В.А.Шлык

К ТЕОРИИ НОРМАЛЬНЫХ ОБЛАСТЕЙ

В работе устанавливается критерий нормальности области, основанный на абсолютно непрерывном продолжении конформных отображений вдоль кривых некоторого семейства. Известно [I], что определения минимальной области по Кебе [2], нормальной области по Гретшу [3] и нормальной области в смысле метода экстремальных метрик (см. [4, I]) равносильны друг другу, и в данной работе используется последнее определение. С помощью полученного критерия изучается структура нормальной области G, порожденной компактом конечной длины. Для компакта E, расположенного на кусочно-гладкой кривой, это в определенной мере дает ответ на вопрос о точной геометрической характеристике нормальных областей (о результатах, полученных в этом вопросе, см., например, [5, с.I38]).

Формулировки результатов и их доказательства приводятся для случая прямоугольника с прямолинейными разрезами. Аналогичные утверждения нетрудно получить для областей кругового, кольцевого и подобных типов.

I°. В дальнейшем $\mathbb{C}_z$ – комплексная плоскость, $z = x + iy$, $\overline{F}$ – замыкание множества $F \subset \mathbb{C}_z$ в топологии комплексной плоскости; $h_1(F)$ и $h_2(F)$ – соответственно одномерная и двумерная меры Хаусдорфа множества F; $\text{пр}_x F$ и $\text{пр}_y F$ – ортогональные проекции множества F соответственно на вещественную и мнимую оси.

Пусть Π – открытый невырожденный прямоугольник в $\mathbb{C}_z$ с вершинами $A_1 = (0,a)$, $A_2 = (1,a)$, $A_3 = (1,b)$, $A_4 = (0,b)$, где $-\infty < a < b < \infty$, и пусть компакт $E \subset \Pi$ таков, что множество $G = \Pi \setminus E$ – область и каждая компонента связности E лежит на некоторой прямой, параллельной вещественной оси. Через $m(\Gamma_1(G))$ (соответственно, $m(\Gamma_2(G))$) обозначим модуль семейства всех кривых, расположенных в области G и соединяющих вертикальные стороны (соответственно, горизонтальные стороны) прямоугольника Π. Здесь и в дальнейшем модуль семейства кривых понимается в смысле L-определения [5].

Следуя определению в [I], область G назовем нормальной относительно мнимой оси или вещественной оси, если соответственно $m(\Gamma_1(G)) = m(\Gamma_1(\Pi))$ или $m(\Gamma_2(G)) = m(\Gamma_2(\Pi))$. Известно, что для нормальной области G $h_2(E) = 0$ [5, с.I37]. Подобласть G назовем специальной, если ее внешняя граница совпадает с внешней границей G. Пусть $\{G_j\}$ – последовательность специальных конечносвязных подобластей G таких, что

$$G_1 \subset G_2 \subset \dots , \quad \bigcup_{j=1}^{\infty} G_j = G .$$

Тогда существует [I] однолистное конформное отображение $f_j(z)$ области G_j на область B_j, для которой внешней границей служит контур прямоугольника $\Pi_j = A_1 A_2 A_3^j A_4^j$, а внутренними граничными компонентами являются точки или отрезки прямых, параллельных вещественной оси, причем

$$f_j(A_1) = A_1, \; f_j(A_2) = A_2, \; f_j(A_3) = A_3^j, \; f_j(A_4) = A_4^j .$$

Без ограничения общности, можно считать, что при $j \to \infty$ последовательность $f_j(z)$ сходится равномерно внутри G к функции $f_\infty(z)$, совершающей однолистное конформное отображение области G на область $f_\infty(G) = G_\infty$. Отметим, что G_∞ всегда является нормальной областью относительно мнимой оси и если G – такая же область, то $G_\infty = G$ и $f_\infty(z) \equiv z$ в G [I, 3].

Через $\mathcal{F}(D)$ обозначим класс всех ограниченных однолистных регулярных функций на открытом множестве $D \subset \mathbb{C}_z$. Множество $E \subset D$, замкнутое относительно D, назовем NED -множеством в D [6, 7], если любую функцию $f \in \mathcal{F}(D \setminus E)$ можно продолжить до функции $f \in \mathcal{F}(D)$.

2°. ТЕОРЕМА I. Пусть прямоугольник Π и множество $E \subset \Pi$ определены выше и пусть $h_2(E) = 0$. Для того чтобы область $G = \Pi \setminus E$ была нормальной областью относительно мнимой оси, необходимо и достаточно, чтобы каждая функция $f \in \mathcal{F}(G)$ для всех $y \in (a, b)$, исключая разве лишь множество нулевой линейной меры, продолжалась до абсолютно непрерывной функции на интервале $\ell(y) = \{ z \in \Pi : \operatorname{Im} z = y \}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость условия теоремы I. Пусть $\{f_j\}$ и $\{G_j\}$ – последовательности функций и областей, определенные в п.I. Ясно, что для $j > 1$ справедливо равенство $B_j = \Pi_j \setminus E_j$, где множество E_j есть объединение конечного числа прямолинейных разрезов, параллельных вещественной оси, и $\Pi_j \subset \Pi$, $j = 1, 2, \dots$. Через $z = \varphi_j(w)$ обозначим функцию, обратную к $w = f_j(z)$, и пусть $\psi_j(w) = f(\varphi_j(w))$, $w \in B_j$, где f – некоторая фиксированная функция из $\mathcal{F}(G)$, $j = 1, 2$. Доопределим функции $f'(z)$ и $\psi_j'(w)$, $\varphi_j'(w)$ на весь прямоугольник Π, положив их равными нулю соответственно на множествах E и $E_j \cup (\Pi \setminus \Pi_j)$. Так как G – нормальная область, то функции f_j, φ_j сходятся при $j \to \infty$ равномерно внутри G к тождественному отображению. Поэтому

$$\lim_{j\to\infty}\iint_{\Pi}|f'(z)-\psi_j'(z)|^2dx\,dy=0. \qquad (I)$$

Отсюда

$$S_j(y)=\int_{\ell(y)}|f'(x+iy)-\psi_j'(x+iy)|^2dx\to 0 \text{ при } j\to\infty \qquad (2)$$

для всех $y\in(a,b)$ исключая разве лишь множество нулевой линейной меры.

Пусть K_1, K_2, K_3, K_4 – множества всех тех $y\in(a,b)$, которые характеризуются соответственно условиями:

I) не выполнено (2); 2) $\int_{\ell(y)}|f'(z)|dx=\infty$;

3) $\ell(y)\cap(\bigcup_{j=1}^{\infty}E_j)\neq\emptyset$; 4) $h_1(\ell(y)\cap E)>0$.

Ясно, что $h_1(K)=0$, где $K=\bigcup_{j=1}^{4}K_j$. Фиксируем теперь точки $y_0\in(a,b)\setminus K$, $z_0\in\ell(y_0)\cap G$ и обозначим через $\ell(y_0,z)$ отрезок на $\ell(y_0)$ с концами в точках z_0 и z, где $z\in\ell(y_0)$. Из регулярности функции $\psi_j'(z)$ на $\ell(y_0)$ следует, что

$$\psi_j(z)-\psi_j(z_0)=\int_{\ell(y_0,z)}\psi_j'(z)dx,$$

и функции последовательности $\{\psi_j'(z)\}$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы на $\ell(y_0)$. Тогда возможность продолжения $f(z)$ до абсолютно непрерывной функции на $\ell(y_0)$ гарантируется сходимостью по мере последовательности $\psi_j(z)$ к $f(z)$ на интервале $\ell(y_0)$ и теоремой Витали [8, с.I44].

Достаточность условия теоремы I следует из того, факта, что функция $f_\infty(z)$ абсолютно непрерывна на интервале $\ell(y)$, для почти всех $y\in(a,b)$, а $\rho(z)=|f_\infty'(z)|$, $z\in\Pi\setminus E$, – допустимая метрика в обобщенном смысле [7] для семейства кривых $\{\ell(y),\ y\in(a,b)\}$.

3°. Для $f\in\mathcal{F}(G)$, $y\in(a,b)$ положим

$$E(y,f)=\{w: w=\lim_{z\to\zeta}f(z),\ z\in G,\ \zeta\in\ell(y)\cap E\}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы I. Тогда область $G=\Pi\setminus E$ является нормальной областью относительно мнимой оси в том и только в том случае, когда каждая функция $f\in\mathcal{F}(G)$

допускает непрерывное продолжение изнутри области G на интервал $\ell(y)$ для почти всех $y \in (a,b)$, удовлетворяющее условию $h_1(E(y,f))=0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть f - фиксированная функция из $\mathcal{F}(G)$, $\tilde{K} = K \cup K_5$, где множество K введено при доказательстве теоремы I, а K_5 - множество всех y, для которых измеримая по Лебегу функция $g(y) = \int_0^1 |f'(x+iy)|^2 dx$ не является аппроксимативно непрерывной на (a,b). По известной теореме Данжуа [8], линейная мера множества K_5 равна нулю. Пусть $z_0 \in \ell(y_0) \cap E$, где $y_0 \in (a,b) \setminus \tilde{K}$. Покажем, что предел $w = f(z)$ при $z \to z_0$, $z \in G$, существует. Действительно, если это не так, то граничной точке z_0 области G отвечает граничный континуум β области $f(G)$ положительного диаметра. Обозначим через P прямоугольник, у которого две противоположные стороны γ_1, γ_2 лежат соответственно на $\ell(y_1)$, $\ell(y_2)$, где $y_1 < y < y_2$ и y_1, y_2 принадлежат множеству $(a,b) \setminus K$, а две другие противоположные стороны γ_3, γ_4 содержатся в области G и лежат на вертикальных прямых. При этом построение $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ осуществляется таким образом, чтобы точка z_0 лежала внутри P и выполнялись условия

$$\int_{\gamma_3 \cup \gamma_4} |f'(z)| dx < \varepsilon, h_1(\gamma_1 \cup \gamma_2) < \varepsilon, \left| \int_{\ell(y_j)} |f'(z)|^2 dx - \int_{\ell(y_0)} |f'(z)|^2 dx \right| < \varepsilon, \; j = 1,2,$$

где ε - заданное положительное число. Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим оценку

$$\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} |f'(z)| dx \leqslant \sqrt{3} \left(\int_{\gamma_1 \cup \gamma_2} |f'(z)|^2 dx \right)^{1/2} \leqslant \sqrt{2\varepsilon} \left[\left(\int_{\ell(y_0)} |f'(z)|^2 dx \right)^{1/2} + O(1) \right]. \quad (3)$$

Если $f(\gamma_j)$ - множество значений на функции $f(z)$, продолженной по теореме I вдоль интервала $\ell(y_j)$, где $j = 1,2$, то из (3) следует

$$h_1\left(\bigcup_{j=1}^{4} f(\gamma_j) \right) \leqslant \sum_{j=1}^{4} \int_{\gamma_j} |f'(z)| |dz| = O(1). \quad (4)$$

Поскольку $f(z)$ - однолистное отображение области G, то замкнутая кривая $\bigcup_{j=1}^{4} f(\gamma_j)$ содержит внутри себя континуум β. Это противоречит условию (4). Поэтому предел $\lim_{z \to z_0} f(z)$, $z \in G$, существует и равен значению в точке z_0 функции f, продолжен-

ной вдоль интервала $\ell(y_0)$, что доказывает возможность непрерывного продолжения функции f на $\ell(y_0)$ изнутри области G. При этом $E(y_0, f) = f(E \cap \ell(y_0))$. Так как f абсолютно непрерывна на $\ell(y_0)$, то множеству $E \cap \ell(y_0)$ нулевой линейной меры при отображении f соответствует множество $E(y_0, f)$ также нулевой линейной меры. Этим необходимость условия теоремы 2 доказана.

Достаточность. Пусть функция f непрерывна на $\ell(y)$ и $h_1(E(y, f)) = 0$ для почти всех $y \in (a, b)$. Заметим, что для $f \in \mathcal{F}(G)$

$$\iint_{\Pi} |f'(z)|^2 dx dy = \iint_G |f'(z)|^2 dx dy < \infty,$$

следовательно, $\int_{\ell(y)} |f'(z)|\, dx < \infty$ для почти всех $y \in (a, b)$. Тогда f удовлетворяет условию (N) Н.Н.Лузина [9, с.324], и из "теоремы о дифференцируемости" [9, с.412] получим, что f - абсолютно непрерывная функция на $\ell(y)$ для почти всех $y \in (a, b)$. Отсюда и из теоремы I следует, что G - нормальная область. Теорема доказана.

4^0. ТЕОРЕМА 3. Пусть E - компакт в Π, расположенный на гладкой кривой γ_0. Тогда $G = \Pi \setminus E$ - нормальная область относительно мнимой оси в том и только в том случае, когда $E = E_0 \cup (\cup_{k \geq 1} E_k)$, где E_0 - компакт и $h_1(\text{пр}_y E_0) = 0$, а E_k - NED -множество в Π для каждого $k = 1, 2, \ldots, E_k \subset E_{k+1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем необходимость условия теоремы 3. В качестве E_0 возьмем множество всех точек $z \in E$, в которых контигенция $\text{cont}(E, z)$ множества E [10] параллельна вещественной оси. Поскольку γ_0 - гладкая кривая, то γ_0 - множество конечной первой вариации и E_0 - такой компакт, что $h_1(\text{пр}_y E_0) = 0$ [10, с.149, лемма I]. Возьмем теперь любой компакт $T \subset E$, где $T \cap E_0 = \emptyset$, и покажем, что T - NED - множество в Π. Пусть f - некоторая функция из $\mathcal{F}(\Pi \setminus T)$ и пусть точка $z_0 = x_0 + i y_0 \in T$ такова, что f не продолжается до абсолютно непрерывной функции на интервале $\ell(y_0) = \{z \in \Pi : \text{Im}\, z = y_0\}$. Совокупность всех таких точек обозначим через T_0. Из теоремы I получим, что $h_1(\text{пр}_y T_0) = 0$. Отсюда и из теоремы I далее следует [10, гл.3, § 5], что $h_1(T_0) = 0$ и поэтому $h_1(\text{пр}_x T_0) = 0$. Обозначим через T_1 множество всех точек z из T, в которых $\text{cont}(E, z)$ параллельна мнимой оси. Тогда $h_1(\text{пр}_x T_1) = 0$. Пусть $\ell(x) = \{z \in \Pi : \text{Re}\, z = x\}$

и пусть T_2 – совокупность тех $x \in (0,1)$, для которых пересечение $\tilde{l}(x) \cap T$ несчетно и $\int_{\tilde{l}(x)} |f'(z)|^2 dx = \infty$. Очевидно, что $h_1(T_2) = 0$. Заметим теперь, что $f(z)$ продолжается до непрерывной функции на интервале $\tilde{l}(x)$ для каждого $x \in M$, где $M = (0,1) \setminus (\text{пр}_x T_0 \cup \text{пр}_x T_1 \cup T_2)$. Это следует из того факта, что для каждой точки $z^0 = x^0 + iy^0 \in T$, $x^0 \in M$, найдутся два вертикальных угла со сторонами $\tilde{l}(x^0)$, $l(y^0)$, которые в достаточно малой окрестности точки z^0 не содержат точек из множества $T \setminus \{z^0\}$. Поскольку пределы $f(z)$ при $z \to z^0$ вдоль каждого из интервалов $\tilde{l}(x^0)$, $l(y^0)$ существуют в силу выбора точки z^0, то по соответствующей теореме Линделефа [II] эти пределы совпадают, следовательно, $f(z)$ продолжается до непрерывной функции на интервале $l(x_0)$. Так как

$$\int_{\tilde{l}(x_0)} |f'(z)|^2 dy < \infty \quad , \quad \tilde{l}(x) \cap T$$ – не более чем счетное множество, то f продолжается до абсолютно непрерывной функции на $\tilde{l}(x_0)$ [9]. По теореме I, $\Pi \setminus T$ – нормальная область относительно вещественной оси. Из нормальности $\Pi \setminus T$ относительно двух взаимно ортогональных осей следует, что T является NED -множеством [6]. Для завершения доказательства необходимости условия теоремы 3 остается только заметить, что $E \setminus E_0$ всегда можно представить в виде объединения не более чем счетного множества $T_k \subset T_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, типа T.

Достаточность условия теоремы 3 доказывается следующим соображением. Поскольку NED -множества не влияют на величину модуля семейства соединяющих кривых [7] и $\Pi \setminus E_0$ – нормальная область относительно мнимой оси [4], то имеем равенства

$$m(\Gamma_1(G)) = m(\Gamma_1(\Pi \setminus E_0)) = m(\Gamma_1(\Pi)).$$

Это завершает доказательство теоремы 3.

СЛЕДСТВИЕ I. Утверждение теоремы 3 остается в силе, если гладкую кривую γ_0 заменить на кусочно-гладкую.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть E – компакт в Π, расположенный на аналитической кривой, отличной от горизонтального прямолинейного отрезка, и пусть $G = \Pi \setminus E$ – нормальная область относительно мнимой оси. Тогда E – NED -множество в Π.

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть E – компакт в Π, $h_1(E) < \infty$. Тогда $G = \Pi \setminus E$ – нормальная область относительно мнимой оси в том и только в том случае, когда $E = E_0 \cup (\cup_{k \geq 1} E_k)$, где E_0 – борелевское множество такое, что $h_1(\text{пр}_y E_0) = 0$ и $\Pi \setminus \overline{E}_0$ –

нормальная область относительно мнимой оси, E_k - NED-множество в Π для каждого $k = 1, 2, \ldots$.

Следствия I и 2 непосредственно вытекают из теоремы 3. Для доказательства следствия 3, кроме теоремы 3, нужно использовать следующую формулу Безиковича-Федерера [I0, I3]:

$$E = E^0 \cup (\cup_{k \geq 1} E^k),$$

где E^0 - борелевское множество, проекция которого на почти все направления имеет нулевую линейную меру, а E^k - компакт, расположенный на гладкой кривой для каждого $k = 1, 2, \ldots$.

Литература

I. Тамразов П.М. Конформно-инвариантные модули и круговая симметризация.-В сб.: Метрические вопросы теории функций и отображений, вып.5. Киев, Наукова думка , I974, с.I27-I46.

2. Koebe P. Zur konformen Abbildung unendlich vielfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. - Nachr.Ges.Wiss. Göttingen, Math.-Phys.Kl., 1918, S.60-71.

3. Grötzsch H. Zum Parallelschlitztheorem der konformen Abbildung schlichter unendlich vielfach zusammenhängender Bereiche. - Ber.Verh.Sächs.Akad.Wiss.Leipzig, Math.-Phys.Kl. 1931, Bd 83, H.3, S.185-200.

4. Reich E., Warschawski S.E. On canonical conformal maps of regions of arbitrary connectivity. - Pacif. J.Math., 1960, vol.10, N 3, p.965-983.

5. Дженкинс Дж. Однолистные функции и конформные отображения. М.,ИЛ, I962.

6. Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and function theoretic null-sets.-Acta Math.,1950,v.83,101-129.

7. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск, Наука , I983.

8. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. 3-е изд. М., Наука , I974.

9. Сакс Р.С. Теория интеграла. М., ИЛ, I949.

I0. Иванов Л.Д. Вариация множеств и функций. М., Наука , I975.

II. Голузин Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного, 2-е изд. М., Наука , I966.

I2. Väisälä J. On the null-sets for extremal distances.- Ann.Acad.Sci.Fenn.,Ser.A.I.Math.,1962,N 322, p.1-12.

I3. Федерер Г. Геометрическая теория меры. М., Наука , I987.