Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

M. V. Dragnev, V. V. Ryzhkov, On the geometry of the characteristic cones of a mapping of P_m into P_n when $m > n$, *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat.*, 1974, Number 5, 81–86

https://www.mathnet.ru/eng/ivm6582

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.91
December 7, 2025, 12:40:42

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1974 МАТЕМАТИКА № 5 (144)

УДК 513.

М. В. Драгнев, В. В. Рыжков

К ГЕОМЕТРИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КОНУСОВ ОТОБРАЖЕНИЯ P_m В P_n ПРИ $m > n$

К семидесятилетию
Александра Петровича Нордена

Введение. В сообщении [1] понятие характеристических направлений точечного отображения проективных пространств было перенесено на случай пространств различной размерности. При этом рассмотрены возможные случаи $m > n$ и $m < n$ соотношения между размерностями пространств. В данном сообщении рассматривается исключительно случай отображения P_m в P_n при $m > n$; в связи с этим m далее обозначается как $n + k$, где $k \geqslant 1$. Отображение $T: P_{n+k} \to P_n$ задает локальное расслоение P_{n+k} на подмногообразия V_k, которое частично определяет свойства конуса характеристических направлений (хотя бы уже тем, что касательное k-пространство поверхности V_k принадлежит конусу характеристических направлений в каждой точке рассматриваемой области P_{n+k}).

Основной целью здесь является разделение свойств характеристической конфигурации отображения P_{n+k} в P_n на свойства, определяемые самим расслоением P_{n+k} на V_k (и потому принадлежащие геометрии голономного распределения k-мерных плоских элементов в P_{n+k}), и свойства, собственно зависящие от отображения. Такое разделение свойств получено в п. 2. В пп. 3, 4 указаны отдельные частные приложения и примеры.

1. Отнесем P_n и P_{n+k} к неоднородным координатам $(x^1, \ldots, x^n) = (x^i)$ и $(u^1, \ldots, u^{n+k}) = (u^p)$ соответственно. Точечное отображение $T: P_{n+k} \to P_n$ задается уравнениями

$$x^i = f^i(u^p), \tag{1}$$

правые части которых предполагаются достаточное число раз дифференцируемыми функциями с якобиевой матрицей ранга n; мы ограничиваемся такой областью пространства, в которой отображение определяет расслоение P_{n+k} на подмногообразия V_k, находящиеся в однозначном соответствии с точками области P_n. Направления, касательные к V_k, называются нулевыми направлениями соответствия; предполагается, что координатная система в P_{n+k} такова, что плоскости $u^1 = u_0^1, \ldots, u^n = u_0^n$ трансверсальны к V_k, т. е. не содержат нулевых направлений.

В окрестности пары соответствующих точек (u_0^p), (x_0^i) уравнения отображения (1) запишутся с помощью формулы Тейлора в виде

$$x^i - x_0^i = a_p^i (u^p - u_0^p) + \frac{1}{2} b_{pq}^i (u^p - u_0^p)(u^q - u_0^q) + \ldots \tag{2}$$

Здесь и далее индексы $i, j, \ldots$ пробегают значения $\overline{1, n}$, а индексы $p, q, \ldots$ — значения $\overline{1, n+k}$. Греческие индексы $\alpha, \beta, \ldots$ мы будем использовать для $n+1, n+k$. С каждой точкой (u_0^p) и соответственно (x_0^i) свяжем локальные координаты $v^p = u^p - u_0^p$, $y^i = x^i - x_0^i$ так, что для краткости (2) можно будет записать в виде

$$y^i = a_p^i v^p + \frac{1}{2} b_{pq}^i v^p v^q + \ldots \tag{3}$$

В соответствии с [1] характеристические направления в P_{n+k} задаются системой уравнений (характеристической системой, см. [2])

$$\Phi^{ij} \equiv a_p^{[i} b_{qr}^{j]} v^p v^q v^r = 0, \tag{4}$$

выражающих условие того, что инфлексионный линейный элемент E_2 в P_{n+k} переходит при отображении T в инфлексионный элемент в P_n (включая сюда и нулевые элементы, соответствующие нулевым направлениям $a_p^i v^p = 0$). Как показано в [1], в общем случае совокупность характеристических прямых в данной точке P_{n+k} зависит от $(n+k) - n = k$ параметров и образует алгебраический конус порядка $2^n - 1$.

Уравнения (1) отображения T можно разрешить относительно u^i и задавать в виде

$$u^i = \varphi^i(x^j;\ u^\alpha), \tag{5}$$

или, применяя векторные обозначения $\boldsymbol{u} = (u^i)$, $\boldsymbol{x} = (x^i)$, в виде

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{x};\ u^\alpha). \tag{6}$$

Разложение этих уравнений в строку Тейлора будет иметь вид

$$v^i = A_j^i y^j + B_\alpha^i v^\alpha + \frac{1}{2} C_{jk}^i y^j y^k + D_{j\alpha}^i y^j v^\alpha + \frac{1}{2} E_{\alpha\beta}^i v^\alpha v^\beta + \ldots \tag{7}$$

(y^i, v^i, v^α имеют тот же смысл, что и выше) или, в более сжатых обозначениях,

$$\boldsymbol{v} = A\boldsymbol{y} + \boldsymbol{B}_\alpha v^\alpha + \frac{1}{2} \boldsymbol{y}^t \boldsymbol{C} \boldsymbol{y} + D_\alpha \boldsymbol{y} v^\alpha + \frac{1}{2} \boldsymbol{E}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + \ldots, \tag{8}$$

где A — квадратная неособенная матрица, $\boldsymbol{B}_\alpha$ — вектор-столбец (при каждом значении α), D_α — квадратная матрица, $\boldsymbol{C}$ — вектор-столбец, элементами которого служат симметрические матрицы, $\boldsymbol{E}_{\alpha\beta}$ — вектор-столбец, зависящий от индексов α, β; $\boldsymbol{y}^t$ обозначает вектор-строку, получаемую транспонированием вектор-столбца $\boldsymbol{y}$. Таким образом, применяются векторно-матричные обозначения в P_n и в $P'_n \subset P_{n+k}$, трансверсальном к V_k, и индексные обозначения в P_k, касательном к V_k. Задание соответствия (1) уравнением (5) имеет то преимущество, что слои V_k определяются при фиксации точки (x^i) явными уравнениями. Тем самым упрощается задача отделения свойств отображения T, определяемых только расслоением на подмногообразия V_k от свойств, собственно связанных с отображением T.

2. Напишем уравнения характеристических направлений отображения, уравнения которого приведены к виду (8). Введем обозначение $\tilde{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{B}_\alpha v^\alpha$; тем самым в данной точке определена локальная

система координат $(\tilde{v},\ v^\alpha)$, в которой касательная k-плоскость к V_k имеет уравнения $\tilde{v}^i=0$. Уравнения (8) принимают вид

$$\tilde{v}=Ay+\frac{1}{2}y^tCy+D_\alpha yv^\alpha+\frac{1}{2}E_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta+\ldots \tag{9}$$

Решая его относительно y, получим с точностью до членов выше второго порядка

$$y=A^{-1}\tilde{v}-\frac{1}{2}A^{-1}\tilde{v}^tA^{-1t}CA^{-1}\tilde{v}-A^{-1}D_\alpha A^{-1}\tilde{v}v^\alpha-\frac{1}{2}A^{-1}E_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta+\ldots \tag{10}$$

В соответствии с [1] уравнения характеристических направлений имеют вид (матричный оператор A^{-1} может быть опущен)

$$\Phi^{ij}\equiv\tilde{v}^{[i}\left(\tilde{v}^tA^{-1t}CA^{-1}\tilde{v}+2D_\alpha A^{-1}\tilde{v}v^\alpha+E_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta\right)^{j]}=0 \tag{11}$$

или

$$[\tilde{v},\ \tilde{v}^tA^{-1t}CA^{-1}\tilde{v}+2D_\alpha A^{-1}\tilde{v}v^\alpha+E_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta]=0, \tag{12}$$

где квадратные скобки обозначают бивектор, построенный на двух данных векторах. Очевидно, нулевые направления удовлетворяют уравнениям характеристических направлений.

Выясним, какие члены уравнений (11) определяются только расслоением P_{n+k}, а какие существенно зависят от данного конкретного отображения. Для этого введем отображение $\tau: P_n\to P_n^*$; тогда мы будем иметь два отображения P_{n+k} в n-мерные пространства P_n и P_n^*:

$$\begin{tikzcd} P_{n+k} \arrow[r, "T"] \arrow[dr, "T^*=\tau\circ T"'] & P_n \arrow[d, "\tau"] \\ & P_n^* \end{tikzcd}$$

Запишем уравнения отображения τ^{-1} в виде

$$y=Iz+\frac{1}{2}z^tHz+\ldots, \tag{13}$$

где I — якобиева матрица, H — вектор-столбец, элементы которого суть гессовы матрицы. Уравнения, аналогичные уравнениям (9), для отображения T^* получатся подстановкой выражения y из (13) в (9):

$$\tilde{v}=AIz+\frac{1}{2}z^tI^tCIz+\frac{1}{2}A(z^tHz)+D_\alpha Izv^\alpha+\frac{1}{2}E_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta+\ldots \tag{14}$$

Обозначая величины, относящиеся к отображению T^*, звездочкой, найдем

$$A^*=AI,\ C^*=I^tCI+A(H),\ D_\alpha^*=D_\alpha I,\ E_{\alpha\beta}^*=E_{\alpha\beta} \tag{15}$$

(запись $A(H)$ означает, что A действует на H как на вектор). Отсюда видно, что $D_\alpha A^{-1}$ и $E_{\alpha\beta}$ не изменяются с переходом от отображения T к отображению T^*. В уравнениях кубических конусов Φ^{ij}, определяющих характеристические направления, остаются инвариантными члены первой и второй степени относительно $\tilde{v}^i$, члены же третьей степени существенно зависят от отображения.

Таким образом, уравнения

$$\tilde{v}^{[i} E^{j]}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0, \tag{16}$$

$$\tilde{v}^{[i} E^{j]}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + 2\tilde{v}^{[i} (D_\alpha A^{-1} \tilde{v})^{j]} v^\alpha = 0 \tag{17}$$

зависят только от расслоения, т. е., по существу, от голономного распределения k-мерных линейных элементов в P_{n+k} — предмета многих глубоких исследований (см., напр., [3], [4]). В данной работе рассматривается только место этих объектов, определяемых уравнениями (16), (17) в связи с их смыслом в геометрии точечных отображений P_{n+k} в P_n.

Уравнения характеристических направлений упрощаются в случаях $k=1$ и $n=2$. Для первого из указанных случаев индексы α, β принимают единственное значение $n+1$ и, полагая $v^{n+1} = w$, запишем уравнения (12) в виде

$$[\tilde{v}, E] w^2 + 2[\tilde{v} D A^{-1} \tilde{v}] w + [\tilde{v}, \tilde{v}^t A^{-1t} C A^{-1} \tilde{v}] = 0. \tag{18}$$

В случае $n=2$ характеристические направления определяются единственным кубическим гиперконусом Φ^{12}:

$$\tilde{v}^{[1} E^{2]}_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta + 2\tilde{v}^{[1} (D_\alpha A^{-1} \tilde{v})^{2]} v^\alpha + \tilde{v}^{[1} (\tilde{v}^t A^{-1t} C A^{-1} \tilde{v})^{2]} = 0. \tag{19}$$

Если, наконец, $k=1$ и $n=2$, то получаем для отображений $P_3 \to P_2$)

$$\tilde{v}^{[1} E^{2]} w^2 + 2\tilde{v}^{[1} (D A^{-1} \tilde{v})^{2]} w + \tilde{v}^{[1} (\tilde{v}^t A^{-1t} C A^{-1} \tilde{v})^{2]} = 0. \tag{20}$$

3. Уравнение (16) ставит в соответствие каждому нулевому направлению v_0^α касательную $(k+1)$-плоскость к конусу характеристических направлений:

$$\tilde{v}^{[i} E^{j]}_{\alpha\beta} v_0^\alpha v_0^\beta = 0. \tag{21}$$

Исключительное положение занимают асимптотические направления V_k, для которых $E_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = 0$.

Теорема 1. *Нулевая образующая конуса характеристических направлений оказывается особой для всех конусов характеристической системы в том и только в том случае, когда она имеет асимптотическое направление на V_k.*

Следствие 1. Вся нулевая плоскость P'_k является особой для конусов характеристической системы тогда и только тогда, когда данная точка — планарная точка V_k.

Следствие 2. Если в некоторой области P_{n+k} нулевые P'_k — особые для конусов характеристической системы, то отображение определяет расслоение P_{n+k} на k-плоскости.

Последний результат непосредственно можно получить и следующим образом. Пусть для всех конусов характеристической системы $[\tilde{v}, E_{\alpha\beta}] v^\alpha v^\beta \equiv 0$. Это означает, что $E^i_{\alpha\beta} = 0$. Но, как видно из (7),

$$E^i_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 u^i}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, \tag{22}$$

и, таким образом, конечные уравнения отображения в форме (5) принимают вид

$$u^i = L^i_\alpha(x^j)\, u^\alpha + M^i(x^j). \tag{23}$$

Эти уравнения задают отображение $T: P_{n+k} \to P_n$ в неявной форме, причем точки P_n имеют прообразами k-плоскости в P_{n+k}. В случае $k=1$, когда P_{n+1} расслаивается на линии, получаем, что нулевая образующая характеристической системы конусов является для них особой в каждой точке области, если прообразами точек P_n являются прямые в P_{n+1}. Для случая $k=1$ простую интерпретацию получает касательная плоскость к конусу характеристических направлений.

Теорема 2. *В точке P_{n+1}, где кривая V_1 не имеет инфлексии, ее соприкасающаяся плоскость служит касательной плоскостью к конусу характеристических направлений.*

Доказательство непосредственно получается из рассмотрения уравнения

$$[\tilde{v}, E] = 0, \tag{24}$$

которое является уравнением касательной плоскости к характеристическому конусу и одновременно уравнением соприкасающейся плоскости к линии V_1.

4. Предположим, что в P_{n+k} может быть выбрана система координат, такая, что в уравнениях конусов характеристической системы (11) исчезают члены второй степени относительно $\tilde{v}^i$; в этом случае

$$D_\alpha = \lambda_\alpha A, \tag{25}$$

что означает выполнение системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u^i}{\partial x^j \partial u^\alpha} = \lambda_\alpha \frac{\partial u^i}{\partial x^j}. \tag{26}$$

Уравнения (26) удовлетворяются тождественно для отображений, уравнения которых в указанной системе координат имеют форму

$$u^i = F^i(x^j)\, \varphi(u^\alpha) + \psi^i(u^\alpha). \tag{27}$$

В случае $k=1$ нулевая образующая характеристического конуса является его инфлексионной образующей (впрочем, не утверждается, что отображения вида (27) — единственные, обладающие таким свойством). В общем случае при любом k для отображений (27) гиперплоскость, определяемая уравнением (16), для любой пары индексов i, j имеет с соответствующим гиперконусом Φ^{ij} касание второго порядка, а касательные $(k+1)$-плоскости (21) — касание 2-го порядка с конусом характеристических направлений.

Свойства типа рассмотренных в п. 3 и здесь все еще определяются расслоением P_{n+k}. Приведем пример свойства, существенно зависящего от рассматриваемого отображения. Пусть, например, $n=2$. В этом случае характеристические направления образуют гиперконус, распадение которого на гиперплоскость и гиперконус второго порядка или на три гиперплоскости существенно определяется отображением. Так, при отображениях P_3 в P_2, задаваемых уравнениями вида

$$T: \begin{cases} u^1 = A(x^1, x^2)\, u^3 + B(x^1, x^2), \\ u^2 = C(x^1, x^2)\, u^3 + D(x^1, x^2), \end{cases} \tag{28}$$

т. е. при отображениях, связанных с расслоением P_3 на прямые, в силу сказанного выше нулевые прямые являются двойными прямыми характеристических конусов отображения; распадение же конусов и его характер уже не имеют инвариантного характера относительно перехода от отображения (28) к отображению $T^* = \tau \circ T$, где τ задается уравнениями вида

$$\xi^1 = \varphi^1(x^1, x^2), \ \xi^2 = \varphi^2(x^1, x^2). \tag{29}$$

Более подробное рассмотрение этих вопросов будет приведено в других работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рыжков В. В. Характеристические направления точечного отображения P_m в P_n. Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР, т. 3, 1971, с. 235—242.

2. Павлюченко Ю. В., Рыжков В. В. Об изгибании точечных соответствий между проективными пространствами. Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР, т. 2, 1969, с. 263—275.

3. Лаптев Г. Ф., Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, I. Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР, т. 3, 1971, с. 49—94.

4. Остиану Н. М. Распределения m-мерных линейных элементов в пространстве проективной связности, II. Тр. Геометрич. семин. ВИНИТИ АН СССР, т. 3, 1971, с. 95—114.

г. Москва

Поступила
6 II 1974