А. Г. Витушкин, В. В. Ежов, Н. Г. Кружилин, Продолжение локальных отображений псевдовыпуклых поверхностей, *Докл. АН СССР*, 1983, том 270, номер 2, 271–274

УДК 517.5 МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент А.Г. ВИТУШКИН, В.В. ЕЖОВ, Н.Г. КРУЖИЛИН

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЛОКАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Пусть M_1 и M_2 – две связные вещественно-аналитические строго псевдовыпуклые гиперповерхности в n-мерных комплексных многообразиях X_1 и X_2, $n \geqslant 2$. Локальным отображением поверхности M_1 в поверхность M_2, переводящим точку $\xi_1 \in M_1$ в точку $\xi_2 \in M_2$, будем называть всякое отображение φ, определенное в некоторой окрестности U точки ξ_1, где $U \cap X_1$ связно, биголоморфно отображающее U в X_2, переводящее ξ_1 в ξ_2, а множество $M_1 \cap U$ в M_2. Поверхности M_1 и M_2 называются локально эквивалентными, если можно указать точки $\xi_1 \in M_1$, $\xi_2 \in M_2$ и локальное отображение φ из M_1 в M_2, переводящее ξ_1 в ξ_2.

Результатом заметки является следующее утверждение.

Теорема. *Если вещественно-аналитические односвязные компактные строго псевдовыпуклые гиперповерхности локально эквивалентны, то они биголоморфно эквивалентны.*

Доказательство теоремы основано на лемме о возможности продолжения локальных отображений.

Лемма. *Пусть M_1 и M_2 – несферические (локально не эквивалентные сфере) вещественно-аналитические строго псевдовыпуклые гиперповерхности, причем M_2 компактна.*

Тогда всякое локальное отображение φ: $M_1 \to M_2$, определенное в окрестности точки $\xi \in M_1$, продолжается вдоль любого пути γ с началом в точке ξ.

Отметим также следующее утверждение, вытекающее из леммы и результатов работы [1] о голоморфном продолжении локальных отображений: если M_1 и M_2 компактны, то размеры окрестности U точки, в которую голоморфно продолжается локальное отображение φ, не зависят от φ.

Внимание к задаче о продолжении локальных отображений привлечено статьей Г. Александера [2]. В работах А. Пуанкаре [3], Н. Танаки [4], Г. Александера [2] доказано, в частности, что локальное отображение сферы $S^{2n-1} \subset \mathbf{C}^n$ в себя продолжается до автоморфизма шара, ограниченного этой сферой (и потому является дробно-линейным).

С другой стороны, имеется пример компактных сферических (локально эквивалентных сфере) поверхностей, для которых локальное отображение одной в другую не продолжается (см. [5], а также [6]).

В.К. Белошапкой в [11] построена пара поверхностей с невырожденной знакопеременной формой Леви, локально не эквивалентных квадрике, для которых локальное отображение также не продолжается.

С.И. Пинчук (см. [6]) показал, что локальное отображение вещественно-аналитической строго псевдовыпуклой гиперповерхности из $\mathbf{C}^n$ в компактную гиперповерхность того же вида продолжается вдоль путей на первой поверхности. Подчеркнем, что конструкция Пинчука существенно использует условие принадлежности гиперповерхности пространству $\mathbf{C}^n$.

Доказательство сформулированного здесь результата для поверхностей в произвольных комплексных многообразиях потребовало нового подхода к задаче.

1. Распрямление поверхности вдоль цепи. Обозначим через $\widetilde{\mathbf{C}}^n$ пространство с координатами $z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$, ρ, θ, где z – комплексные, а $\rho > 0$ и θ – вещественные числа. Положив $w = \rho e^{i\theta}$, можно ввести на $\widetilde{\mathbf{C}}^n$

структуру комплексного многообразия с локальной системой координат (z, w).

Рассмотрим класс поверхностей из $\widetilde{\mathbf{C}}^n$, задаваемых уравнением вида

$$(1) \qquad 1-\rho^2 = \langle z, z\rangle + \sum_{k,l=2}^{\infty} \Phi_{k,l}(z, \bar{z}, \theta),$$

где $\langle z, z\rangle = \sum_{1}^{n-1} z_j\bar{z}_j$, $\Phi_{k,l}(z, \bar{z}, \theta)$ есть многочлен степеней k и l по z и $\bar{z}$ соответственно с коэффициентами, аналитически зависящими от θ. При этом $\Phi_{22}, \Phi_{32}, \Phi_{33}$ удовлетворяют дополнительным условиям $\operatorname{tr}\Phi_{22} = \operatorname{tr}^2\Phi_{32} = \operatorname{tr}^3\Phi_{33} = 0$ (определение оператора tr см. в [8]).

В [7] доказывается, что для всякой вещественно-аналитической строго псевдовыпуклой гиперповерхности в комплексном многообразии X и для всякой точки $\xi \in M$ существует биголоморфное отображение h из некоторой окрестности точки ξ в $\widetilde{\mathbf{C}}^n$, переводящее M в поверхность вида (1). Такое отображение h будем называть *нормализацией* M *в точке* ξ. Отметим, что цепи на гиперповерхности M, введенные Э. Картаном, С. Черном и Ю. Мозером, в данной ситуации есть те и только те кривые, которые нормализациями M могут быть переведены в прямую $z = 0$, $\rho = 1$. Если нормализация h гиперповерхности M в точке ξ переводит цепь в указанную прямую, то будем говорить, что h *распрямляет* γ. В этом случае значение координаты θ задает на γ параметр $\theta_h = h|_\gamma$, который назовем *нормальным*. Интервалом изменения нормального параметра θ_h является максимальный интервал (θ_h^-, θ_h^+) на прямой $z = 0$, $\rho = 1$, в окрестность которого отображение h^{-1} продолжается как локально-биголоморфное.

Пусть γ – цепь на M и θ – некоторый нормальный параметр на γ с интервалом изменения (θ^-, θ^+). Будем говорить, что угол цепи γ с комплексной касательной к M отделен от нуля при возрастании (убывании) параметра, если для всякой последовательности значений параметра $\theta_\nu \to \theta^+$ (соответственно $\theta_\nu \to \theta^-$) такой, что последовательности точек $\gamma(\theta_\nu)$ и направлений касательных векторов $\dot{\gamma}(\theta_\nu)$ сходятся, предельное направление трансверсально к комплексной касательной. Отметим, что если цепь обладает указанным свойством при некоторой параметризации, то она обладает им при всякой нормальной параметризации, т.е. это свойство является характеристикой цепи.

2. Продолжение отображения вдоль путей. Доказательство леммы складывается из следующих трех утверждений, доказанных в [7, 9, 10].

Утверждение 1. *Пусть h – нормализация поверхности M, распрямляющая цепь γ. Тогда h аналитически продолжается как нормализация вдоль всей цепи.*

Утверждение 2. *Пусть M – компактная вещественно-аналитическая строго псевдовыпуклая поверхность и угол цепи $\gamma \subset M$ с комплексной касательной отделен от нуля при возрастании параметра. Пусть, далее, нормализация h поверхности M вдоль цепи γ приводим M к виду* (1), *а интервал изменения соответствующего параметра есть* (θ^-, θ^+).

Тогда, если $\theta^+ < +\infty$, то найдется такой многочлен $\Phi_{k,l}(z, \bar{z}, \theta)$, что один из его коэффициентов неограничен при $\theta \to \theta^+$.

Утверждение 3. *Пусть цепь $\gamma \subset M$, а θ – некоторый нормальный параметр на γ с интервалом изменения (θ^-, θ^+).*

Тогда если угол γ с комплексной касательной не отделен от нуля при возрастании параметра, то $\theta^+ = +\infty$.

Утверждения, аналогичные утверждениям 2 и 3, могут быть доказаны и в случае изучения поведения угла при убывании параметра.

Покажем, как из приведенных выше утверждений следует возможность аналитического продолжения локальных отображений вдоль цепей. Пусть поверхности M_1, M_2 и локальное отображение φ удовлетворяют условию леммы и γ_1 –

цепь на M_1, проходящая через точку ξ. Рассмотрим нормализацию h_1 поверхности M_1 в точке ξ, распрямляющую γ_1. Тогда $h_2 = h_1 \circ \varphi^{-1}$ есть нормализация M_2 в точке $\varphi(\xi)$, распрямляющая цепь $\gamma_2 = \varphi(\gamma_1)$. Согласно утверждению 1 нормализации h_1 и h_2 продолжаются вдоль указанных цепей. Обозначим через $(\theta^-_{h_1}, \theta^+_{h_1})$ и $(\theta^-_{h_2}, \theta^+_{h_2})$ интервалы изменения соответствующих нормальных параметров.

Если $\theta^+_{h_2} < +\infty$, то согласно утверждению 3 угол цепи $\gamma_2 \subset M_2$ с комплексной касательной отделен от нуля при возрастании параметра. Из утверждения 2 следует, что коэффициенты уравнения вида (1), задающего поверхность $h_2(M_2)$ в $\tilde{\mathbf{C}}^n$, не продолжаются аналитически в окрестность точки $(0, 1, \theta^+_{h_2})$. Поскольку поверхность $h_1(M_1)$ задается в $\tilde{\mathbf{C}}^n$ тем же уравнением, мы получаем, что $\theta^+_{h_1} \leqslant \theta^+_{h_2}$. Аналогично, $\theta^-_{h_1} \geqslant \theta^-_{h_2}$ и интервал $(\theta^-_{h_1}, \theta^+_{h_1})$ лежит в интервале $(\theta^-_{h_2}, \theta^+_{h_2})$.

Отображение $h_2^{-1} \circ h_1$ совпадает с φ в некоторой окрестности точки ξ и, так как $(\theta^-_{h_1}, \theta^+_{h_1}) \subset (\theta^-_{h_2}, \theta^+_{h_2})$, продолжается вдоль γ_1. Таким образом, локальное отображение φ продолжается вдоль произвольной цепи, проходящей через точку ξ.

Пусть ζ – некоторая точка гиперповерхности M_1. Как известно (см., например, [5]), любую точку из некоторой окрестности ζ на M_1 можно соединить с ζ либо отрезком цепи, либо ломаной, состоящей из двух таких отрезков. Обозначим эту окрестность $V(\zeta)$. Предположим, что локальное отображение φ, удовлетворяющее условиям леммы, может быть аналитически продолжено в какую-то точку $\eta \in V(\zeta)$. Тогда φ продолжается в точку ζ, а значит, и на всю окрестность $V(\zeta)$. Поскольку произвольный путь на M_1, проходящий через точку ξ, можно накрыть конечным числом окрестностей вида $V(\zeta_i)$, мы получаем, что локальное отображение φ аналитически продолжается вдоль путей на M_1. Таким образом, лемма доказана. Для случая несферических поверхностей из леммы непосредственно следует утверждение теоремы.

Для завершения доказательства теоремы заметим следующее. Всякая цепь γ на $(2n-1)$-мерной сфере $S^{2n-1} = \left\{(z, w) \mid 1 - |w|^2 = \sum_{j=1}^{n-1} z_j \bar{z}_j\right\}$ в $\mathbf{C}^n$ представляет собой пересечение S^{2n-1} с некоторой комплексной прямой и потому является окружностью, которую дробно-линейным автоморфизмом сферы можно перевести в окружность $\gamma_0 = \{(z, w) \mid z = 0, |w| = 1\}$.

Преобразование h: $\mathbf{C}^n \to \tilde{\mathbf{C}}^n$ вида $z^* = z$, $\rho = |w|$, $\theta = \operatorname{Arg} w$ (здесь (z^*, ρ, θ) – координаты пространства $\tilde{\mathbf{C}}^n$) является нормализацией S^{2n-1} вдоль γ_0 и отображает γ_0 на всю прямую $\{z^* = 0, \rho = 1, -\infty < \theta < +\infty\}$. Отметим, что всякая нормализация S^{2n-1} вдоль цепи γ есть композиция h и некоторого автоморфизма S^{2n-1}, переводящего γ в γ_0. Следовательно, интервал изменения нормального параметра на γ есть $(-\infty, +\infty)$.

Поэтому любое локальное отображение сферической поверхности в сферу неограниченно продолжается вдоль путей на поверхности. Если сферическая поверхность M односвязна и компактна, то локальное отображение из M в S^{2n-1} продолжается до однозначного локально-биголоморфного отображения. В силу компактности M такое отображение является накрытием. Поскольку S^{2n-1} односвязна, это накрытие однозначно, и, следовательно, всякая односвязная компактная сферическая гиперповерхность биголоморфно эквивалентна сфере.

Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова

Поступило
21 XII 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. *Витушкин А.Г.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1982, т. 46, № 1, с. 28–35. 2. *Alexander H.* – Math. Ann., 1974, vol. 209, № 3, p. 249–256. 3. *Poincaré H.* – Rend. Circ. Mat. Palermo, 1907, vol. 23, p. 185–220. 4. *Tanaka N.* – J. Mat. Soc. Japan, 1962, vol. 14, № 4, p. 397–429. 5. *Burns D., Shneider S.* – Com. Mat. Helv., 1979, vol. 54, p. 199–217. 6. *Пинчук С.И.* – Матем. сб., 1978, т. 105 (147), № 4, с. 574–593. 7. *Витушкин А.Г.* – ДАН, 1983, т. 271, № 6, с. 1290–1294. 8. *Chern S., Moser J.* – Acta Math., 1974, vol. 133, № 3–4, p. 219–271. 9. *Ежов В.В.* – Изв. АН СССР. Сер. матем., 1983, т. 47, № 4, с. 874–893. 10. *Кружилин Н.Г.* – Там же, 1983, т. 47, № 4, с. 894–915. 11. *Белошапка В.К.* – Матем. заметки, 1982, т. 32, № 1, с. 121–123.

УДК 517.947.42 МАТЕМАТИКА

Л.И. КАМЫНИН, Б.Н. ХИМЧЕНКО

ОБ ОДНОМ АСПЕКТЕ ПРОБЛЕМЫ ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА

(Представлено академиком С.Л. Соболевым 31 X 1982)

Проблема единственности решения задачи Коши в классах быстрорастущих функций для параболического уравнения 2-го порядка представляет большой интерес для качественной теории таких уравнений и находит важные приложения в математической физике. Проблема единственности допускает, вообще говоря, два подхода.

1. Рассмотрев в полосе $\Pi(T) = \{(x, t) \equiv (x^1, x^2, \ldots, x^n; t) \in \mathbf{R}^{n+1}_{x,t} \mid |x| < < +\infty, 0 < t < T\}$ определенный класс $\mathfrak{P}(L)$ параболических операторов 2-го порядка вида

$$(1) \qquad Lu \equiv a^{ij}(x, t)D_iD_ju + a^i(x, t)D_iu + c(x, t)u - D_tu,$$

где по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до n и принято $D_i \equiv \partial/\partial x^i$, найти для этого класса $\mathfrak{P}(L)$ точный класс $S[\mathfrak{P}]$ быстрорастущих (при $|x| \to +\infty$) функций $S(x)$ такой, что для функции

$$(2) \qquad u \in C^{2,1}_{x,t}(\Pi(T)) \wedge C(\overline{\Pi}(T)),$$

являющейся решением однородной задачи Коши

$$(3) \qquad Lu(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Pi(T);$$

$$(4) \qquad u(x, 0) = 0, \quad |x| < +\infty,$$

из оценки

$$(5) \qquad |u(x, t)| \leqslant S(x) \quad \forall (x, t) \in \overline{\Pi(T)}$$

следовало бы равенство

$$(6) \qquad u(x, t) \equiv 0 \quad \text{в} \quad \overline{\Pi(T)}.$$

В указанной постановке (при изотропных относительно x функциях $S(x)$) проблема единственности рассматривалась и получила окончательное решение для линейных параболических уравнений 2-го порядка с неотрицательной характеристической формой в [1–3] (где приведена подробная библиография). Заметим, что точность класса $S[\mathfrak{P}]$ означает лишь существование хотя бы одного оператора (1)