Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

R. Gonchigdorzh, Orders of direct products of prime Artinian rings,
Algebra Logika, 1981, Volume 20, Number 6, 620–637

https://www.mathnet.ru/eng/al1750

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.81
January 16, 2026, 02:31:10

Алгебра и логика, 20, № 6 (1981), 620-637

УДК 519.48

ПОРЯДКИ ПРЯМЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ПРОСТЫХ АРТИНОВЫХ КОЛЕЦ

Р. ГОНЧИГДОРЖ

Одно из направлений обобщения теорем Голди о (правых) порядках простых артиновых и полупростых артиновых колец [1-3] состоит в описании порядков прямых (не обязательно конечных) произведений простых артиновых колец. Это часть общей задачи изучения порядков колец из данного класса колец. В указанном направлении можно отметить, например, следующие результаты: описание порядков артиновых колец (Смолл [4], Робсон [5]); описание порядков квазифробениусовых колец (Джанс [6], Шок [7, 8] Тачикава [9]); описание порядков совершенных колец (Гупта [10]); описание порядков прямых произведений тел [11].

В настоящей работе дается описание (правых) порядков прямых произведений простых артиновых колец (теорема 2.6). В доказательстве будут использованы метод вложения классического (правого) кольца частных (если оно существует) антисингулярного кольца в максимальное (правое) кольцо частных и условие совпадения этих колец частных. Такой метод уже использовался в некоторых доказательствах теорем Голди (см., например, [12, 13]).

Полученная с применением понятия элементарного условия [14] специализация теоремы 2.6 дает характеризацию порядков прямых произведений простых артиновых колец, индексы (естественных) матричных представлений которых ограничены, т. е. характеризацию порядков конечных прямых произведений матричных колец над строго регулярными, самоинъективными кольцами с аннуляторным условием (замечание 2.9, теорема 3.6). Это обобщает теорему Роуэна [14, теорема 7] на бесконечномерный (в смысле Голди) случай и связано с одним результатом Бейдара К. И. и Михалева А. В. [15], получивших аналоги теоремы Голди [1-3] для полупервичных колец, макси-

© Институт математики СО АН СССР, 1981

мальное (правое) кольцо частных которых является конечным прямым произведением колец матриц над строго регулярными, самоинъективными (справа) кольцами [15].

§ 1. Основные понятия и предварительные леммы

Пусть R – (ассоциативное) кольцо (не обязательно содержащее единицу). Если S – непустое подмножество кольца R, то правым (левым) аннулятором подмножества S (в кольце R) называется правый (левый) идеал $r_R(S)=\{x\in R \mid sx=0$ для всех $s\in S\}$ ($\ell_r(S)=\{x\in R \mid xs=0$ для всех $s\in S\}$) кольца R. Правые (левые) идеалы вида $r_R(S)$ ($\ell_R(S)$), где $S\subseteq R$, называются аннуляторными правыми (левыми) идеалами кольца R. Для кольца R обозначим через R' кольцо, полученное из R формальным присоединением единицы (если R не имеет единицу). Для подмножества $S\subseteq R$ его правым (левым) ортогональным аннулятором назовем идеал $S^{\perp}=\{x\in R \mid sR'x=0$ для всех $s\in S\}$ (${}^{\perp}S=\{x\in R \mid xR's=0$ для всех $s\in S\}$). Если кольцо R полупервичное, то $S^{\perp}={}^{\perp}S$ для любого $S\subseteq R$ и в этом случае эти идеалы назовем просто аннуляторными идеалами кольца R.

Для полупервичного кольца R бинарное отношение $\leqslant$, определенное правилом

$$a\leqslant b \iff aR(b-a)=0, \tag{1}$$

является отношением частичного упорядочения [16].

Это упорядочение в кольце без нильпотентных элементов дает упорядочение в смысле Абиана [17]; понятия супремума, ортогональной полноты и ортогональной почти-полноты являются обобщениями соответствующих понятий из [17] и [11].

Непустое подмножество $M\subseteq R$ называется *ортогональным*, если для любых $m,n\in M$, где $m\neq n$, верно $m\perp n$ (т. е. $m\in n^{\perp}$). Полупервичное кольцо R называется *ортогонально полным*, если любое ортогональное подмножество имеет супремум относительно упорядочения $\leqslant$ в R. Если для каждого ортогонального подмножества M полупервичного кольца R существует такой регулярный элемент, $r\in R'$, что ортогональное подмножество Mr $\{mr \mid m\in M\}$ имеет супремум в R, то кольцо R назовем *ортогонально почти-полным*. Очевидно, что каждое ортогонально полное кольцо является ортогонально почти-полным, но обратное в общем случае неверно. Если для подмно-

жества M существует супремум в R, то обозначим его через $\sup_R M$. Легко проверяется, что если существует $\sup_R M$ и $b \in R$, то существуют $\sup_R(bM)$, $\sup_R(Mb)$ и имеют место равенства $\sup_R(bM) = b\sup_R M$, $\sup_R(Mb) = (\sup_R M)b$ (законы бесконечной дистрибутивности).

Элемент a из полупервичного кольца R назовем атомом, если $a \neq 0$ и $a^{\perp}$ – максимальный аннуляторный идеал в R. Полупервичное кольцо удовлетворяет, по определению, аннуляторному условию, если каждый аннуляторный идеал содержится в максимальном аннуляторном идеале. Из этого определения непосредственно следует, что полупервичное кольцо R удовлетворяет аннуляторному условию тогда и только тогда, когда для каждого ненулевого r из R существует атом $a \in R$, не ортогональный элементу r (т. е. $a \notin r^{\perp}$).

Подпрямое произведение $R = \prod^{s}_{\alpha \in I} R_\alpha$ колец R_α, $\alpha \in I$, называется несократимым (специальным), если $\sum_{\alpha \in I} B_\alpha \subseteq R$ (соответственно $\sum_{\alpha \in I} R_\alpha \subseteq R$), где B_α – ненулевой идеал кольца R_α, $\alpha \in I$ (см. [18]).

Несократимое (специальное) подпрямое произведение колец R_α, $\alpha \in I$, обозначим через $R = \prod^{us}_{\alpha \in I} R_\alpha$ (соответственно $R = \prod^{ss}_{\alpha \in I} R_\alpha$).

Имеет место следующая

ЛЕММА 1.1 [19, с. 268]. Полупервичное кольцо R удовлетворяет аннуляторному условию тогда и только тогда, когда R является несократимым подпрямым произведением первичных колец.

В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы.

ЛЕММА 1.2. Пусть R – полупервичное кольцо, в котором множество $\{r_R(a) \mid a \in R\}$ удовлетворяет условию максимальности относительно включения. Тогда

а) кольцо R не содержит ненулевых ниль-идеалов;

б) правый сингулярный идеал $Z_r(R) = \{x \in R \mid r_R(x)$ – существенный правый идеал в $R\}$ является ниль-идеалом, следовательно, $Z_r(R) = 0$ (т. е. R – антисингулярное (справа) кольцо.)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Пусть A – ненулевой ниль-идеал кольца R

и a – такой ненулевой элемент из A, что $r_R(a)$ максимальный в множестве $\{r_R(b) \mid b \in R,\ b \neq 0\}$. Покажем, что $aRa = 0$. Именно если $ra \neq 0$, $(ra)^{n-1} \neq 0$ и $(ra)^n = 0$, то $ra \in r_R((ra)^{n-1}) \supseteq r_R(a)$. В силу максимальности $r_R(a)$, получаем, что $ra \in r_R(a)$, т. е. $ara = 0$, где r – любой элемент из R. Это противоречит полупервичности кольца R. Следовательно, в R нет ненулевых ниль-идеалов.

б) Пусть $Z_r(R) \ni x \neq 0$. Тогда существует такое натуральное число n, что $r_R(x^n) = r_R(x^{n+1})$. Положим $y = x^n$. Тогда $r_R(y) = r_R(y^2)$, $y \in Z_r(R)$ и, более того, если $y \neq 0$, то существует элемент t из R такой, что $0 \neq yt \in r_R(y) \cap yR$ (напомним, что правый идеал называется существенным, если он имеет ненулевое пересечение с любым ненулевым правым идеалом). С другой стороны, $yt = 0$, так как $0 = y(yt) = y^2t$ и $r_R(y^2) = r_R(y)$. Это противоречие показывает, что $y = 0$, т. е. x – нильпотентный элемент. Следовательно, в силу (а), имеет место $Z_r(R) = 0$.

ЛЕММА 1. 3. *Пусть $R = \prod_{\alpha \in I}^{us} P_\alpha$, где P_α – первичное кольцо, $\alpha \in I$. Тогда $Z_r(R) = 0$ тогда и только тогда, когда $Z_r(P_\alpha) = 0$ для всех $\alpha \in I$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО немедленно следует из того, что если A – существенный правый идеал кольца R, то $A \cap P_\alpha$ – существенный правый идеал в первичном кольце P_α для всех $\alpha \in I$, и из того, что если A_α – существенный правый идеал кольца P_α, то $A_\alpha \oplus \sum_{\beta \neq \alpha} R \cap P_\beta$ – существенный правый идеал кольца R.

В основе изучения классического кольца частных с помощью максимального кольца частных для конечномерного кольца лежат следующие леммы.

ЛЕММА 1. 4. *Если R – первичное кольцо и его максимальное правое кольцо частных $Q(R)$ регулярно и нётерово (справа), то любой существенный правый идеал кольца R содержит обратимый в $Q(R)$ элемент.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО см. в [20, предложение 4. 6. 3].

ЛЕММА 1. 5. *Пусть максимальное правое кольцо частных $Q(R)$ первичного кольца R нётерово и регулярно. Тогда существует классическое правое кольцо частных $Q_{cl}(R)$ кольца R и $Q_{cl}(R) = Q(R)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверим, что $Q(R)$ удовлетворяет условиям классического правого кольца частных кольца R : 1) каждый элемент из $Q(R)$ имеет вид ar^{-1}, где $a, r \in R$; r - регулярный; 2) каждый регулярный элемент кольца R обратим в $Q(R)$.

Пусть $q \in Q(R)$. Покажем, что $q = ar^{-1}$, где $a, r \in R$ и r - регулярный элемент кольца R. Рассмотрим такой существенный правый идеал D кольца R, что $qD \subseteq R$. Тогда, в силу леммы 1.4, D содержит обратимый в $Q(R)$ элемент r. Следовательно, r регулярен в R и $r^{-1} \in Q(R)$. Поэтому $qr = a$, $q = ar^{-1}$, где $a \in R$, что и требовалось.

Осталось доказать, что каждый регулярный элемент кольца R остается регулярным в $Q(R)$ (так как в регулярном кольце $Q(R)$ каждый регулярный элемент обратим). Пусть r - регулярный элемент из R. Покажем сначала, что rR - существенный правый идеал кольца R, т. е. $rR \cap bR \neq 0$ для любого $0 \neq b \in R$. Элементы $rb, r^2b, \ldots, r^nb, \ldots$ должны быть зависимы справа над $Q(R)$, т. е. существуют такие элементы $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$, что $rbq_1 + r^2bq_2 + \ldots + r^mbq_m = 0$ и $r^mbq_m \neq 0$. Пусть $q_iD_i \subseteq R$, где D_i - существенный правый идеал кольца R, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $D = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$. Тогда D есть существенный правый идеал и $q_iD \subseteq R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, т. е. $rb(q_1s) + r^2b(q_2s) + \ldots + r^mb(q_ms) = 0$ для некоторого обратимого в $Q(R)$ элемента $s \in D$. Если k - такой наименьший номер, что $r^kbq_ks \neq 0$, то $k \leq m$ (так как в силу регулярности элемента s в $Q(R)$ имеем $r^mbq_ms \neq 0$) и $0 \neq rbq_ks = -r(bq_{k+1}s + \ldots + r^{m-k}bq_ms) \in bR \cap rR$.

Пусть $qr = 0$ или $rq = 0$ для некоторого $q \in Q(R)$ и $qD \subseteq R$, где D - существенный правый идеал кольца R. Если $qr = 0$, то $qrR = 0$, т. е. $q = 0$, так как rR - существенный правый идеал. Если $rq = 0$, то $rqD = 0$ и $qD = 0$, так как r - регулярный элемент из R, следовательно, снова $q = 0$. Этим завершается доказательство леммы 1.5.

§ 2. Полупервичные трансфинитные кольца Голди и их кольца частных

Все рассматриваемые здесь и далее кольца частных, порядки и т. п. будут считаться правыми. Приведем некоторые определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пусть R - полупервичное кольцо с аннулятор-

ным условием. Тогда, по определению, R имеет трансфинитную размерность Голди, если для любой последовательности атомов $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ кольца R существует такое натуральное число m, что либо $a_1 R a_2 R \ldots \ldots a_m R = 0$, либо элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ (линейно) зависимы справа над R.

Если, кроме того, такое натуральное число m существует независимо от выбора последовательности атомов, то говорим, что кольцо R имеет трансфинитную размерность Голди ограниченной (меньше чем m) высоты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. 2. Кольцо, имеющее трансфинитную размерность Голди, назовем трансфинитным кольцом Голди, если оно удовлетворяет условию обрыва возрастающих цепочек правых аннуляторов своих атомов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 1. Известно (см., например, [2]), что конечномерное в смысле Голди кольцо имеет существенный правый идеал, являющийся конечной прямой суммой униформных правых идеалов, и число слагаемых этой прямой суммы называется размерностью Голди данного кольца. Аналогичное утверждение имеет место для кольца с трансфинитной размерностью Голди. Именно из доказательства теоремы 2. 1 можно видеть, что кольцо R, имеющее трансфинитную размерность Голди, содержит существенный правый идеал, являющийся прямой суммой униформных правых идеалов, и число (т. е. мощность) слагаемых этой прямой суммы есть некоторое трансфинитное число, инвариантное для этого кольца, и поэтому оно может называться (трансфинитной) размерностью Голди кольца R.

В [21] было доказано, что для полупервичного кольца R его максимальное кольцо частных является прямым произведением простых артиновых колец в том и только в том случае, когда R представимо в виде несократимого подпрямого произведения первичных колец Голди.

Другую характеризацию этих колец дает следующая

ТЕОРЕМА 2. 1. Пусть R – полупервичное кольцо. Тогда эквивалентны следующие условия:

1) R – трансфинитное кольцо Голди;

2) R – антисингулярное кольцо с трансфинитной размерностью Голди;

3) $R = \prod_{\alpha \in I}^{as} P_\alpha$, где P_α – первичное антисингулярное кольцо с конечной размерностью Голди, $\alpha \in I$;

4) $Q(R)=\prod_{\alpha\in I}\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ - матричное кольцо индекса $n(\alpha)$ над телом $\Delta^{(\alpha)}$, $\alpha\in I$;

5) $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}G_\alpha$, где G_α - первичное кольцо Голди, $\alpha\in I$.

Доказательство проводится по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). По лемме 1.1, $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}R_\alpha$ и $B_\alpha=R_\alpha\cap R\neq 0$, где R_α - первичное кольцо, $\alpha\in I$. Легко видеть, что множество всех атомов кольца R совпадает с множеством $\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\setminus\{0\}$. Докажем, что множество $\{r_{B_\alpha}(b_\alpha)\mid b_\alpha\in B_\alpha\}$ удовлетворяет условию максимальности. Для этого достаточно показать, что строгое включение $r_{B_\alpha}(b_\alpha)\subset r_{B_\alpha}(c_\alpha)$, где $b_\alpha, c_\alpha\in B_\alpha$, сохраняется при переходе в R, т. е. $r_R(b_\alpha)\subset r_R(c_\alpha)$ (так как множество $\{r_R(b_\alpha)\mid b_\alpha\in B_\alpha\}$ удовлетворяет условию максимальности). Пусть $b_\alpha r=0$, где $r\in R$. Тогда $rB_\alpha\subseteq B_\alpha$ и $b_\alpha rB_\alpha=0$, B_α - идеал первичного кольца R_α. Следовательно, $c_\alpha rB_\alpha=0$ и $c_\alpha r=0$, т. е. $r_R(b_\alpha)\subseteq r_R(c_\alpha)$. Если $b_\alpha a_\alpha\neq 0$, $c_\alpha a_\alpha=0$, $a_\alpha\in B_\alpha\subseteq R$, то $a_\alpha\in r_R(c_\alpha)\setminus r_R(b_\alpha)$. Далее, по лемме 1.2, $Z_r(B_\alpha)=0$. Следовательно, $Z_r(R_\alpha)=0$, так как B_α - существенный (правый) идеал кольца R_α, $\alpha\in I$. Поэтому, в силу леммы 1.3, мы имеем равенство $Z_r(R)=0$.

2) $\Rightarrow$ 3). Мы можем считать, что $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}P_\alpha$, где P_α - первичное кольцо, и $B_\alpha=P_\alpha\cap R\neq 0$, $\alpha\in I$. Так как $Z_r(R)=0$, то $Z_r(P_\alpha)=0$ для всех $\alpha\in I$ (лемма 1.3).

Докажем от противного, что P_α - конечномерное справа кольцо. Пусть $\sum_{i=1}^{\infty}\oplus A_i^{(\alpha)}\subseteq P_\alpha$, где $A_i^{(\alpha)}$ - ненулевой правый идеал кольца R, $i=1,2,\ldots$ Выберем элементы $a_i\in A_i^{(\alpha)}$ и $b_i\in B_\alpha$ такие, что $c_i=a_ib_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots$. Тогда c_i является атомом кольца R и сумма $\sum_{i=1}^{\infty}c_iP_\alpha$ прямая, где $0\neq c_iP_\alpha=c_iB_\alpha=c_iR$. Это противоречит предположению, что сумма $\sum_{i=1}^{\infty}c_iR$ непрямая. Следовательно, P_α - конечномерное справа кольцо.

3) $\Rightarrow$ 4). Пусть $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}P_\alpha$, где P_α - первичное конечномерное кольцо и $Z_r(P_\alpha)=0$. Тогда легко доказывается, что $Q(R)=\prod_{\alpha\in I}Q(P_\alpha)$. Именно $\sum_{\alpha\in I}(P_\alpha\cap R)$ - существенный правый идеал кольца R, следовательно,

$Q(R)=Q(\sum_{\alpha\in I}(P_\alpha\cap R))$. С другой стороны, $Q(\sum_{\alpha\in I}(P_\alpha\cap R))=Q(\prod_{\alpha\in I}(P_\alpha\cap R))=$ $=\prod_{\alpha\in I}Q(P_\alpha\cap R)$ (см. [20, с. 160]), и $Q(P_\alpha\cap R)=Q(P_\alpha)$, так как $P_\alpha\cap R$ – существенный в P_α правый идеал.

Далее, $Q(P_\alpha)$ – регулярное кольцо, так как $Z_r(P_\alpha)=0$ (см., например, [20, с. 170]). Если сумма $\sum_{i=1}^{\infty}q_iQ(P_\alpha)$ прямая (как сумма правых идеалов кольца $Q(P_\alpha)$), $q_i\neq 0$, $i=1,2,\ldots$, то найдутся такие существенные правые идеалы D_i кольца R_α, что $0\neq q_iD_i\subseteq P_\alpha$, $i=$ $=1,2,\ldots$, и сумма правых идеалов $\sum_{i=1}^{\infty}q_iD_i$ прямая, так как P_α –подкольцо кольца $Q(P_\alpha)$. Это противоречит нашему предположению, следовательно, $Q(P_\alpha)$ – конечномерное регулярное кольцо. Если мы докажем, что $Q(P_\alpha)$ нётерово справа, то $Q(P_\alpha)$ будет простое артиново, т. е. $Q(P_\alpha)=\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ для некоторого тела $\Delta^{(\alpha)}$ и натурального числа $n(\alpha)$. Пусть $Q(P_\alpha)$ не нётерово. Тогда существует такая возрастающая цепочка конечно-порожденных правых идеалов кольца $Q(P_\alpha)$:

$$A_1\subset A_2\subset\ldots\subset A_n\subset\ldots .$$

Так как $Q(P_\alpha)$ – регулярное кольцо, то $A_i=e_iQ(P_\alpha)$, где e_i – идемпотентный элемент кольца $Q(P_\alpha)$, $i=1,2,\ldots$. Тогда $e_{n+1}Q_\alpha=$ $=e_nQ_\alpha\oplus(1-e_n)e_{n+1}Q_\alpha$ и $(1-e_n)e_{n+1}Q_\alpha=f_nQ_\alpha$, где $Q_\alpha=Q(P_\alpha)$, f_n – некоторый идемпотент $f_1=e_1$, $n=1,2,\ldots$. Следовательно, $\sum_{i=1}^{\infty}\oplus f_iQ_\alpha\subseteq Q_\alpha$, что противоречит конечномерности кольца $Q_\alpha=Q(P_\alpha)$.

4) $\Rightarrow$ 5). Пусть $Q(R)=\prod_{\alpha\in I}\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$. Тогда $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}G_\alpha$, где $Q(G_\alpha)=\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, $\alpha\in I$ (см. [21]). Легко видеть, что G_α – полупервичное кольцо и, следовательно, первичное кольцо Голди [21].

5) $\Rightarrow$ 1). Пусть $R=\prod^{us}_{\alpha\in I}G_\alpha$, где G_α – первичное кольцо Голди, $\alpha\in I$. Тогда, по лемме 2.1, R – полупервичное кольцо с аннуляторным условием и, кроме того, множество атомов кольца R совпадает с множеством $\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\setminus\{0\}$, где $B_\alpha=G_\alpha\cap R$, $\alpha\in I$.

Докажем сначала, что R имеет трансфинитную размерность Голди. Пусть $a_1,a_2,\ldots,a_n,\ldots$ – последовательность атомов кольца R такая, что для любого натурального n имеем $a_1Ra_2R\ldots a_nR\neq 0$. Тогда должен существовать индекс $\alpha\in I$ такой, что все эти атомы принадлежат B_α, т. е. кольцу G_α. Следовательно, существуют номер k и элементы $g_1^{(\alpha)},g_2^{(\alpha)},\ldots,g_k^{(\alpha)}$ из G_α такие, что $a_1g_1^{(\alpha)}+a_2g_2^{(\alpha)}+\ldots+a_kg_k^{(\alpha)}=$ $=0$ и $a_kg_k^{(\alpha)}\neq 0$. Мы можем найти такие элементы $g_1,g_2,\ldots,g_k\in R$,

что $\pi_\alpha(g_i) = g_i^{(\alpha)}$, $i=1,2,\dots,k$, где $\pi_\alpha : R \to G_\alpha$ – естественная проекция, $\alpha \in I$. Тогда мы имеем равенства $a_i g_i^{(\alpha)} = a_i g_i$, $i = 1,2,\dots,k$, следовательно, $a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots + a_k g_k = 0$, $a_k g_k \neq 0$, т. е. атомы $a_1, a_2, \dots, a_k$ линейно-зависимы (справа) над R. Тем самым доказано, что R имеет трансфинитную размерность Голди.

Нам осталось показать, что множество $\{r_R(a) \mid a$ – атом кольца $R\}$ удовлетворяет условию максимальности относительно включения. Заметим, что если $a \in B_\alpha$, $b \in B_\beta$, $\alpha \neq \beta$, то аннуляторы $r_R(a)$ и $r_R(b)$ несравнимы, так как $r_R(a) \setminus r_R(b) \supseteq B_\beta$, $r_R(b) \setminus r_R(a) \supseteq B_\alpha$. Следовательно, достаточно доказать, что строгое включение $r_R(a) \subset r_R(b)$, где $a, b \in B_\alpha, \alpha \in I$, влечет строгое включение $r_{G_\alpha}(a) \subset r_{G_\alpha}(b)$ (так как в G_α имеет место условие максимальности для правых аннуляторов). Пусть $ag_\alpha = 0$ и $g_\alpha = \pi_\alpha(g)$, $g \in R$. Тогда $ag_\alpha = ag = 0$, следовательно, $bg = 0$ и $bg_\alpha = 0$, т. е. $r_{G_\alpha}(a) \subseteq r_{G_\alpha}(b)$. Далее, пусть $ad \neq 0$, $bd = 0$ и $\pi_\alpha(d) = d_\alpha$, $d \in R$. Тогда $ad_\alpha = ad \neq 0$, $bd_\alpha = bd = 0$, т. е. $r_{G_\alpha}(a) \neq r_{G_\alpha}(b)$.

Теорема доказана.

Из теоремы 2. 1 и леммы 1. 5 немедленно следуют теоремы Голди о порядках полупростых (простых) артиновых колец, так как полупервичное слабоконечномерное кольцо (т. е. не содержащее бесконечных прямых произведений своих двусторонних идеалов, в частности, либо конечномерное справа, либо имеющее условие максимальности для правых аннуляторов) удовлетворяет аннуляторному условию и представляется в виде конечного несократимого подпрямого произведения первичных колец. Значит, оно ортогонально полное.

Следующее более общее, нежели лемма 1. 5, утверждение обеспечивает существование классического кольца частных этого кольца и его совпадение с максимальным кольцом частных.

ЛЕММА 2. 1. *Пусть R – полупервичное кольцо и его максимальное кольцо частных $Q(R)$ является прямым произведением простых артиновых колец. Тогда существует классическое кольцо частных $Q_{cl}(R)$ кольца R и $Q_{cl}(R) = Q(R)$ тогда и только тогда, когда R – ортогонально почти-полное кольцо.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По теореме 2. 1, $R = \prod_{\alpha \in I}^{us} G_\alpha$, где G_α – первичное кольцо Голди, $\alpha \in I$. Пусть R – ортогонально почти-полное коль-

цо. Нам достаточно доказать следующие утверждения:

а) Каждый существенный правый идеал кольца R содержит ортогональное подмножество, супремум которого существует в кольце R и является регулярным элементом в R.

б) Каждый регулярный элемент кольца R остается регулярным при естественном вложении кольца R в $Q(R)$.

Пусть верны утверждения а), б) и q - любой ненулевой элемент из $Q(R)$. Тогда найдется такой существенный правый идеал D кольца R, что $qD \subseteq R$. Пусть $\{g_j \mid j \in J\}$ - ортогональное подмножество в D, существующее по условию а), и $s = sup_R\{g_j \mid j \in J\}$. Тогда $\{qg_j \mid j \in J\}$ - тоже ортогональное в R множество. Следовательно, существует такой регулярный элемент $e \in R'$, что $\{qg_j e \mid j \in J\}$ имеет супремум в R. Кроме того, в силу бесконечной дистрибутивности и единственности супремума имеет место равенство:

$$R \ni r = sup_R\{qg_j e \mid j \in J\} = sup_{Q(R)}\{qg_j e \mid j \in J\} =$$

$$= q\,sup_{Q(R)}\{g_j e \mid j \in J\} = q\,sup_R\{g_j e \mid j \in J\} = q(sup_R\{g_j \mid j \in J\})e = qse.$$

По условию, регулярный в R элемент se также регулярен в $Q(R)$, следовательно, обратим в $Q(R)$, так как $Q(R)$ - регулярное кольцо. Поэтому $q = r(se)^{-1}$. Итак, каждый элемент $Q(R)$ имеет вид rt^{-1}, где t - регулярный элемент из R, и все регулярные элементы кольца R обратимы в $Q(R)$, т. е. $Q(R)$ является классическим (правым) кольцом частных, $Q(R) = Q_{cl}(R)$.

Докажем утверждения а) и б). Пусть D - существенный правый идеал кольца $R = \prod^{us}_{\alpha \in I} G_\alpha$. Тогда $D_\alpha = D \cap G_\alpha$ - существенный в G_α правый идеал, следовательно, он содержит регулярный элемент d_α кольца G_α (см. доказательство леммы 1. 5), $\alpha \in I$. Множество $\{d_\alpha \mid \alpha \in I\}$ ортогонально, следовательно, для некоторого регулярного элемента $r \in R'$ имеем супремум $s = sup_R\{d_\alpha r \mid \alpha \in I\}$. Легко доказывается регулярность элемента s. Этим мы нашли искомое ортогональное множество $\{g_\alpha = d_\alpha r \mid \alpha \in I\} \subseteq D$, т. е. условие а) доказано. Далее, пусть r - регулярный элемент кольца R и $r_\alpha = \pi_\alpha(r)$, $\alpha \in I$. Тогда r_α является регулярным в G_α, следовательно, и в $Q(G_\alpha)$, $\alpha \in I$ (см. доказательство леммы 1. 5). С другой стороны, $Q(R) = \prod_{\alpha \in I} Q(G_\alpha)$ (см. доказательство импликации 3) $\Rightarrow$ 4) теоремы 2. 4). Поэтому r ре-

гулярен и в $Q(R)$.

Лемма доказана.

Сейчас мы можем сформулировать и доказать основную теорему.

ТЕОРЕМА 2. 2. Для полупервичного кольца R эквивалентны следующие условия:

1) R - ортогонально почти-полное, трансфинитное кольцо Голди;

2) R - антисингулярное, ортогонально почти-полное кольцо, имеющее трансфинитную размерность Голди;

3) существует классическое кольцо частных $Q_{cl}(R)$, являющееся прямым произведением простых артиновых колец.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 2. 1 и леммы 2. 1 , нам остается доказать, что если имеет место условие 3), то $Q(R) = Q_{cl}(R)$. Пусть $Q_{cl}(R)$ - прямое произведение простых артиновых колец. Тогда $Q_{cl}(R)$ является правым кольцом частных (см. [13, с. 64]) кольца R, и поэтому регулярность кольца $Q_{cl}(R)$ показывает, в частности, что R антисингулярно (см., например, [13, с. 70]). Следовательно, $Q_{cl}(R) \subseteq Q(R)$. Легко доказывается, что каждый существенный правый идеал кольца R содержит ортогональное множество с супремумом, являющимся регулярным элементом кольца R . Следовательно, каждый ненулевой элемент $q \in Q(R)$ имеет вид $q = rs^{-1}$, где s - регулярный элемент кольца R , т. е. $Q(R) \subseteq Q_{cl}(R)$ и $Q(R) = Q_{cl}(R)$.

Теорема доказана.

Из теорем 2. 1 , 2. 2 мы немедленно получаем следующую характеризацию прямых произведений простых артиновых колец.

СЛЕДСТВИЕ 2. 1. Кольцо R представимо в виде прямого произведения простых артиновых колец в том и только том случае, когда оно полупервично и удовлетворяет одному из следующих эквивалентных между собой условий:

а) R - самоинъективное справа, трансфинитное кольцо Голди;

б) R - регулярное, ортогонально полное кольцо с трансфинитной размерностью Голди.

Из теорем 2.1 и 2.2, в частности, следует, что если кольцо является порядком (не только в классическом смысле, но и в смысле максимального кольца частных) прямого произведения простых артиновых колец, то R имеет такую систему первичных идеалов с нулевым (общим) пересечением, что фактор-кольца, взятые по этим идеалам, являются первичными кольцами Голди. Но это не доказывает, что каждое первичное фактор-кольцо кольца R является кольцом Голди. Есть случаи, когда это не так. В частности, это подтверждает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1. Для кольца R эквивалентны следующие условия:

1) R - регулярное, ортогонально полное кольцо с аннуляторным условием, и каждое его первичное фактор-кольцо конечномерно справа;

2) R - ортогонально полное кольцо с аннуляторным условием, и каждое его первичное фактор-кольцо артиново;

3) $R = \prod_{\alpha \in I} \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ - матричное кольцо индекса $n(\alpha)$ над телом $\Delta^{(\alpha)}$, и множество $\{n(\alpha) \mid \alpha \in I\}$ ограничено;

4) R - регулярное, ортогонально полное кольцо с ограниченно-трансфинитной размерностью Голди;

5) R - регулярное, ортогонально полное кольцо с аннуляторным условием, и индексы нильпотентных элементов кольца R ограничены.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. проводится по схеме 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 5) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 5) и (3, 5) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 1).

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) очевидна, так как регулярное кольцо Голди артиново.

2) $\Rightarrow$ 5). Докажем сначала регулярность кольца R. В силу [22], достаточно показать, что каждый первичный фактор регулярен и что объединение возрастающей цепочки первичных идеалов есть первичный идеал. У нас каждый первичный фактор артинов, поэтому эти два условия тривиальным образом выполняются для кольца R, т.е. R регулярно. Следовательно, $Q_{cl}(R) = R$, и, в силу теорем 2.4 и 2.6, $R = \prod_{\alpha \in I} \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ -

матричное кольцо над телом $\Delta^{(\alpha)}$, $\alpha \in I$, в частности, R – самоинъективное кольцо с первичными артиновыми (поэтому с примитивными артиновыми [23, теорема 6. 2]) факторами. Это говорит нам о том, что R имеет ограниченный индекс нильпотентных элементов (см. [23, теорема 7. 20]).

5) $\Longrightarrow$ 4). Пусть индекс нильпотентных элементов ограничен натуральным числом n и $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ – такие атомы кольца R, что правые идеалы $a_1R, a_2R, \ldots, a_{n+1}R$ – не образуют прямую сумму правых идеалов. Тогда, в силу [23, теорема 7. 2] (при $J = R$), получаем $a_1R\,a_2R \ldots a_{n+1}R = 0$, т. е., по определению, R имеет ограниченную трансфинитную размерность Голди (так как R – полупервичное кольцо с аннуляторным условием).

4) $\Longrightarrow$ 3) Кольцо R – антисингулярное, так как оно регулярное. Следовательно, в силу теоремы 2. 6, мы имеем: $R = Q_{cl}(R) = \prod_{\alpha \in I} \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ – матричное кольцо индекса $n(\alpha)$ над телом $\Delta^{(\alpha)}$, $\alpha \in I$. Очевидно, что если R имеет ограниченную числом K трансфинитную размерность Голди, то $n(\alpha) \leq K$ для всех $\alpha \in I$.

3) $\Longrightarrow$ 5). В силу теоремы 2. 6, R – регулярное, ортогонально почти-полное (следовательно, ортогонально полное) кольцо с аннуляторным условием. Кроме того, очевидным образом индекс нильпотентных элементов кольца $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ ограничен числом $n(\alpha)$, $\alpha \in I$. Следовательно, R имеет ограниченный индекс нильпотентных элементов.

(3, 5) $\Longrightarrow$ 2). В силу 5) и 3), R – самоинъективное, регулярное кольцо с ограниченным индексом нильпотентных элементов, следовательно, каждый первичный фактор кольца R артинов ([23, теоремы 7. 20, 6. 2]).

2) $\Longrightarrow$ 1). Как мы показали в доказательстве импликации 2) $\Longrightarrow$ 5), R – регулярное кольцо. Теперь импликация 2) $\Longrightarrow$ 1) становится очевидной. Предложение доказано.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. 2. Легко видеть, что условие 3) предложения 2. 1 эквивалентно тому, что кольцо R является конечным прямым произведением матричных колец над самоинъективными (то же самое, что ортогонально полными) строго регулярными кольцами с аннуляторными условиями (так как кольцо R является прямым произведением тел тогда и только тогда, когда R ортогонально полное, строго регулярное (т. е. для каждого элемента $a \in R$ существует $r \in R$, такой, что $a = ra^2$) кольцо с аннуляторным условием (ср. [24, следствие 2. 15]).

§ 3. Элементарное условие и порядки прямых произведений простых артиновых колец

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ – счетное множество некоммутирующих переменных и $\pi(t,n) = \{h$ – моном от X, зависящий только от $x_1, x_2, \ldots, x_t$, $h \neq x_1 x_2 \ldots x_t$, $t \leq \deg h \leq n\}$, где t, n – фиксированные натуральные числа, $t \leq n$. Элемент $y \in R$ называется сильно регулярным (справа), если y – регулярный и yR – существенный правый идеал кольца R (см. [14]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1 (см. [14]). Кольцо R удовлетворяет (t,n)-элементарному условию, если для любых элементов $a_1, a_2, \ldots, a_t$ из R существуют сильно регулярный элемент $y \in R'$ и набор элементов $\{y_h \mid h \in \pi(t,n)\} \subseteq R'$ такие, что

$$a_1 a_2 \ldots a_t y + \sum_{h \in \pi(t,n)} h(a_1, a_2, \ldots, a_t) y_h = 0.$$

Говорят, что кольцо R удовлетворяет элементарному условию, если в нем имеет место (t,n)-элементарное условие для некоторой пары натуральных чисел (t,n), где $t \leq n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть R – полупервичное кольцо с аннуляторным условием. Если каждый минимальный аннуляторный идеал кольца удовлетворяет (как кольцо) элементарному условию, то говорим, что R удовлетворяет слабому элементарному условию.

Легко видеть, что если кольцо R является n-мерным векторным пространством над телом, то оно удовлетворяет $(t+1, t'+t+1)$-элементарному условию, где t и t' – натуральные числа, не меньшие чем n (см. [14, предложение 1]). В частности, матричное кольцо индекса n над телом удовлетворяет $(n^2, 2n^2)$-элементарному условию, так как оно имеет единицу. Кроме того, ясно, что если R является порядком кольца с элементарным условием, то само R удовлетворяет элементарному условию.

Роуэн [14] доказал следующую теорему, дающую характеризацию порядков простых артиновых колец с помощью элементарного условия.

ТЕОРЕМА 3.1 (см. [14, теорема 6]). Пусть R – первичное кольцо. Тогда эквивалентны следующие условия:

а) R – (правый) порядок простого артинова кольца индекса n, меньшего чем $\sqrt{t}$;

б) R удовлетворяет (t,m)-элементарному

условию для подходящего m.

(Индекс простого артинова кольца – это индекс кольца матриц его естественного представления).

Эта теорема будет служить нам в этом параграфе основной ссылкой.

Пусть R – полупервичное кольцо с аннуляторным условием. Тогда легко видеть, что идеалы вида $(a^{\perp})^{\perp}$, где a – атом, и только они, являются минимальными аннуляторами, т. е. если $R = \prod^{us} R_{\alpha}$, где R_{α} – первичное кольцо, $\alpha \in I$, то идеалы $B_{\alpha} = R \cap R_{\alpha}, \alpha \in I$, и только они, будут минимальными аннуляторными идеалами кольца R. Пусть, далее, R удовлетворяет слабому элементарному условию. Тогда кольца $B_{\alpha}, \alpha \in I$, являются первичными (так как они – идеалы первичного кольца R) с элементарными условиями, следовательно, по теореме 3. 1, они будут кольцами Голди.

Поэтому из следующей очевидной леммы вытекает, что и кольца R_{α}, $\alpha \in I$, являются кольцами Голди.

ЛЕММА 3. 1. Если первичное кольцо имеет идеал, являющийся ненулевым кольцом Голди, то оно само есть кольцо Голди. Обратно, каждый идеал первичного кольца Голди является первичным кольцом Голди.

Итак, из теорем 2. 1, 2. 2, 3. 1 и леммы 3. 1 мы немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. 1. Пусть R – полупервичное кольцо. Тогда $Q(R)$ есть прямое произведение простых артиновых колец в том и только в том случае, когда R удовлетворяет слабому элементарному условию. Значит, R является порядком прямого произведения простых артиновых колец тогда и только тогда, когда R ортогонально почти-полное кольцо со слабым элементарным условием.

Для описания порядков прямых произведений простых артиновых колец с ограниченными индексами мы можем использовать предложение 2. 1. Но более эффективно можно использовать для этого элементарное условие. Именно имеет место

ТЕОРЕМА 3. 2. Пусть R – полупервичное

кольцо. Тогда R является порядком прямого произведения простых артиновых колец с ограниченными индексами в том и только том случае, когда R есть ортогонально почти-полное кольцо с аннуляторным и элементарным условиями.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_{cl}(R) = \prod_{\alpha \in I} \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}$ - тело, $n(\alpha) \leq K$ для всех $\alpha \in I$ и K - некоторое фиксированное натуральное число. Тогда каждое кольцо $\Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$ удовлетворяет $(K^2, 2K^2)$ -элементарному условию, поэтому их (полное) прямое произведение $Q_{cl}(R)$ удовлетворяет $(K^2, 2K^2)$-элементарному условию. Следовательно, как и ранее, кольцо R удовлетворяет элементарному условию.

Обратно, пусть R - ортогонально почти-полное кольцо с аннулятор - ным и элементарным условиями. Тогда $R = \prod^{us}_{\alpha \in I} R_\alpha$, где R_α - первичное кольцо, $\alpha \in I$. Пусть, далее, R удовлетворяет (t, m) -элементарному условию для некоторой пары (t, m). Докажем, что каждое R_α удовлетворяет (t, m)-элементарному условию, $\alpha \in I$. Возьмем любые элементы $r_1, r_2, \ldots, r_t \in R_\alpha$, и пусть $\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_t$ - такие элементы из R, что $\pi_\alpha(\bar{r}_i) = r_i$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Тогда, по предположению, существуют сильно регулярный элемент $\bar{y} \in R$ и элементы $\bar{y}_h$, $h \in \pi(t, m)$, такие, что

$$\bar{r}_1 \bar{r}_2 \ldots \bar{r}_t \bar{y} + \sum_{h \in \pi(t,m)} h(\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_t) \bar{y}_h = 0,$$

следовательно,

$$r_1 r_2 \ldots r_t y + \sum_{h \in \pi(t,m)} h(r_1, r_2, \ldots, r_t) y_h = 0,$$

где $y = \pi_\alpha(\bar{y})$, $y_h = \pi_\alpha(\bar{y}_h)$, $h \in \pi(t, n)$. Поэтому нам осталось доказать сильную регулярность элемента y кольца R_α.

Пусть $B_\alpha = R_\alpha \cap R$ и $y r_\alpha = 0$. Тогда $\bar{y} r_\alpha B_\alpha = 0$, т. е. $r_\alpha B_\alpha = 0$, так как $r_\alpha B_\alpha \subseteq R$, следовательно, $r_\alpha = 0$. Аналогично, если $r_\alpha y = 0$, то $r_\alpha = 0$. Докажем существенность правого идеала yR_α в кольце R_α. Пусть $0 \neq Y$ - правый идеал кольца R_α. Тогда $0 \neq YB_\alpha$ - правый идеал кольца R, следовательно. $0 \neq \bar{y} r \in YB_\alpha$, где $r \in R$. Так как $YB_\alpha \subseteq Y$, то $Y \ni \bar{y} r = \pi_\alpha(\bar{y} r) = y \pi_\alpha(r)$, т. е.

$0 \neq y\pi_\alpha(r) \in J \cap yR_\alpha$. Этим мы доказали, что R_α удовлетворяет (t,n)-элементарному условию, следовательно, по теореме 3. 1, $Q(R_\alpha) = Q_{cl}(R_\alpha) = \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}$, где $\Delta^{(\alpha)}$ - тело, и $n(\alpha) \leq \sqrt{t}$. Итак, в силу теорем 3. 1 и 3. 2, мы показали, что

$$Q_{cl}(R) = \prod_{\alpha \in I} \Delta^{(\alpha)}_{n(\alpha)}, \; n(\alpha) \leq \sqrt{t}, \; \alpha \in I.$$

Теорема доказана.

Понятно, что если полупервичное кольцо R удовлетворяет условию максимальности для аннуляторных двусторонних идеалов, то R является ортогонально полным кольцом с аннуляторным условием, так как в этом случае оно есть конечное несократимое подпрямое произведение первичных колец. Отсюда из теоремы 3. 2 немедленно получаем

СЛЕДСТВИЕ 3. 2 (см. [14, теорема 7]). Для полупервичного кольца R эквивалентны следующие условия:

1) R является порядком конечного прямого произведения матричных колец над телами с индексами $\leq \sqrt{t}$;

2) R удовлетворяет условию максимальности для двусторонних аннуляторных идеалов и (t,m)-элементарному условию для некоторого натурального m.

Автор выражает большую благодарность А. И. Ширшову и Л. А. Бокутю за руководство работой и поддержку, а также Ю. М. Рябухину за внимание к работе.

Литература

1. A.W.GOLDIE, The structure of Prime Rings under Ascending Chain Conditions, Proc.London Math.,Soc.,8 (1958),589-608.

2. A.W.GOLDIE, Semiprime rings with maximum condition, Proc. London Math.Soc.,10 (1960),201-220.

3. L.LESIEUR, R.CROISOT, Sul les anneaux premiers noetheriens a gauche,Ann.scient.Ec.Norm.Sup.,76 (1959),161-183.

4. L.W.SMALL, Orders in artinian eings, J.Algebra,4 (1966), 13-41.

5. J.C.ROBSON, Artinian quotient eings, Proc.London Math.Soc., 17 (1967),600-616.

6. J.P.JANS, On orders in quasi-Frobenius rings, J.Algebra, 7 (1967), 35-43.

7. R.C.SHOCK, Injecturty, annihilators and orders, Algebra, 19 (1971),96-103.

8. R.C.SHOCK, Classical quotiont rings, Mrans.Amer.Math.Soc., 190 (1974),43-48.

9. H.TACHIKAWA, Localization and artiman quotient rings, Math. Z.,119 (1971),239-253.

10. R.N.GUPTA, Characterisation of rings whose classical quotient rings are perfect rings, Publicationes Math.,Debrecen, 17 (1970). 215-222.

11. Р. ГОНЧИГДОРЖ, Порядки прямых произведений тел, Алгебра и логика, 20, № 1(1981). 20-34.

12. R.E.JOHNSON, Quotient rings of rings with zero singular ideals, Pacific J.Math., (1961),1385-1392.

13. K.FAITH, Lectures on Injective Modules and Quotient Rings, Lecture Notes in Math., N 49 (1967).

14. L.H.ROWEN, Monomial conditions in Rings, Israel J.Math., 23 (1976),19-30.

15. К. И. БЕЙДАР, А. В. МИХАЛЁВ, Ортогональная полнота и ее применение в теории колец, Тезисы докладов 15 Всесоюзной алгебраической конференции, ч. 1, Красноярск, 1979, с. 17.

16. P.F.CONRAD, The hulls of semiprime rings, Bull.Austral. Math.Soc.,12 (1975),311-314.

17. A.ABIAN, Order in a special class of rings and a structure theorem, Proc.Amer.Math.Soc., 52 (1975),45-49.

18. L.LEVY, Unique subdirect sums of prime rings, Trans.Amer. Math.Soc.,106 (1963),64-76.

19. В. А. АНДРУНАКИЕВИЧ, Ю. М. РЯБУХИН, Радикалы алгебр и структурная теория, М., Наука, 1979.

20. И. ЛАМБЕК, Кольца и модули, М., Мир, 1971.

21. В. Т. МАРКОВ, О полных кольцах частных несократимых подпрямых произведений, Матем. исслед., Кишинёв, 9, № 2 (1974), 237-245.

22. J.W.FISHER, R.L.SNIDER, On the von Neumann regularity of rings with regular prime factor rings, Pacific J.Math.,54 (1974), 135-144.

23. K.R.GOODEARL, Von Neumann regular rings, (Monographs and Studies in Math.,4), Pitman,1979.

24. Р. ГОНЧИГДОРЖ, Прямые и специальные подпрямые произведения колец с делением и колец без делителей нуля, Сиб. матем. ж., 21 (1980), 52-62.

Поступило 28 мая 1980 г.