия для гиперболического уравнения (1) считаются фиксированными и нулевыми.

Если в уравнении (1) внешнее возмущение отсутствует — $u(x,\ t) \equiv 0$, то объект будет находиться в состоянии покоя, так как граничные и начальные условия (2) и (3) нулевые. Соответствующее тривиальное решение волнового уравнения (1) обозначим через $\tilde{y}(x,\ t) \equiv 0$ и назовем его *невозмущенным.*

Норму решения $y(x,\ t)$ волнового уравнения (1) определим следующим образом:

$$\|y(x,\ t)\| = \max\left\{ |y(x,\ t)|\,,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial\, x}\right| \right\},\quad (x,\ t) \in \Omega.$$

Определение 1. Невозмущенное решение (тривиальное решение $\tilde{y}(x,\ t) \equiv 0$ уравнения (1)–(3) при отсутствии внешнего возмущения $u(x,\ t)$) называется робастно устойчивым по отношению к постояннодействующему возмущению $u\,(x,\ t) \in \mathcal{U}_{\Omega}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ существует другое число $\eta(\varepsilon) > 0$, такое, что при выполнении условия $\|u(x,\ t)\,\| \leqslant \delta < \eta(\varepsilon)$ для всех $t \geqslant 0$ всякое решение уравнения (1) удовлетворяет при $t > 0$ неравенству $\|y(x,\ t)\| < \varepsilon$.

Целью работы является исследование робастной устойчивости (в смысле определения 1) гиперболического уравнения (1) с начально-краевыми условиями (2), (3) и внешним возмущением (4).

3. Применение метода Фурье и задачи Булгакова. Для получения решения начально-краевой задачи (1)–(4) можно применить метод разделения переменных Фурье, в соответствии с которым решение следует искать в виде ряда

$$y\,(x,\ t)\ = \sum_{k=1}^{+\infty} y_k(t) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \tag{5}$$

где $y_k(t) : (0,\ \infty) \to \mathbb{R}$ — неизвестные функции (коэффициенты Фурье), подлежащие определению. Согласно (3) они удовлетворяют нулевым начальным условиям $y_k(0) = 0$, $\dot{y}_k(0) = 0$. Нулевые граничные условия (2) для решения (5) выполняются автоматически.

Обоснование применения метода Фурье для получения классического решения начально-краевой задачи (1)–(4), как известно [13], заключается в доказательстве равномерной по $t \in\ [0,\infty)$ и $x \in\ [0,\ L]$ сходимости ряда Фурье (5), а также четырех рядов, полученных почленным дифференцированием (5) по t и x до двух раз включительно.

Теорема. *Для существования классического решения начально-краевой задачи* (1)–(4) *достаточно, чтобы сходился ряд* $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\delta_k$.

Доказательство теоремы приведено в приложении.

Подставим ряд (5) в уравнение (1). Учитывая представление (4) для внешнего возмущения $u(x,t)$ в виде ряда Фурье, приравняем коэффициенты Фурье перед собственными функциями $\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ в обеих частях уравнения (1). В результате получим, что функции $y_k(t)$ и $u_k(t)$ удовлетворяют линейному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами и внешним возмущением:

$$\ddot{y}_k + 2\mu\dot{y}_k + \omega_k^2 y_k =\ u_k(t),\quad y_k(0) = 0,\quad \dot{y}_k(0) = 0,\quad u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}, \tag{6}$$

где $\omega_k = k\pi c/L$, причем неравенство $0 < \mu < \omega_k$ справедливо для всех $k \in \mathbb{N}$ в силу условия $0 < \mu < \pi c/L$.

Решением каждого уравнения (6) с кусочно-непрерывный (разрывной) правой частью $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$ будем называть абсолютно непрерывную вектор-функцию $\bar{y}_k(t) = (y_k(t),\ \dot{y}_k(t))^\top$ (где $^\top$ обозначает транспонирование), определяемую в смысле [14]. Уравнения (6) при различных $k \in \mathbb{N}$ в некоторых работах называют "амплитудными уравнениями" для соответствующих мод колебаний.

Из (5) следует, что для решения волнового уравнения (1) и решений совокупности уравнений (6) выполняются следующие неравенства:

$$|y(x,\ t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k(t)|, \quad \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\dot{y}_k(t)|, \quad \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi}{L}|y_k(t)|, \tag{7}$$

которые будут использованы далее при оценке нормы $\|y(x,\ t)\|$ решения волнового уравнения (1).

Рассмотрим для каждого уравнения (6) задачу Булгакова с нефиксированным временем [2, 3], состоящую в определении наихудшего внешнего возмущения $u_k^*(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$, которому соответствуют колебания $y_k(t)$ и $\dot{y}_k(t)$ с максимально возможными амплитудами. Как отмечалось, эта оптимизационная задача решалась, например, в [4–10]. В этих работах получены следующие утверждения.

Наихудшим для (6) является возмущение $u_k^*(t) = \delta_k \operatorname{sign} \dot{y}_k(t)$; при действии наихудшего возмущения на фазовой плоскости уравнения (6) существует единственная замкнутая траектория — центрально-симметричный предельный цикл C_k^*, который глобально и орбитально асимптотически устойчив; он найден с помощью решения задачи Булгакова о максимальном отклонении на полупериодах колебаний; предельный цикл C_k^* представляет собой границу ∂D_k^* множества достижимости D_k^* при $t \to \infty$ из всех точек внутри C_k^* и точек на его орбите; получены параметрические уравнения предельного цикла C_k^*; найдены экстремальные в смысле расстояния от начала координат точки цикла C_k^*; вычислены максимальные значения переменных $y_k(t)$ и $\dot{y}_k(t)$ на предельном цикле C_k^*:

$$\max|y_k(t)| = \alpha_k^*, \quad \max|\dot{y}_k(t)| = \beta_k^*, \quad t \geqslant 0, \quad (y_k,\ \dot{y}_k) \in C_k^*,$$

где

$$\alpha_k^* = \frac{\delta_k}{\omega_k^2}\frac{1+a_k}{1-a_k}, \quad \beta_k^* = \frac{\delta_k}{\omega_k}\frac{2b_k}{1-a_k}, \quad \omega_k = \frac{k\pi c}{L},$$

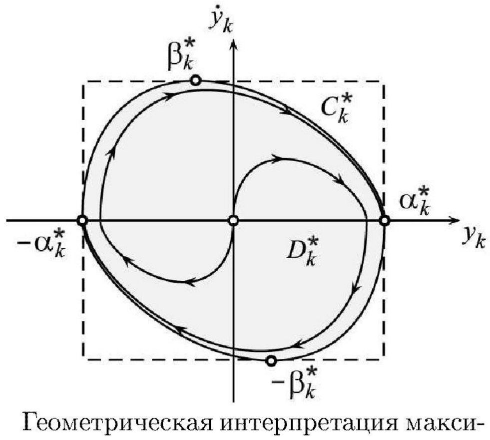
$$a_k = \exp\left(-\frac{\pi\mu}{\lambda_k}\right), \quad b_k = \exp\left[-\frac{\mu}{\lambda_k}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_k}\right)\right], \quad \lambda_k = \sqrt{\omega_k^2 - \mu^2}.$$

Величины $\alpha_k^* > 0$, $\beta_k^* > 0$ имеют следующий смысл. Если возмущение $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$ произвольно, то соответствующее решение уравнения (6) $\bar{y}_k(t) = (y_k(t),\ \dot{y}_k(t))^\top$ с начальными условиями $\bar{y}_k(0) \in D_k^*$ удовлетворяет оценкам

$$0 < |y_k(t)| \leqslant \alpha_k^*, \quad 0 < |\dot{y}_k(t)| \leqslant \beta_k^*, \quad t \geqslant 0. \tag{8}$$

Значения α_k^*, β_k^* называются *максимально возможными отклонениями* координат $y_k(t)$, $\dot{y}_k(t)$ решения уравнения (6) (рисунок).

На рисунке изображены две экстремальные траектории, выходящие из начала координат. Направленная вверх траектория соответствует определению функции $\operatorname{sign} \dot{y}_k(t)$ как непрерывной справа, т.е. $\operatorname{sign} 0 = +1$, направленная вниз — определению функции $\operatorname{sign} \dot{y}_k(t)$ как непрерывной слева, т.е. $\operatorname{sign} 0 = -1$. Обе экстремальные траектории при $t \to \infty$ наматываются изнутри на единственный предельный цикл C_k^*.



Геометрическая интерпретация максимально возможных отклонений α_k^*, β_k^*

4. Робастная устойчивость. Норму решения $\bar{y}_k(t) = (y_k(t),\ \dot{y}_k(t))^\top$ каждого уравнения (6) по аналогии с

$$\|y(x,\ t)\| = \max\left\{|y(x,\ t)|,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right|\right\}, \quad (x,\ t) \in \Omega,$$

определим следующим образом:

$$\|\bar{y}_k(t)\| = \max\{|y_k(t)|,\ |\dot{y}_k(t)|\}, \quad t \geqslant 0.$$

Для невозмущенного решения уравнения (6), т.е. тривиального решения $\bar{y}_k(t) \equiv 0$ при $u_k(t) \equiv 0$ и нулевых начальных условиях $\bar{y}_k(0) = 0$, также можно ввести определение робастной устойчивости (см. [8]) только по отношению к постояннодействующему возмущению $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$.

Определение 2. Невозмущенное решение, т.е. тривиальное решение $\bar{y}_k(t) \equiv 0$ (при $\bar{y}_k(0) = 0$, $u_k(t) \equiv 0$), уравнения (6) называется робастно устойчивым по отношению к постояннодействующему возмущению $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon_k > 0$ существует другое число $\eta_k(\varepsilon_k) > 0$, такое, что при выполнении условий $\bar{y}_k(0) = 0$, $|\, u_k(t)\,| \leqslant \delta_k < \eta_k(\varepsilon_k)$ для всех $t \geqslant 0$ всякое решение уравнения (6) удовлетворяет при $t > 0$ неравенству $\|\bar{y}_k(t)\| < \varepsilon_k$.

Оценку нормы $\|y(x,\, t)\|$ решения волнового уравнения (1) можно найти, получив согласно неравенствам (7) оценки для норм $\|\bar{y}_k(t)\| = \max\{|y_k(t)|,\, |\dot{y}_k(t)|\}$, $k \in \mathbb{N}$, решений каждого уравнения второго порядка (6) с учетом оценок (8) для $|y_k(t)|$, $|\dot{y}_k(t)|$.

Введем обозначения

$$p_k = \frac{1}{\omega_k^2}\frac{1+a_k}{1-a_k}, \quad q_k = \frac{1}{\omega_k}\frac{2b_k}{1-a_k}.$$

Тогда $\alpha_k^* = \delta_k p_k$, $\beta_k^* = \delta_k q_k$, $\|\bar{y}_k(t)\| = \delta_k \max\{p_k,\ q_k\}$. Неравенство $\|\bar{y}_k(t)\| < \varepsilon_k$, где ε_k — произвольная малая величина, запишется в эквивалентной форме: $\delta_k \max\{p_k,\ q_k\} < \varepsilon_k$ и будет выполняться при $\delta_k < \frac{\varepsilon_k}{\max\{p_k,\ q_k\}}$, т.е. будем иметь $\eta_k(\varepsilon_k) = \frac{\varepsilon_k}{\max\{p_k,\ q_k\}}$.

Заметим, что a_k, b_k монотонно возрастают при увеличении k, причем $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$.

Так как

$$\frac{p_k}{q_k} = \frac{1+a_k}{2\omega_k b_k} < \frac{1}{\omega_k b_k} < \frac{L}{k\pi c b_1} \ \to\ 0,$$

где $b_1 = \exp\left[-\frac{\mu}{\lambda_1}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]$, $\lambda_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \mu^2}$, то $p_k < q_k$ начиная с $\hat{k} = \left[\frac{L}{\pi c b_1}\right]$, где $[...]$ — целая часть числа. Если $\frac{L}{\pi c b_1} \leqslant 1$, то $p_k < q_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$ и $\eta_k(\varepsilon_k) = \varepsilon_k \frac{k\pi c(1-a_k)}{2Lb_k}$, здесь множитель перед ε_k также стремится к нулю, поскольку $\frac{k\pi c(1-a_k)}{2Lb_k} < \frac{k\pi c(1-a_k)}{2Lb_1} \to 0$ при $k \to \infty$ согласно правилу Лопиталя. Таким образом, величина $\eta_k(\varepsilon_k)$ из определения 2 найдена в явном виде: $\eta_k(\varepsilon_k) = \varepsilon_k\frac{k\pi c(1-a_k)}{2Lb_k}$. Следовательно, если $\delta_k < \varepsilon_k\frac{k\pi c(1-a_k)}{2Lb_k}$, то $\|\bar{y}_k(t)\| < \varepsilon_k$.

Относительно свойства робастной устойчивости тривиального решения $\bar{y}_k(t) \equiv 0$ (при $\bar{y}_k(0) = 0$, $u_k(t) \equiv 0$) каждого уравнения (6) сохраняется тот же вывод, что и в [8, 9, 12].

Тривиальное решение $\bar{y}_k(t) \equiv 0$ (*при* $\bar{y}_k(0) = 0$, $u_k(t) \equiv 0$) *каждого уравнения* (6) *робастно устойчиво по отношению к постояннодействующему возмущению* $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$, *так как действительные части корней характеристического уравнения для* (6) *отрицательны.*

Очевидно, что условия Гурвица являются критерием робастной устойчивости тривиального решения $\bar{y}_k(t) \equiv 0$ (*при* $\bar{y}_k(0) = 0$, $u_k(t) \equiv 0$) *каждого уравнения* (6) *по отношению к постояннодействующему возмущению* $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$.

Перейдем к анализу робастной устойчивости (в смысле определения 1) невозмущенного решения $\tilde{y}(x,\ t) \equiv 0$ волнового уравнения (1) по отношению к постояннодействующему возмущению $u(x,t) \in \mathcal{U}_\Omega$ при нулевых граничных и начальных условиях (2), (3).

Пусть внешнее воздействие в волновом уравнении (1) имеет вид

$$u^*(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \delta_k \operatorname{sign}(\dot{y}_k(t)) \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right).$$

Это воздействие можно назвать “наихудшим” внешним возмущением для (1), так как в качестве неопределенных в (4) коэффициентов Фурье $u_k(t) \in \mathcal{U}_{\delta_k}$ здесь взяты наихудшие внешние возмущения для каждого из уравнений (6). Найдем оценку для нормы $\|y(x,\ t)\|$ решения волнового уравнения (1).

Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольная малая величина, а $r \in (0,\ 1)$ — произвольный параметр. Определим следующее параметризованное семейство последовательностей: $E(\varepsilon) = \left\{\varepsilon(1-r)r^{k-1}\right\}$, $r \in (0,\ 1)$. Будем считать, что последовательность $\{\varepsilon_k\} \in E(\varepsilon)$, если $\varepsilon_k = \varepsilon(1-r)r^{k-1}$. Тогда $\varepsilon_k > 0$ также произвольная малая величина, причем $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k = \varepsilon\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-r)r^{k-1} = \varepsilon$, поскольку $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}(1-r)r^{k-1}$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом $(1-r)$ и знаменателем $r < 1$. Так как $\alpha_k^* = \delta_k p_k$, $\beta_k^* = \delta_k q_k$, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\alpha_k^* = \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\delta_k p_k < \sum\limits_{k=1}^{+\infty}\varepsilon_k$ в силу $\delta_k < \frac{\varepsilon_k}{\max\{p_k,\ q_k\}}$ и $p_k \leqslant \max\{p_k,\ q_k\}$.

Аналогично $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \beta_k^* = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \delta_k q_k < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k$. Считая, что $\{\varepsilon_k\} \in E(\varepsilon)$, из первых двух неравенств (7) и оценок (8) получаем

$$|y(x,\ t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |y_k(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k^* < \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k = \varepsilon, \quad \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} |\dot{y}_k(t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \beta_k^* < \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon_k = \varepsilon. \quad (9)$$

Оценки (9) попутно доказывают равномерную сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |y_k(t)|$, $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |\dot{y}_k(t)|$, $t \geqslant 0$.

Для последнего из неравенств (7), учитывая, что $\delta_k < \frac{\varepsilon_k}{\max\{p_k,\ q_k\}}$, получаем

$$\left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\pi}{L} |y_k(t)| \leqslant \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k\alpha_k^* = \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k\delta_k p_k < \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\varepsilon_k p_k}{\max\{p_k,\ q_k\}}.$$

Будем считать, что $\frac{L}{\pi c b_1} \leqslant 1$, тогда $\max\{p_k, q_k\} = q_k$, поэтому

$$\frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k\varepsilon_k p_k}{\max\{p_k,\ q_k\}} = \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k\varepsilon_k \frac{p_k}{q_k}.$$

Полагаем, что $\{\varepsilon_k\} \in E(\varepsilon)$, т.е. $\varepsilon_k = \varepsilon(1-r)r^{k-1}$. Далее с использованием обозначений $\omega_k = \frac{k\pi c}{L}$, $p_k = \frac{1}{\omega_k^2} \frac{1+a_k}{1-a_k}$, $q_k = \frac{1}{\omega_k} \frac{2b_k}{1-a_k}$ находим

$$\frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k\varepsilon_k \frac{p_k}{q_k} = \varepsilon \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-r)r^{k-1} \frac{p_k}{q_k} < \varepsilon \frac{\pi}{L} \sum_{k=1}^{+\infty} k r^{k-1} \frac{p_k}{q_k} = \frac{\varepsilon}{2c} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1+a_k}{b_k} r^{k-1} < \frac{\varepsilon}{cb_1} \sum_{k=1}^{+\infty} r^{k-1} = \frac{\varepsilon}{cb_1} \frac{1}{1-r}.$$

Здесь $(1-r) < 1$, величины a_k и b_k монотонно возрастают, причем $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = 1$, а $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} r^{k-1}$ — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с знаменателем $r < 1$. Учитывая, что $r \in (0,\ 1)$ — произвольный параметр, можно взять $r = 0.5$, тогда $\left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right| < \frac{2\varepsilon}{cb_1}$. Следовательно,

$$\|y(x,\ t)\| = \max\left\{|y(x,\ t)|,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial t}\right|,\ \left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial x}\right|\right\} = \varepsilon\ \max\left\{1,\ \frac{2}{cb_1}\right\},$$

где $b_1 = \exp\left[-\frac{\mu}{\lambda_1}\left(\frac{\pi}{2} - arctg\frac{\mu}{\lambda_1}\right)\right]$, $\lambda_1 = \sqrt{\omega_1^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2 - \mu^2}$.

Это означает, что величина $\eta(\varepsilon)$ из определения 1 найдена в явном виде $\eta(\varepsilon) = \varepsilon \max\left\{1,\ \frac{2}{cb_1}\right\}$, т.е. если $\delta < \varepsilon \max\left\{1,\ \frac{2}{cb_1}\right\}$, то $\|y(x,\ t)\| < \varepsilon$. Следовательно, справедливо

Утверждение. *Наличие диссипации* $\mu > 0$ *является критерием робастной устойчивости невозмущенного решения волнового уравнения* (1) (*тривиального решения* $\bar{y}(x,\ t) \equiv 0$ *в отсутствие внешнего возмущения и при нулевых начальных условиях*) *по отношению к постояннодействующему возмущению* $u(x,\ t) \in \mathcal{U}_\Omega$.

5. Приложение. Обоснование метода Фурье.

Доказательство теоремы. Решение уравнения (6) при каждом $k \in \mathbb{N}$ описывается формулой Коши

$$y_k(t) = \frac{1}{\lambda_k} \int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)} \sin \lambda_k(t-\tau) u_k(\tau)\, d\tau, \quad (10)$$

где $\lambda_k = \sqrt{\omega_k^2 - \mu^2} = \sqrt{\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2 - \mu^2}$, $|u_k(\tau)| \leqslant \delta_k$.

Оценка сверху для $|y_k(t)|$ имеет вид

$$|y_k(t)| \leqslant \frac{\delta_k}{\lambda_k}\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}d\tau = \frac{\delta_k}{\mu\lambda_k}\left(1-e^{-\mu t}\right) < \frac{\delta_k}{\mu\lambda_k}. \tag{11}$$

Подставив (10) в (5), преобразуем ряд Фурье (5):

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\sin\lambda_k(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau. \tag{12}$$

Из (12) с учетом оценки (11) получаем мажоранту для ряда Фурье (5):

$$|y(x,t)| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}|y_k(t)| < \frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}. \tag{13}$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\delta_k = \delta$ по условию, а последовательность $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\} \to 0$. Тогда согласно признакам Абеля и Дирихле мажоранта $\frac{1}{\mu}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}$ сходится. Следовательно, ряд Фурье (5) сходится равномерно в Ω, т.е. по $t \in [0,\,\infty)$ и $x \in [0,\,L]$.

Рассмотрим ряд для $\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}$. Из формулы (12) в соответствии с правилом дифференцирования интеграла

$$\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\sin\lambda_k(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau$$

по параметру t находим

$$\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\frac{1}{\lambda_k}\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\left[-\mu\sin\lambda_k(t-\tau)+\lambda_k\cos\lambda_k(t-\tau)\right]u_k(\tau)\,d\tau, \tag{14}$$

при этом

$$\left|\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\mu\,|y_k(t)| + \sum_{k=1}^{+\infty}\left|\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\cos\lambda_k(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau\right|.$$

Интеграл под знаком модуля во втором слагаемом последнего неравенства аналогичен (10). Точно так же, как для интеграла (10), учитывая, что $|u_k(\tau)| \leqslant \delta_k$, получим оценку, аналогичную (11):

$$\left|\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\cos\lambda_k(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau\right| \leqslant \frac{\delta_k}{\mu}. \tag{15}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k} + \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\mu} = \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k} + \frac{\delta}{\mu}.$$

Как установлено выше, ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}$ сходится, а вместе с ним и мажоранта для ряда (14). Поэтому ряд (14), представляющий собой производную $\frac{\partial y(x,\,t)}{\partial t}$, сходится равномерно в Ω.

Чтобы найти $\frac{\partial^2 y(x,\,t)}{\partial t^2}$, необходимо продифференцировать по параметру t интеграл в правой части равенства (14). После соответствующего дифференцирования получаем следующий результат:

$$\frac{\partial^2 y(x,\,t)}{\partial t^2} = \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)u_k(t) + \sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\frac{\mu^2}{\lambda_k}\int\limits_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\sin\lambda_k(t-\tau)\;u_k(\tau)\,d\tau\,-$$

$$-2\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\cos\lambda_k(t-\tau)\;u_k(\tau)\,d\tau -$$
$$-\sum_{k=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)\lambda_k\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\sin\lambda_k(t-\tau)\;u_k(\tau)\,d\tau.$$

Учитывая формулу (10) для $y_k(t)$, заключаем, что

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, t^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}|u_k(t)|+\mu^2\sum_{k=1}^{+\infty}|y_k(t)|+2\mu\left|\int_0^t e^{-\mu(t-\tau)}\cos\lambda_k(t-\tau)u_k(\tau)\,d\tau\right|+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k^2\,|y_k(t)|\,.$$

Используя ограничение $|u_k(t)|\leqslant\delta_k$, а также оценку (13) для $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}|y_k(t)|$ и оценку (15) для модуля интеграла в правой части последнего неравенства, приходим к следующему утверждению:

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial t^2}\right|\leqslant\sum_{k=1}^{+\infty}\delta_k+\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}+2\sum_{k=1}^{+\infty}\delta_k+\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\delta_k=3\delta+\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}+\frac{1}{\mu}\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\delta_k.$$

Выше была установлена сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}$, поэтому для сходимости мажоранты для $\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial t^2}\right|$ необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\delta_k$.

Получим более простую форму этого условия. Так как $\lambda_k=\sqrt{\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2-\mu^2}=\frac{k\pi c}{L}\sqrt{1-\left(\frac{\mu L}{k\pi c}\right)^2}$, т.е. $\lambda_k<\frac{k\pi c}{L}$, то $\frac{1}{\mu}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\lambda_k\delta_k<\frac{\pi c}{\mu L}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\delta_k$, следовательно, справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, t^2}\right|\leqslant 3\delta+\mu\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\delta_k}{\lambda_k}+\frac{\pi c}{\mu L}\sum_{k=1}^{+\infty}k\delta_k.$$

Таким образом, для равномерной сходимости в Ω ряда, представляющего собой вторую производную $\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, t^2}$, достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\delta_k$.

Оценим теперь ряды, представляющие собой первую и вторую производные $y(x,t)$ по x.

Для $\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial\, x}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi}{L}y_k(t)\cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ выполняется неравенство $\left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial\, x}\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\pi}{L}\,|y_k(t)|$, откуда с учетом оценки (11) получаем $|y_k(t)|<\frac{\delta_k}{\mu\lambda_k}$, т.е. $\left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial\, x}\right|<\frac{\pi}{\mu L}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\delta_k}{\lambda_k}$. Так как $\left\{\frac{1}{\lambda_k}\right\}\to 0$, то мажоранта $\frac{\pi}{\mu L}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k\delta_k}{\lambda_k}$ для $\left|\frac{\partial y(x,\ t)}{\partial\, x}\right|$ будет сходиться по признакам Абеля и Дирихле, если сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}k\delta_k$.

Для $\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, x^2}=-\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 y_k(t)\sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right)$ выполняется неравенство $\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, x^2}\right|\leqslant\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2|y_k(t)|$.

В соответствии с (11) имеем $\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, x^2}\right|<\frac{\pi^2}{\mu L^2}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2\delta_k}{\lambda_k}$. Из формулы $\lambda_k=\sqrt{\omega_k^2-\mu^2}=\sqrt{\left(\frac{k\pi c}{L}\right)^2-\mu^2}$ следует, что $\sqrt{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2-\mu^2}\leqslant\frac{\lambda_k}{k}<\sqrt{\left(\frac{\pi c}{L}\right)^2}$ или $\frac{L}{\pi c}<\frac{k}{\lambda_k}\leqslant\frac{L}{\sqrt{(\pi c)^2-(\mu L)^2}}$. Тогда

$$\left|\frac{\partial^2 y(x,\ t)}{\partial\, x^2}\right|<\frac{\pi^2}{\mu L^2}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k^2\delta_k}{\lambda_k}\leqslant\frac{\pi^2}{\mu L\sqrt{(\pi c)^2-(\mu L)^2}}\sum_{k=1}^{+\infty}k\delta_k,$$

т.е. установлены те же достаточные условия равномерной сходимости в Ω ряда для второй производной $y(x,t)$ по x.

Доказательство теоремы завершено.

Условие теоремы выполняется, если ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \delta_k$ сходится быстрее ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2+\gamma}}$, где $\gamma > 0$. Например, если $\delta_k = \frac{4\delta}{k(k+1)(k+2)}$, то $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \delta_k = \delta$, так как известно, что $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$. В этом случае ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} k\delta_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} < \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ является сходящимся.

В заключение авторы выражают благодарность научному руководителю профессору В.В. Александрову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков Б.В.* О накоплении возмущений в линейных колебательных системах // Докл. АН СССР. 1946. **51**. 339–342.
2. *Александров В.В.* К задаче Булгакова о накоплении возмущений // Докл. АН СССР. Сер. Кибернетика и теория регулирования. 1969. **186**, № 3. 526–528.
3. *Александров В.В.* Задача Б.В. Булгакова о накоплении возмущений: Канд. дис. М., 1969.
4. *Жермоленко В.Н.* К задаче Б.В. Булгакова о максимальном отклонении колебательной системы второго порядка // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 1980. № 2. 87–91.
5. *Жермоленко В.Н.* Предельные циклы на фазовой плоскости //Задача Булгакова о максимальном отклонении и ее применение: Рос.-кубин. сб. научных статей / Под ред. В.В. Александрова. М.: Изд-во МГУ, 1993. 35–48.
6. *Жермоленко В.Н.* Максимальное отклонение колебательной системы второго порядка с внешним и параметрическим возмущениями // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2007. № 3. 1–6.
7. *Жермоленко В.Н.* Применение метода экстремальных отклонений к исследованию вынужденно-параметрических изгибных колебаний трубопроводов // Автоматика и телемеханика. 2008. № 9. 10–32.
8. *Александров В.В., Рейес-Ромеро М., Сидоренко Г.Ю., Темолтзи-Ауила Р.* Устойчивость управляемого перевернутого маятника при постоянно действующих горизонтальных возмущениях точки опоры // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2010. № 2. 41–48.
9. *Александров В.В., Александрова О.В., Коноваленко И.С., Тихонова К.В.* Возмущаемые стабильные системы на плоскости. I // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 5. 30–36.
10. *Александров В.В., Бугров Д.И., Жермоленко В.Н., Коноваленко И.С.* Множество достижимости и робастная устойчивость возмущаемых колебательных систем // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2021. № 1. 67–71.
11. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. М.: Наука, 1966.
12. *Эльсгольц Л.Э.* Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: Учеб.: Для физ. и физ.-мат. ф-тов. ун-тов. 4-е изд. М.: Эдиториал УРСС, 2000.
13. *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. М.: Гостехиздат, 1953.
14. *Филиппов А.Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Физматлит, 1985.

Поступила в редакцию
20.09.2020

УДК 532.594

О КОРОТКОВОЛНОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ ОДНОМЕРНЫХ РАДИАЦИОННО-КОНВЕКТИВНЫХ МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРЫ В КВАЗИГИДРОСТАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

С. Сюй[1]

Одномерные радиационно-конвективные модели широко используются для исследования долгосрочных климатических явлений и влияния различных процессов (конденсация водяного пара, движение капель, их воздействие на радиационные потоки и др.)

[1] *Сюй Сюлинь* — асп. каф. газовой и волновой динамики мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: xiulin.xu@mech.math.msu.su; xiulin.msu@gmail.com.

Xu Xiulin — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Gas and Wave Dynamics.