О ДВОЙНЫХ ЧИСЛАХ И ИХ ФУНКЦИЯХ[1])

Д. Д. Ивлев

(Москва)

1. Двойные числа. *Двойным числом* α назовем пару действительных чисел, взятых в определенном порядке: $\alpha=(a,\ b)$; при $b=0$ условимся обозначать: $(a,\ 0)=a$. *Сложение* и *умножение* двойных чисел определяется так:

$$\alpha+\beta=(a,\ b)+(c,\ d)=(a+c,\ b+d),$$
$$\alpha\cdot\beta=(a,\ b)(c,\ d)=(ac+bd,\ ad+bc).$$

При таких определениях сохраняются все законы арифметики.

Особую роль будет играть число $j=(0,\ 1)$. Очевидно,

$$j^2=(0,\ 1)\cdot(0,\ 1)=1,\quad j^{2n}=1,\quad j^{2n+1}=j.$$

Всякое двойное число можно представить в виде $\alpha=a+jb$:

$$\alpha=(a,\ b)=(a,\ 0)+(0,\ 1)(b,\ 0)=a+jb.$$

Число $\beta=\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{a+jb}=\frac{a-jb}{a^2-b^2}$ назовем *обратным* числу α. Отсюда видно, что числа вида $a(1\pm j)$ не имеют обратных; их естественно называть *делителями нуля* (см. ниже, стр. 199).

Двойному числу $a+jb$ можно сопоставить точку плоскости с координатами a, b или вектор с теми же координатами. Числам $a(1\pm j)$ сопоставятся точки на двух пересекающихся прямых

---

[1]) Настоящая работа, выполненная автором еще на студенческой скамье, содержит обзор свойств так называемых двойных чисел, представляющих собой любопытную модификацию обыкновенных комплексных чисел (см. в настоящем выпуске статью И. М. Яглома «Комплексные числа и их применение в геометрии», стр. 61). С геометрическими применениями двойных чисел читатель может познакомиться по книге: Б. А. Розенфельд, Неевклидовы геометрии, гл. V, М., 1956; см. также И. М. Яглом, Проективные мероопределения на плоскости и комплексные числа, Труды семинара по векторному и тензорному анализу 7, 1948, стр. 276—318. Обзор чисто алгебраических свойств двойных чисел содержится в статье М. С. Королева, К алгебре двойных чисел, Ученые записки Орехово-Зуевского пединститута 7, вып. 2, 1957, стр. 113—136. (*Прим. ред.*)

$x \pm y = 0$, делящих плоскость на четыре четверти (I, II, III, IV на рис. 1).

Число $\bar{\alpha} = a - jb$ назовем *сопряженным* двойному числу $\alpha = a + jb$. *Модулем* двойного числа α назовем положительное число ρ, причем для I и III четвертей $\rho = \sqrt{a^2 - b^2}$, а для II и IV четвертей $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Абсолютную величину* двойного числа

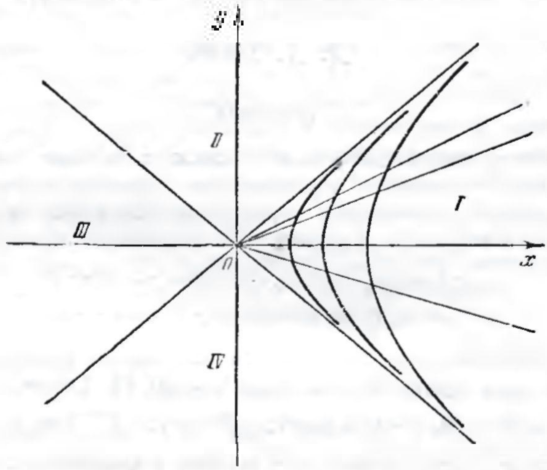

Рис. 1.

$\alpha = a + jb$ мы определим, как обычно: $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, для двойных чисел понятия модуля и абсолютной величины не совпадают, и мы будем обозначать модуль α символом $\boldsymbol{|}\alpha\boldsymbol{|}$ (жирные черточки!).

Определим теперь «тригонометрическую форму» двойного числа. Для чисел первой четверти

$$\alpha = a + jb = \sqrt{a^2 - b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} + j\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right) = \rho(\operatorname{ch}\varphi + j\operatorname{sh}\varphi),$$

где φ — *аргумент* двойного числа;

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}, \quad 0 < \rho < \infty, \quad -\infty < \varphi < \infty.$$

На (a, b)-плоскости линиями равного аргумента будут прямые, выходящие из начала координат, а линиями равного модуля — равносторонние гиперболы с асимптотами $x \pm y = 0$.

Для произведения и для частного двойных чисел будем иметь

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \rho_1 \cdot \rho_2 \left[\operatorname{ch}(\varphi_1 + \varphi_2) + j \operatorname{sh}(\varphi_1 + \varphi_2)\right],$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \left[\operatorname{ch}(\varphi_1 - \varphi_2) + j \operatorname{sh}(\varphi_1 - \varphi_2)\right].$$

Будет справедлива также «формула Муавра»:

$$[\rho(\operatorname{ch}\varphi + j\operatorname{sh}\varphi)]^n = \rho^n(\operatorname{ch} n\varphi + j\operatorname{sh} n\varphi), \quad \text{где } n > 0 \text{ — целое.}$$

Рассматривая корень n-й степени из двойного числа, мы находим, что имеется лишь одно значение корня, лежащее в I четверти:

$$[\rho(\operatorname{ch}\varphi + j\operatorname{sh}\varphi)]^{1/n} = \rho^{1/n}\left(\operatorname{ch}\frac{\varphi}{n} + j\operatorname{sh}\frac{\varphi}{n}\right).$$

Легко видеть, что сумма, произведение и частное двух двойных чисел I четверти сами принадлежат I четверти, а разность, вообще говоря, не принадлежит.

В приводимой таблице показано, какой четверти принадлежит произведение двойных чисел данных четвертей.

	I	II	III	IV
I	I	II	III	IV
II	II	I	IV	III
III	III	IV	I	II
IV	IV	III	II	I

Вопрос о возвышении в целую степень двойных чисел любой четверти решается очень просто: при возвышении в четную степень двойные числа будут лежать в I четверти, а в нечетную — в своей. Иначе обстоит дело с извлечением корня. Если $\sqrt{1}$ имеет четыре значения: ± 1, $\pm j$, то величины $\sqrt{j}$, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-j}$ вообще не будут иметь ни одного (двойного) значения. В самом деле, пусть, например, $\sqrt{j} = a + jb$; тогда $j = a^2 + b^2 + 2jab$, откуда $a^2 + b^2 = 0$, $2ab = 1$, что невозможно. Вообще, корень четной степени можно извлечь лишь из чисел I четверти, причем он имеет четыре значения, находящиеся в разных четвертях. Корень нечетной степени можно извлечь всегда, причем он имеет одно значение, принадлежащее той же четверти, что и исходное число.

Делители нуля, по определению, имеют модуль, равный нулю. Очевидно, что любое двойное число может быть представлено в виде суммы двух делителей нуля:

$$a + jb = \frac{a+b}{2}(1 + j) + \frac{a-b}{2}(1 - j).$$

Заметим, что произведение двух делителей нуля разного рода есть нуль, ибо $(1 + j)(1 - j) = 0$. Сокращать на нулевые числа нельзя, ибо, например, $(a + jb)(1 + j) = (a + b)(1 + j)$.

Аналогом числовой римановой сферы для двойных чисел служит «числовой гиперболоид», точки которого можно взаимно однозначно отобразить на плоскость двойного переменного. Пусть уравнение гиперболоида имеет вид

$$\xi^2-\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4} \quad \text{или} \quad \xi^2-\eta^2=\zeta(1-\zeta).$$

Двойному числу $\alpha=x+jy$ сопоставим точку $M_1(\xi, \eta, \zeta)$ гиперболоида, принадлежащую прямой OM, где $O(0, 0, 1)$, $M(x, y)$ (стереографическая проекция). Отсюда легко получаем:

$$\zeta=\frac{x^2-y^2}{x^2-y^2+1}, \quad \xi=\frac{x}{x^2-y^2+1}, \quad \eta=\frac{y}{x^2-y^2+1}.$$

Введение числового гиперболоида наглядно поясняет понятие четвертей и делителей нуля. При этом равносторонняя гипербола плоскости xy: $A(x^2-y^2)+Bx+Cy+D=0$ (A, B, C, D — действительные числа) является проекцией плоского сечения гиперболоида $B\xi+C\eta+(A-D)\zeta+D=0$ и обратно.

Двойному числу $\alpha=a+jb$ сопоставим комплексное число $\alpha^*=a+ib$. Если обозначить $\Phi(\alpha)=\alpha^*$, то легко проверить, что

$$\Phi(C\alpha)=C\Phi(\alpha) \qquad (C \text{ — действительное число}),$$
$$\Phi(\alpha_1+\alpha_2)=\Phi(\alpha_1)+\Phi(\alpha_2).$$

Обратное преобразование Φ^{-1} обладает теми же свойствами. Аналогично, если положить $\Psi(\alpha)=\alpha^{**}$, где $\alpha=\rho(\operatorname{ch}\varphi+j\operatorname{sh}\varphi)$ — двойное число I четверти и $\alpha^{**}=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — комплексное число, то

$$\Psi(C\alpha)=C\cdot\Psi(\alpha) \qquad (C \text{ — действительное число}),$$
$$\Psi(\alpha_1\cdot\alpha_2)=\Psi(\alpha_1)\cdot\Psi(\alpha_2),$$

и для действительных чисел $\Psi(c_1+c_2)=\Psi(c_1)+\Psi(c_2)$. Очевидно, что обратное преобразование Ψ^{-1} обладает теми же свойствами.

Введенные преобразования могут быть полезными при доказательстве ряда теорем исчисления двойных чисел, так как они позволяют в некоторых случаях непосредственно переносить доказательства этих теорем из теории функций комплексного переменного.

Предел последовательности двойных чисел можно было бы определить, как обычно: z_0 является пределом последовательности двойных чисел, если, начиная с некоторого $n>N(\varepsilon)$, при любом $\varepsilon>0$ имеет место неравенство $|z_n-z_0|<\varepsilon$. Можно также дать определение предела последовательности, пользуясь понятием модуля двойного числа. Заметим, что из ограниченности двойного числа по модулю вовсе не следует ограниченность его по абсолютной величине. Ограниченность по абсолютной величине будет выполнена при $\|z\|<A$ и $|\varphi(z)|<B$, где $\varphi(z)=\arg z$, A и B — действительные положительные числа. Таким образом, можно назвать z_0 пределом

последовательности двойных чисел $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$, если при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при $n > N$ $\| z_n - z_0 \| < \varepsilon$ и $|\varphi(z_n - z_0)| < B$.

Очевидно, что два приведенных определения предела не эквивалентны. Ограниченность по углу при втором определении исключает из рассмотрения числа, лежащие на прямых, параллельных прямым $x \pm y = 0$ и проходящих через точку z_0. Отсюда вытекает, что последовательность, сходящаяся по первому определению, может расходиться по второму определению — первое определение сходимости является более широким.

2. Функции двойного переменного. *Функция двойного переменного* $w = f(z)$ имеет вид

$$w = u(x, y) + jv(x, y) \qquad (z = x + jy),$$

где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — действительные функции двух переменных.

Понятие *непрерывности* функции $w = f(z)$ можно ввести по-разному: 1) функция $f(z)$ непрерывна в точке $z = z_0$, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что имеет место $|f(z) - f(z_0)|$ для всех z, удовлетворяющих равенству $|z - z_0| < \delta$; 2) функция $f(z)$ непрерывна в точке $z = z_0$, если для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство $\| f(z) - f(z_0) \| < \varepsilon$ для всех z, удовлетворяющих неравенству $\| z - z_0 \| < \delta$, причем $\operatorname{Arg}(f(z) - f(z_0)) < B_1$, $\operatorname{Arg}(z - z_0) < B_2$, где $B_i = \text{const}$, $-\infty < B_i < \infty$.

Приведенные два определения непрерывности функции неэквивалентны: функция, непрерывная по второму определению, может быть разрывна по первому, так как ничего нельзя сказать о значениях функции на прямых, параллельных прямым $x \pm y = 0$ и проходящих через точку $w_0 = f(z_0)$ (такие прямые будем называть *характеристическими*). Функция, непрерывная по первому определению, может не удовлетворять условиям непрерывности по второму: в самом деле, точки плоскости $z = x + jy$, лежащие на каком-либо нехарактеристическом направлении, могут перейти в характеристические для $w = u + jv$, что невозможно в случае второго определения.

Переходя к *дифференцированию* функции двойного переменного, отметим, что формально можно определить понятие производной различными способами, соответственно разным определениям непрерывности в точке. Мы примем следующее определение: функция $f(z)$ *дифференцируема* в точке z_0 области G, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что неравенство $\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ выполняется, когда $|z - z_0| < \delta$ ($\| z - z_0 \| \neq 0$). Здесь $f'(z_0)$ — вполне определенное двойное число, называемое *значением производной* функции от $f(z)$ в точке $z = z_0$.

Функцию $w=f(z)$ мы назовем *моногенной* в точке, если она в ней дифференцируема, и *аналитической*, если она дифференцируема при всех z, где $|z-z_0|<\varepsilon$, $|z-z_0|\neq 0$.

Условия Даламбера — Эйлера для функций двойного переменного запишутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x},$$

так что

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0, \quad v=\int \frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C.$$

Так как решения волнового уравнения могут быть написаны в общем виде, то легко найти

$$u=\Psi(x+y)+\Theta(x-y), \quad v=\Psi(x+y)-\Theta(x-y)$$

(постоянную в формуле для v мы отбрасываем).

Любую аналитическую функцию двойного переменного можно представить в виде суммы двух специальных функций:

$$w=u+jv=[\Psi(x+y)+\Theta(x-y)]+j[\Psi(x+y)-\Theta(x-y)]=$$
$$=\Psi(x+y)(1+j)+\Theta(x-y)(1-j).$$

Очевидно, что если аналитическая функция двойного переменного определена на отрезке кривой $y=f(x)$, для которой $\left|\frac{dy}{dx}\right|<1$ или $\left|\frac{dy}{dx}\right|>1$, то функция $w=w(z)$ легко может быть определена в соответствующем прямоугольнике $ABCD$ (рис. 2).

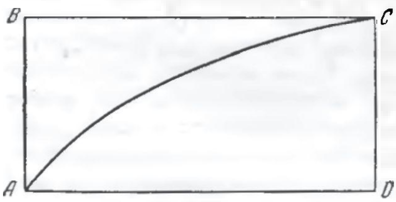

Рис. 2.

Ряды могут быть сходящимися в смысле первого или второго определения предела. Не останавливаясь на связанных с этим вопросах, мы коснемся лишь степенных рядов: $c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$ Если такой ряд сходится при $z=z_0$, то он сходится и при всяком z, для которого $|z|<|z_0|$, причем $\operatorname{Arg} z<B$. Определение *модуля сходимости* степенных рядов может быть дано на основе формулы Коши — Адамара $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{|c_n|}}$. Из этой формулы следует, что ряды

$$1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\ldots, \quad 1\pm\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}\pm\frac{z^6}{6!}+\ldots,$$
$$z\pm\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}\pm\frac{z^7}{7!}+\ldots$$

сходятся во всей плоскости двойного переменного. Если условимся обозначать функции, определяемые этими рядами, соответственно через e^z, $\operatorname{ch} z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\sin z$, то для этих функций, аналитических во всей плоскости, справедливы следующие соотношения:

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^{jz} + e^{-jz}),\quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),\quad \operatorname{sh} z = \frac{1}{2j}(e^{jz} - e^{-jz}),$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}),\quad \operatorname{sh} jz = j \operatorname{sh} z,\quad \operatorname{ch} jz = \operatorname{ch} z,\quad \sin jz = j \sin z,$$

$$\cos jz = \cos z.$$

Отметим, что *некоторые соотношения теории относительности* удобно записать, пользуясь двойными числами. Для примера остановимся на преобразованиях Лоренца:

$$x^* = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},\quad t^* = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Если положить $ct = t_1$, $ct^* = t_1^*$, то легко получить

$$x^* + jt_1^* = \frac{(x + jt_1)\left(1 - \frac{v}{c} j\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Полагая $z = x + jt_1$, $z^* = x^* + jt_1^*$, получим $z^* = ze^{j\varphi}$, где $\varphi = \operatorname{Arth}\frac{v}{c}$. Таким образом, преобразования Лоренца сводятся к гиперболическому повороту.

Понятие *интеграла* функции двойного переменного введем, как обычно. Составим сумму $\sum f(z_k)\,\Delta z_k$, где $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ и устремим $|\Delta z_k|$ к нулю. Пределом составленной суммы и будет интеграл $\int f(z)\,dz$. Повторяя обычные в этих случаях рассуждения, можно показать, что

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_\Gamma (u\,dz + v\,dy) + j\int_\Gamma (u\,dy + v\,dx).$$

Легко доказать, что если функция $w = f(z)$ двойного переменного аналитическая в области G и имеет в каждой точке непрерывную производную, то интеграл вдоль замкнутого контура будет равен нулю (теорема Коши).

Пользуясь этой теоремой, можно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda x^2} \operatorname{ch}(2\lambda\alpha x)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda} e^{\lambda\alpha^2}}.$$