Дж. Э. Аллахвердиев, О полноте системы собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов,
Докл. АН СССР, 1965, том 160, номер 3, 503–506

Доклады Академии наук СССР
1965. Том 160, № 3

МАТЕМАТИКА

Дж. Э. АЛЛАХВЕРДИЕВ

О ПОЛНОТЕ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 15 VI 1964)

Пусть B — вполне непрерывный оператор, имеющий полную систему собственных и присоединенных (с. п.) элементов, образующих базис в пространстве Гильберта $\mathcal{H}$. Рассмотрим оператор:

$$L(\lambda) = A_0 + \lambda A_1 B + \ldots + \lambda^{n-1} A_{n-1} B^{n-1} + \lambda^n B^n.$$

В настоящей заметке устанавливается одно достаточное условие полноты системы с. п. элементов оператора $L(\lambda)$. Попутно изучаются некоторые свойства резольвент $(E - \lambda B)^{-1}$ и $(E - L(\lambda))^{-1}$.

В дальнейшем $y_{i,k}$ $(k = 0, 1, \ldots, n_i)$ будет означать собственный элемент, соответствующий собственному значению λ_i при $k = 0$, и соответствующие присоединенные элементы при $k = 1, 2, \ldots, n_i$, $a_{i,j}(f) = (f, z_{i,j})$, где $z_{i,k}$ — система, биортогональная к $y_{i,k}$. В работе ([1]) М. В. Келдыша показано, что $z_{i,n}$ есть некоторая система с. п. элементов сопряженного оператора B^*.

Лемма 1. *Резольвента оператора B имеет вид*

$$(E - \lambda B)^{-1} f = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{n_i} \left(\sum_{k=j}^{n_i} a_{i,k} A_{i,j}^k \right) y_{i,j},$$

где $A_{i,j}^k$ находятся из рекуррентных соотношений

$$A_{i,k}^k = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda} \equiv \varphi_i(\lambda) \quad \text{при всех } k \text{ и } i,$$
$$A_{i,j}^k = \sum_{l=j}^{k-1} (-1)^{k-l-1} A_{i,j}^l \varphi_i(\lambda) \frac{\lambda}{\lambda_i^{k-l+1}}. \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $f = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{n_i} a_{i,k} y_{i,k}$; тогда $(E - \lambda B)^{-1} f = \sum\sum a_{i,k} (E - \lambda B)^{-1} y_{i,k}$. Так как $y_{i,k} = \lambda_i B y_{i,k} + B y_{i,k-1}$, $k = 1, 2, \ldots, n_i$ и $y_{i,0} = \lambda_i B y_{i,0}$ то $By_{i,k} = \frac{1}{\lambda_i} y_{i,k} - \frac{1}{\lambda_i} B y_{i,k-1}$; $By_{i,0} = \frac{1}{\lambda_i} y_{i,0}$. Отсюда легко получим, что

$$By_{i,k} = \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_i^j} y_{i,k-j+1}$$

и, следовательно,

$$(E - \lambda B)^{-1} y_{i,k} = y_{i,k} - \lambda \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_i^j} y_{i,k-j+1}.$$

Применяя $(E - \lambda B)^{-1}$ и решая относительно $(E - \lambda B)^{-1} y_{i,k}$, получим

$$(E - \lambda B)^{-1} y_{i,k} = \varphi_i(\lambda) y_{i,k} + \varphi_i(\lambda) \lambda \sum_{j=2}^{k+1} (-1)^{j+1} \frac{1}{\lambda_i^j} (E - \lambda B)^{-1} y_{i,k-j+1}. \tag{2}$$

Так как $(E-\lambda B)^{-1}y_{i,0}=\frac{\lambda_i}{\lambda_i-\lambda}y_{i,0}\equiv\varphi_i(\lambda)\,y_{i,0}$, то из (2) следует, что $(E-\lambda B)^{-1}y_{i,k}$ должен иметь вид $(E-\lambda B)^{-1}y_{i,k}=\sum\limits_{j=0}^{k}A_{i,j}^k y_{i,j}$, где $A_{i,j}^k$ зависит от λ. Для нахождения $A_{i,j}^k$ обратимся к формуле (2) и $(E-\lambda B)^{-1}y_{i,l}$ в левой и правой частях заменим на $\sum\limits_{j=0}^{l}A_{i,j}^l y_{ij}$; получим

$$\sum_{j=0}^{k}A_{i,j}^k y_{i,j}=\varphi_i(\lambda)\,y_{i,k}+\lambda\varphi_i(\lambda)\sum(-1)^{j+1}\frac{1}{\lambda_1^j}\left(\sum_{r=0}^{k-j+1}A_{1,r}^{k-j+1}y_{i,r}\right).$$

Сравнивая коэффициенты при y_{ij} в левой и правой частях, получим:

$$A_{i,j}^k=\lambda\varphi_i(\lambda)\sum_{l=j}^{k-1}(-1)^{k-l-1}A_{i,j}^l\frac{1}{\lambda_i^{k-l+1}},\qquad j<k;\qquad A_{ij}^j=\varphi_i(\lambda).$$

Этим лемма доказана.

Для дальнейшего заметим, что $A_{i,j}{}^k$ определяются не самими индексами k и j, а разностью $k-j$. В самом деле:

$$A_{i,j}^k=\lambda\varphi_i(\lambda)\sum_{l=j}^{k-1}(-1)^{k-l-1}A_{i,j}^l\frac{1}{\lambda_i^{k-l+1}}=\lambda\varphi_i(\lambda)\sum_{s=1}^{k-j}(-1)^{s+1}A_{i,j}^{k-s}\frac{1}{\lambda_i^{s+1}}.$$

Отсюда видно, что если $A_{i,j}^{k-s}$, $s=1,2,\ldots,k-j$, зависят только от разности $k-s-j$ (т. е. при $l=j,\ j+i,\ \ldots,\ k-1$ зависят от $l-j$), то $A_{i,j}{}^k$ зависит только от $k-j$, а не от k и j. Но так как $A_{i,k}{}^k$ зависит только от i, то по индукции $A_{i,j}{}^k$ будет зависеть от i и $k-j$, поэтому можно ввести обозначение $A_{i,j}{}^k=B_{i,k-j}=B_{i,r}$.

Определение. Будем говорить, что луч входит в класс $\mathcal{K}_\beta$, если он является биссектрисой некоторого угла раствора не меньше 2β, внутри которого имеется только конечное число собственных значений оператора B.

Лемма 2. *Если порядки собственных элементов оператора B ограничены в совокупности (т. е. $n_i\leqslant m$ для всех i) и система с. п. элементов оператора B образует базис типа Рисса (P-базис), то резольвента оператора $A+\lambda B$ на каждом луче из $\mathcal{K}_\beta$ имеет вид $(E-A-\lambda B)^{-1}=(E+M(\lambda))(E-\lambda B)^{-1}$, где $M(\lambda)$ на лучах из $\mathcal{K}_\beta\to 0$ при $|\lambda|\to\infty$.*

Доказательство.

$$Y=(A+\lambda B)y+f,\qquad Y=(E-\lambda B)^{-1}Ay+(E-\lambda B)^{-1}f.$$

Используя выражение для $(E-\lambda B)^{-1}$, оценим $\|(E-\lambda B)^{-1}A\|$:

$$\|(E-\lambda B)^{-1}Af\|=\left\|\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\left(\sum_{k=j}^{n_i}a_{i,k}(Af)\,A_{i,j}^k\right)y_{i,j}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant\left\|\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=0}^{n_i}\left(\sum_{k=j}^{n_i}a_{ik}(Af)\,A_{i,j}^k\right)y_{i,j}\right\|+\left\|\sum_{i=N+1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n_i}\left(\sum_{k=j}^{n_i}a_{i,k}(Af)\,A_{i,j}^k\right)y_{i,j}\right\|\leqslant$$

$$\leqslant M\|A\|m\left(\sup_{\substack{i\leqslant N\\ j\leqslant n_i}}\sum|A_{i,j}^k|^2\right)^{1/2}+Mm\left(\sup_{j,i}\sum_{k=j}^{n_i}|A_{i,j}^k|^2\right)\|Af\|_{P_N\mathcal{H}},$$

где M — постоянная, участвующая в определении базиса Рисса; $m=\max n_i$; P_N — проекционный оператор подпространства, образуемого элементами $y_{i,k}$, $i\geqslant N+1$ (вообще не ортогональный, но эквивалентный ортогональному).

Так как A — вполне непрерывный оператор, то $\|Af\|_{P_N\mathcal{H}}$ можно сделать как угодно малым за счет выбора достаточно большого N ($\|f\|=1$);

поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такой $N_0(\varepsilon)$, что при $N \geqslant N_0(\varepsilon)$

$$\| Af \|_{P_N \mathcal{H}} < \varepsilon, \quad \| Af \|_{P_N \mathcal{H}} = \| P_N A f \|.$$

Докажем, что если $\lambda \in \mathcal{K}_\beta$, то $\sup\limits_{j,i} \sum\limits_{i=j}^{n_i} | A_{i,j}^k |^2 < P$, где P — некоторое число, не зависящее от λ, а $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} \sup\limits_{i \leqslant N, j \leqslant m}{}' \sum | A_{i,j}^k |^2 = 0$.

Сначала покажем, что если $B_{i,r} = \varphi_i(\lambda) O(1)$, $r \leqslant t$, то $B_{i,t+1} = \varphi_i(\lambda) O(1)$. В самом деле:

$$B_{i,r+1} = \lambda \varphi_i(\lambda) \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s+1} B_{i,r-s+1} \frac{1}{\lambda_i^{s+1}},$$

$$| B_{i,r+1} | \leqslant | \varphi_i | \left(\sum \left| \frac{\lambda}{\lambda_i} \varphi_i(\lambda) \right| | O(1) | \left| \frac{1}{\lambda_i^s} \right| \right) \leqslant | \varphi_i | O(1),$$

так как $\frac{\lambda}{\lambda_i} \varphi_i(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda_i - \lambda} = \psi_i(\lambda)$; $| \psi_i | \leqslant \frac{1}{\sin \beta}$.

Отсюда следует, что $| A_{i,j}^k |^2 \leqslant | \varphi_i(\lambda) |^2 O(1)$; но так как $\varphi_i(\lambda) = \frac{\lambda_i}{\lambda_i - \lambda}$, то $| \varphi_i | \leqslant \frac{1}{\sin \beta}$, а если $i \leqslant N$, то $\lim\limits_{|\lambda| \to \infty} | \varphi_i | = 0$.

Учитывая условия теоремы, что k и j ограничены числом m, и используя формулу:

$$(E - A - \lambda B)^{-1} = (E - (E - \lambda B)^{-1} A)^{-1} (E - \lambda B)^{-1},$$

приходим к утверждению леммы 2. Действительно, если полагать $(E - (E - \lambda B)^{-1} A)^{-1} = E + M(\lambda)$, то имеем

$$\| (E - \lambda B)^{-1} A \| \leqslant Mm \left\{ \left(\sup \sum_{k=j}^{n_i} | A_{i,j}^k |^2 \right)^{1/2} \| A \| + \sup_{j,i} \sum_{k=j}^{n_i} | A_{ij}^k |^2 \| P_N A f \| \right\}.$$

Так как для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такое R, что при $|\lambda| > R$ фигурная скобка не превосходит ε, то

$$(E - (E - \lambda B)^{-1} A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} C_i(\lambda), \quad \text{где } C(\lambda) = (E - \lambda B)^{-1} A.$$

Этим лемма 2 доказана.

Аналогичная лемма верна также для оператора $L(\lambda)$.

Теперь докажем основную теорему.

Теорема. *Если B — вполне непрерывный оператор $B \in \gamma_\rho$, с. п. элементы которого образуют базис типа Рисса, и класс лучей $\mathcal{K}_\beta{}^n$ ε-плотен в G при $\varepsilon \leqslant \pi / \rho n$, $\beta \geqslant \beta_0 > 0$, то система с. п. элементов оператора n-кратно полна в пространстве $\mathcal{H}$.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение.

$$y = L^*(\lambda) y + f,$$

где $f(\lambda) = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda^i f_i$ подобран так, чтобы элемент $f = \{f_0, \ldots, f_{n-1}\}$ был ортогонален элементам оператора $L(\lambda)$, решение $y(\lambda)$ должно быть целой функцией порядка не выше $n\rho$.

Так как на лучах из $\mathcal{K}_\beta{}^n$ (луч входит в $\mathcal{K}_\beta{}^n$, если при повороте на $(n - 1)\varphi$, где φ — аргумент луча, он совпадает с некоторым лучом из $\mathcal{K}_\beta$)

эта функция растет не быстрее полинома степени $n-1$, то на основании теоремы Фрагмена — Линделефа заключаем, что $y(\lambda)$ — полином степени не выше $n-1$: $y(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i y_i$.

Покажем, что $y(\lambda)\equiv 0$. Пусть это не так и y_{i_0} — не равный нулю коэффициент при наибольшей степени λ. Имеем:

$$y(\lambda)=\sum_{i=0}^{n-1}\lambda^i(A_iB^i)^*y(\lambda)+\lambda^n(B^i)^*y(\lambda)+f(\lambda).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в левой и правой частях, получаем $(B^n)^*y_{i_0}=0$.

$(B^{n^*}y_{i_0}, g)=0$ при любом g. $(y_{i_0}, B^n g)=0$ показывает, что y ортогонален всем с. п. элементам оператора B^n, а эти элементы полны в $\mathcal{H}$; отсюда следует, что $y_{i_0}=0$; следовательно, все $f_i=0$. Теорема доказана.

Пусть теперь H — полный самосопряженный оператор, имеющий конечный порядок ρ, A_i — вполне непрерывные операторы.

Теорема 2. *При любом* $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ *система собственных и присоединенных элементов оператора*

$$A_0+\lambda H^{\alpha/n}A_1H^{(1-\alpha)/n}+\ldots+\lambda^{n-1}H^{(n-1)\alpha/n}A_{n-1}H^{(n-1)(1-\alpha)/n}+\lambda^nH$$

n-кратно полно в $\mathcal{H}$.

Доказательство теоремы 2 в основном близко к доказательству теоремы 1.

Отметим, что аналогично тому как это сделано в ([2]) для A_0, условия на A_i можно ослабить, потребовав, чтобы норма чисто ограниченной части была достаточно малой.

Приведем еще одну теорему относительно операторов вида $A_0+\lambda H^{1/n}A_1+\ldots+\lambda^{n-1}H^{(n-1)/n}A_{n-1}+\lambda^nH$. Для простоты формулировки теоремы предположим, что H — положительный оператор, а на самом деле подобные результаты справедливы даже если H — нормальный оператор, собственные значения которого находятся внутри определенных углов.

Рассмотрим уравнение $y=\lambda^nHy$. Если H — полный самосопряженный оператор, то собственные значения $\lambda_{i,k}$ и μ_i уравнений $y=\lambda^nHy$ и $y=\mu Hy$ связаны соотношением $\lambda^n{}_{i,k}=\mu_i$ $(k=0,1,\ldots,n-1)$, т. е. собственные значения первого уравнения лежат на лучах, проходящих через n корней единицы. Возьмем n непересекающихся углов с вершиной в начале координат таких, чтобы указанные лучи находились строго внутри этих углов, и для каждого числа r образуем области $\Gamma_{\psi_i,r}$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$, состоящие из угла ψ_i и круга радиуса r с центром в начале координат.

Теорема 3. *Пусть при некотором* $0<\rho<1$ *выполняются условия: или операторы* $H^{-\rho}A_i$ $(i=0,\ldots,n-1)$ *ограничены и* $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\mu_k^\rho}=0$ *или же операторы* $H^{-\rho}A_i$ $(i=0,\ldots,n-1)$ *вполне непрерывны и* $\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\mu_k^\rho}<\infty$. *Тогда для каждого набора чисел* $\alpha_1,\ldots,\alpha_j{}^{(j)}$; $\alpha_j\leqslant n$, $\alpha_i\neq\alpha_k$, *можно найти такое* r, *что система собственных и присоединенных элементов, соответствующих собственным значениям, лежащим в области* $\sum_{i=1}^{j}\Gamma_{\psi_i,r}$ *j-кратно полно в* $\mathcal{H}$ *и некоторая подпоследовательность частных сумм соответствующего разложения* (*см.* (1)) *сходится.*

Приношу благодарность акад. М. В. Келдышу и проф. М. А. Наймарку за внимание к этой работе и за ценные замечания при обсуждении.

Поступило
28 V 1964

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, ДАН, 77, № 1 (1951). [2] Дж. Э. Аллахвердиев, ДАН, 115, № 2 (1957).