



# Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. Yu. Solynin, Boundary distortions and change of  $H^1$  module under extension of a doubly connected domain, *Zap. Nauchn. Sem. POMI*, 1992, Volume 201, 157–163

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use  
<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.14.81

February 10, 2025, 06:42:28



ГРАНИЧНОЕ ИСКАЖЕНИЕ И ИЗМЕНЕНИЕ МОДУЛЯ ПРИ  
РАСШИРЕНИИ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

1. Пусть  $\mathcal{F}(\rho, \nu), 0 < \nu < \rho < 1$ , - класс регулярных и однолистных в кольце  $K(\rho, 1) = \{\xi: \rho < |\xi| < 1\}$  функций  $z = f(\xi)$  таких, что  $\nu < |f(\xi)| < 1$  при  $\xi \in K(\rho, 1)$ ,  $|f(\xi)| = 1$  при  $|\xi| = 1$ ,  $f(1) = 1$ . Через  $f(\xi; \rho, \nu), f(t; \rho, \nu) = 1$ , обозначим конформный гомеоморфизм кольца  $K(\rho, 1)$  на кольцо  $K(\nu, 1)$  (возможно, вырожденное) с разрезом по отрезку  $[-\kappa, -\nu]$ , где  $\kappa = \kappa(\rho, \nu)$ ;  $f_\alpha(\xi; \rho, \nu) = f(e^{i\alpha}\xi; \rho, \nu) / f(e^{i\alpha}; \rho, \nu), \alpha \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $E$  - измеримое множество на окружности  $C_\nu = \{\xi: |\xi| = \nu\}$ ,  $\nu > 0$ ,  $\text{mes } E$  - угловая мера Лебега  $E$ ;  $E_l = \{\xi: |\arg \xi| \leq l\}$ ,  $0 \leq l < \pi$ . Следующая теорема, доказательство которой дается в п.4 данной работы, характеризует искажение множеств на единичной окружности при отображении функциями из класса  $\mathcal{F}(\rho, \nu)$ .

ТЕОРЕМА 1. Пусть  $E \subset C_\nu, \text{mes } E = 2l, 0 < l < \pi$ , и  $f(\xi) \in \mathcal{F}(\rho, \nu)$ . Тогда

$$2\pi - \text{mes } f(E_l; \rho, \nu) < \text{mes } f(E) < \text{mes } f(E_l; \rho, \nu). \quad (I)$$

Равенство в (I) достигается только в том случае, когда  $E$  с точностью до множества меры нуль совпадает с некоторой дугой  $e^{i\alpha} E_l$ , и при этом только для функций  $f_{\alpha+\pi}(\xi; \rho, \nu)$  и  $f_\alpha(\xi; \rho, \nu)$  соответственно в левом и правом неравенстве в (I).

Пусть  $u(re^{i\theta}), r > 0$ , - интегрируемая по Лебегу функция от  $\theta$ , и пусть

$$u^*(re^{i\theta}) = \sup_{E: \text{mes } E = 2\theta} \int_E u(re^{i\varphi}) d\varphi \quad -$$

\* - функция Бернштейна (см. [I]). Так как  $\text{mes } f(E) = \int_E |f'(e^{i\theta})| d\theta$ , то при  $0 < \theta < \pi$  и  $f(\xi) \neq f_\alpha(\xi; \rho, \nu)$  (I) эквивалентно неравенствам

$$(\pm |f'(e^{i\theta})|)^* < (\pm |f'(e^{i\theta}; \rho, \nu)|)^* \quad (2)$$

Из соответствующего уточнения предложения 3 в [I] и неравенств (2) вытекает

ТЕОРЕМА 2. Пусть  $\Phi(t)$  - строго выпуклая возрастающая или убывающая функция при  $0 < t < \infty$ . Если  $f(\xi) \in \mathcal{F}(\rho, \nu)$  и  $f(\xi) \neq f_\alpha(\xi; \rho, \nu), \alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f'(e^{i\theta})|) d\theta < \int_0^{2\pi} \varphi(|f'(e^{i\theta}; \rho, \tau)|) d\theta. \quad (3)$$

В частности, при  $\rho < 0$  и  $\rho > 1$

$$\int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta})|^p d\theta < \int_0^{2\pi} |f'(e^{i\theta}; \rho, \tau)|^p d\theta. \quad (4)$$

Очевидно, соответствующие неравенства имеют место и на окружностях  $S_r$  при  $r$ , достаточно близких к 1.

2. Пусть  $E$  — континуум в круге  $U_R = \{z: |z| < R\}$ ,  $0 < R < \infty$ , и  $D_1(R, E)$  — двусвязная компонента  $U_R \setminus E$ . Через  $\text{cap } E$  и  $M_1(R, E)$  обозначаем соответственно емкость  $E$  и конформный модуль  $D_1(R, E)$ . Для континуумов  $E$ , лежащих в полуплоскости  $H_R = \{z: \text{Re } z > -R\}$ , используем аналогичные обозначения  $D_2(R, E)$  и  $M_2(R, E)$ .

ЗАДАЧА 1. Пусть  $\tau$ ,  $R_0$ ,  $R$  и  $m$  — фиксированные числа,  $0 \leq \tau < m < R_0 < R < \infty$ ,  $\mathcal{E}_1(m) = \{E: E \text{ — континуум, } \overline{U_\tau} \subset E \subset U_{R_0}, M_1(R_0, E) = R_0/m\}$ . В семействе  $\mathcal{E}_1(m)$  найти континуумы, реализующие соответственно максимум модуля  $M_1(R, E)$  и минимум емкости  $\text{cap } E$ .

ЗАДАЧА 2 — аналог задачи 1 в семействе  $\mathcal{E}_2(m)$  континуумов  $E$ , для которых  $\overline{U_\tau} \subset E \subset H_{R_0}$ ,  $M_2(R_0, E) = M_2(R_0, \overline{U_m})$ .

Задача 1 была поставлена В.В. Кожевниковым в 1980 г. в докладе на семинаре по геометрической теории функций при Кубанском университете (руководитель семинара проф. И.П. Митяк), однако она не была опубликована. В статье Р.Кляу [2] получены частичные результаты в задачах 1 и 2 и отмечается, что в случае функции  $\text{cap } E$  и  $\tau = 0$  эти задачи были поставлены Д.Гагером.

Пусть  $E_k(R, E) = \overline{U_\tau} \cup [-S_k, -\tau]$ , где величина  $S_k$  определяется из условия  $M_k(R, E_k(R, E)) = M_k(R, E)$ ,  $k = 1, 2$ . Решение задач 1 и 2 дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть  $0 < \tau < m < R_0 < R < \infty$ ,  $E \in \mathcal{E}_k(m)$ ,  $k = 1, 2$ . Тогда

$$M_k(R, E) \leq M_k(R, E_k(R_0, E)), \quad (5)$$

$$\text{cap } E \geq \text{cap } E_k(R_0, E). \quad (6)$$

При  $k = 1$  равенство в неравенствах (5) и (6) достигается только в случае  $E = e^{i\alpha} E_1(R_0, E)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , а при  $k = 2$  — только в случае  $E = E_2(R_0, E)$ .

3. Для доказательства теоремы 3 необходима

ЛЕММА I. Пусть  $E$  - континуум,  $E \subset U_R$  или  $E \subset H_R$ ,

$z = g_{R,k}(\xi)$ ,  $k=1,2$ , - конформный гомеоморфизм кольца  $K(p,1)$  на область  $D_k(1,R^{-1}E)$ ,  $g_{R,1}(1) = 1$ ,  $g_{R,2}(1) = \infty$ .

Тогда

$$\frac{d}{dR} \log M_k(R,E) = \frac{1}{2\pi R} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{|g'_{R,k}(e^{i\theta})|}, \quad k=1,2. \quad (7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, (9) достаточно доказать при  $R=1$ .

Пусть  $k=1$ , и пусть  $C(R) = (E_0, E_1)$  - конденсатор с пластинами  $E_0 = E$ ,  $E_1 = C_R$ ,  $P_E(R)$  - емкость  $C(R)$ . Применяя вариационную формулу для  $P_E(R)$  из работы [3], с.278, получаем

$$P_E(1+\varepsilon) = P_E(1) - \varepsilon \int_{C_1} \left[ \frac{\partial \omega(z, E)}{\partial z} \right]^2 ds + O(\varepsilon^2), \quad (8)$$

где  $\omega(z, E) = 1 - \log |g_{1,1}^{-1}(z)| / \log p$  - гармоническая мера  $C_1$  относительно области  $D_1(1, E)$ . При  $z \in C_1$  выполняется равенство

$$\operatorname{arg} \left\{ z (g_{1,1}^{-1}(z))' / g_{1,1}^{-1}(z) \right\} = 0. \quad (9)$$

Используя условия Коши-Римана, из (8) и (9) находим

$$P_E(1+\varepsilon) = P_E(1) - \varepsilon \log^{-2} p \int_{C_1} |(g_{1,1}^{-1}(z))'|^2 ds + O(\varepsilon^2). \quad (10)$$

Полагая  $\xi = g_{1,1}^{-1}(z)$  и используя хорошо известное равенство  $M_1(R,E) = \exp \{ 2\pi P_E^{-1}(R) \}$ , из (10) получаем (7).

Отметим, что вариационная формула (8) получена в [3] в предположении, что рассматриваемая область ограничена дважды непрерывно дифференцируемыми кривыми. Возможность применения (8) в рассматриваемом случае обусловлена тем, что здесь изменяется только одна граничная компонента области  $D_1(1, E)$  - окружность  $C_1$ . Формулу (8) легко распространить и на случай области  $D_2(R, E)$ , после чего доказательство (7) для случая  $k=2$  проводится также, как и для  $k=1$ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. При  $k=1$  неравенство (5) вместе с утверждением о случае равенства вытекает из неравенства (4) при  $R=-1$  и равенства (7). Для доказательства неравенства (5) при  $k=2$  заметим, что существуют не зависящие от  $E$  число  $\nu_1 > 0$  и отображение  $\psi(z) = a/(1-z) + b$ ,  $a > 0$ ,  $b \in \mathbb{R}$ , такие, что  $g_{1,2}(\xi) = \psi(f(\xi))$ , где  $f(\xi) \in \mathcal{F}(p, \nu)$ . Так как величина  $|\psi'(e^{i\theta})| = a/2 \sin(\theta/2)$  убывает при  $0 < \theta < \pi$ , то при

условии  $E \neq E_2(R_0, E)$  из неравенства (2) получаем

$$(-|q'_{1,2}(e^{i\theta})|)^* < (-|\psi' \cdot f'(e^{i\theta}); \rho, \nu_1|)^*.$$

Отсюда следует, что для функций  $q_{1,2}(\xi)$  и  $\psi(f(\xi; \rho, \nu_1))$  и для любой строго выпуклой убывающей функции  $\Phi(t)$  справедливо неравенство (3) и, в частности, неравенство (4) при  $\rho = -1$ . Отсюда и из леммы I вытекает (5) с утверждением о случае равенства.

Для доказательства неравенств (6) воспользуемся соотношением

$$\text{cap } E = K \lim_{R \rightarrow \infty} R M_K^{-1}(R, E), \quad K = 1, 2, \quad (\text{II})$$

которое следует из равенства емкости континуума  $E$  и конформного радиуса области, дополнительной к  $E$  и содержащей точку  $\infty$ .

Неравенства (6) вытекают непосредственно из (5) и (II).

Пусть  $R_0 < R_1 < \infty$  и  $E \neq e^{i\alpha} E_1(R_0, E)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , или  $E \neq E_2(R_0, E)$ . Тогда  $M_K(R_1, E) < M_K(R_1, E_K(R_0, E))$  и  $\text{cap } E > \text{cap } E_K(R_1, E)$ . Из последних неравенств следует утверждение теоремы относительно равенства в (6).

4. Доказательство теоремы I. Пусть  $f(\xi) \in \mathcal{F}(\rho, \nu)$  и пусть  $f(\xi)$  отображает  $K(\rho, 1)$  на кольцо  $K(\nu, 1)$  с разрезом по жордановой кривой  $\ell$  с концевыми точками  $z_1$  и  $z_2$ , где  $z_1 \in C_\nu$ ,  $z_2 \in K(\nu, 1)$ . Укорачивая разрез  $\ell$ , начиная с точки  $z_2$ , образуем левнеровское семейство областей  $D(t)$ , причем параметр  $t$  выбираем таким образом, чтобы конформный модуль области  $D(t)$  был равен  $\rho^{-1} e^{-t}$ ,  $0 \leq t < t^*$ . Пусть  $f(\xi, t)$  - конформный гомеоморфизм кольца  $K(q_t, 1)$ ,  $q_t = \rho e^{-t}$ , на  $D(t)$ ,  $f(1, t) = 1$ . Функция  $f(\xi, t)$  является решением уравнения Голузина-Коману (см. [4]), которое для функций из класса  $\mathcal{F}(\rho, \nu)$  имеет вид

$$\frac{d \log f(\xi, t)}{dt} = \mathcal{H}_{q_t}(x(t)q_t / f(\xi, t)) - \mathcal{H}_{q_t}(x(t)q_t), \quad (\text{I2})$$

где  $x(t)$  - непрерывная унимодулярная функция,

$$\mathcal{H}_q(z) = \frac{1+z}{1-z} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} (z^n - z^{-n}) = \mathcal{H} + i \frac{\mathcal{V}'_4(v)}{\mathcal{V}_4(v)}, \quad (\text{I3})$$

$v = (2\pi i)^{-1} \log(z/q)$ ,  $\mathcal{V}_4(v) = \mathcal{V}_4(v, q)$  - эллиптическая тета-функция.

Дифференцируя (I2) по  $\xi$  и используя равенство

$$\operatorname{arg} \{ e^{i\theta} f'(e^{i\theta}, t) / f(e^{i\theta}, t) \} = 0, \text{ получим}$$

$$\frac{d}{dt} |f'(e^{i\theta}, t)| = -|f'(e^{i\theta}, t)| \Im \mathcal{K}'_q(\xi), \quad (I4)$$

где  $q_t = q_t$ ,  $\xi = x(t)q_t / f(e^{i\theta}, t)$ .

Пусть  $E \subset C_1$  и  $\operatorname{mes} E = 2\ell$ ,  $0 < \ell < \pi$ . Интегрируя равенство (I4) по множеству  $E$  и полагая  $x(t)f(e^{i\theta}, t) = e^{-i\psi}$ , приходим к равенству

$$\frac{d}{dt} \int_E |f'(e^{i\theta}, t)| d\theta = \int_{E_1} q_t e^{i\psi} \mathcal{K}'_{q_t}(q_t e^{i\psi}) d\psi, \quad (I5)$$

где  $E_1 = \{ e^{i\psi} : \psi = -\operatorname{arg}(x(t)f(e^{i\theta}, t)), \theta \in E \}$ .

Используя известные равенства (см. [5]),

$$\frac{\mathcal{V}'_4(v)}{\mathcal{V}'_4(v)} = 2K(\kappa) \left\{ E(u) - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} u \right\} = 2K(\kappa) \left\{ \int_0^u dn^2(x, \kappa) dx - \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} u \right\},$$

где  $\kappa$  определяется из уравнения  $\mathcal{K}'(\kappa) = -K(\kappa) \log q$ ,  $u = 2K(\kappa)v$ , из (I3) получаем, что функция  $F(\theta) = q e^{i\theta} \mathcal{K}'_q(q e^{i\theta})$  убывает при  $0 < \theta < \pi$ .

Пусть  $u(t) = (1/2) \operatorname{mes} f(E, t)$ ,  $v(t) = (1/2) \operatorname{mes} f(E_\ell; \rho, \nu)$

и

$$F(u, t) = \int_{-u}^u q_t e^{i\psi} \mathcal{K}'_{q_t}(q_t e^{i\psi}) d\psi.$$

Пусть  $\operatorname{mes}(E \cap (e^{i\alpha} E_\ell)) < 2\ell$  при любом  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Из (I5), используя монотонность функции  $F(\theta)$  и известное неравенство (см., например, [6]):  $|f'(e^{i\theta})| \geq |f'(-1; \rho, 0)| > 0$ , получаем, что при  $0 < t < t^*$

$$\frac{du(t)}{dt} \leq F(u(t), t) - \delta, \quad \frac{dv(t)}{dt} = F(v(t), t), \quad (I6)$$

$$u(0) = v(0). \quad (I7)$$

Здесь  $\delta > 0$  зависит только от  $E$  и  $\rho$ .

Из (I6), (I7) легко вытекает существование постоянной  $\delta_1 > 0$  такой, что

$$u(t) \leq v(t) - \delta_1 t, \quad 0 < t \leq t' < t^*. \quad (I8)$$

Так как множество функций  $f(\xi)$ , отображающих кольцо  $K(\rho, 1)$  на кольцо  $K(\nu, 1)$  с разрезом по жордановой кривой, плотно в классе  $\mathcal{F}(\rho, \nu)$ , то из (I8) вытекает утверждение теоремы в рас-

смаатриваемом случае.

Для множеств  $E$ , совпадающих с точностью до множества меры нуль с некоторой дугой  $e^{i\alpha} E_\rho$ , утверждение теоремы известно (см., например, [7]). Теорема доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ. О полученном доказательстве теоремы 3 мною было написано письмо проф. Д.Гаьеру. После этого я получил письмо от Р.Лаугезена в котором сообщается, что им также получено доказательство теоремы 3 и приведены краткие тезисы этого доказательства. Доказательство Р.Лаугезена отличается от нашего и использует теорию потенциала.

#### Литература

1. B a e r n s t e i n A.II. Integral means, univalent functions and circular symmetrization. - Acta Math., 1974, vol.133, N 3-4, p.139-169.
2. K ü h n a u R. Über ein Modul-Kapazitätsproblem von D.Gaier. - Mitteilungen Math.Semin.Giessen, 1990, Hf.198, S.85-119.
3. Ш и ф ф е р М. Некоторые новые результаты в теории конформных отображений. - Приложение к кн.: Курант Р. Принцип Дирихле, конформные отображения и минимальные поверхности. М., 1953, с.234-301.
4. Г о л у з и н Г.М. О параметрическом представлении функций, однолистных в кольце. - Матем.об., 1951, т.29, № 2, с.469-476.
5. Б е й т м е н Г., Э р д е й и А. Высшие трансцендентные функции. Т.3. М., 1967.
6. D u r e n P.L., S c h i f f e r M. A variational method for functions schlicht in an annulus. - Arch.Rat.Mech., 1962, vol.9, № 3, p.260-272.
7. J e n k i n s J.A. Some theorems on boundary distortion. - Trans.Amer.Math.Soc., 1956, vol.81, N 2, p.477-500.

Solynin A.Yu. Boundary distortions and change of module under extension of a doubly connected domain.

#### Summary

Let  $\mathcal{F}(\rho, \nu)$  denote the class of univalent analytic functions  $f(z)$  in the domain  $\mathcal{K}(\rho) = \{z: \rho < |z| < 1\}$ , satisfying  $|f(z)| = 1$  for  $|z| = 1$  and  $\nu < |f(z)| < 1$  for  $z \in \mathcal{K}(\rho)$ . Let  $f(z; \rho, \nu)$  map  $\mathcal{K}(\rho)$  onto the domain  $\mathcal{K}(\nu) \setminus [\nu, s]$  and let  $f(z; \rho, \nu) \in \mathcal{F}(\rho, \nu)$ .

THEOREM 2. Let  $f(z) \in \mathcal{F}(\rho, \nu)$ ,  $f(z) \neq e^{i\alpha} f(z; \rho, \nu)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

and  $\varphi(t)$  be a strictly convex monotone function of  $t > 0$ . Then

$$\int_0^{2\pi} \varphi(|f'(e^{i\theta})|) d\theta < \int_0^{2\pi} \varphi(|f'(e^{i\theta}; \rho, \tau)|) d\theta.$$

The proof of this theorem is based on the Golusin-Komatu equation.

If  $E$  is a continuum in the disk  $U_R = \{z: |z| < R\}$ , then  $M(R, E)$  denotes the conformal module of the doubly connected component of  $U_R \setminus E$ ; let  $\mathcal{E}(m) = \{E: \bar{U}_r \subset E \subset U_1, M(1, E) = m^{-1}\}$ .

PROBLEM. Find the maximum of  $M(R, E)$ ,  $R > 1$ , and the minimum of  $\text{cap } E$  over all  $E$  in  $\mathcal{E}(m)$ . This problem was posed by V.V. Koževnikov in a lecture to the seminars on geometric function theory at the Kuban university in 1980, and by D. Gaier (see [2]). The solution of this problem is given by the following theorem.

THEOREM 3. Let  $E^* = \bar{U}_m \cup [m, s]$ . If  $R > 1$ ;  $E, E^* \in \mathcal{E}(m)$  and  $E \neq e^{i\alpha} E^*$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , then

$$M(R, E) < M(R, E^*), \text{cap } E^* < \text{cap } E.$$

A similar statement is also proved for continua lying in the half-plane.

ADDENDUM. When the paper was ready for publication, the author obtained a letter from R. Laugesen with the information that he had also proved Theorem 3 by a different method based on results of A. Baernstein.II on potential theory.