Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

V. A. Tolokonnikov, Generalized Douglas algebras,
Algebra i Analiz, 1991, Volume 3, Issue 2, 231–252

https://www.mathnet.ru/eng/aa250

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
https://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 18.97.14.82
May 15, 2025, 19:53:26

Алгебра и анализ
Том 3 (1991), вып. 2

© 1991 г.

ОБОБЩЕННЫЕ АЛГЕБРЫ ДУГЛАСА

В. А. Толоконников

В настоящей статье на пространства гладких функций на окружности распространяются следующие известные результаты анализа: теорема Феффермана о разложении BMO, теорема о действии в пространстве VMO оператора равномерного приближения аналитическими функциями и теорема о короне в H^∞. Также описаны символы операторов Тёплица и Ганкеля, действующих в пространствах гладких функций, и их связь с мультипликаторами. Все рассмотрения основаны на использовании вводимого в статье понятия обобщенной алгебры Дугласа. Типичные примеры таких алгебр $H^\infty + L^\infty \cap B^s_{pq}$, $H^\infty + M(B^s_{pq})$, $s > 0, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$, где $M(B^s_{pq})$ — мультипликаторы.

§ 0. Введение

В настоящей работе изучаются подалгебры (вообще говоря, не замкнутые) алгебры $L^\infty = L^\infty(\mathbb{T})$ всех ограниченных измеримых функций на единичной окружности $\mathbb{T}, \mathbb{T} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| = 1\}$. Особый интерес представляют алгебры, содержащие алгебру Харди H^∞, состоящую из граничных значений всех ограниченных и аналитических в единичном круге $\mathbb{D} = \{\xi \in \mathbb{C} : |\xi| < 1\}$ функций. Основы такого интереса хорошо известны и лежат, в частности, в спектральной теории операторов Ганкеля и Тёплица, в теории наилучших приближений, в роли, которую играет в анализе оператор гармонического сопряжения (в частности, в теории пространства BMO функций ограниченной средней осцилляции) и т.д. Перечисленные связи подалгебр алгебры L^∞ подробно обсуждаются, например, в [5, 35]. Важную роль при этом играют так называемые алгебры Дугласа, т.е. замкнутые подалгебры $X, X \subset L^\infty$, содержащие алгебру H^∞:

$$H^\infty \subset X \subset L^\infty(\mathbb{T}).$$

Подробно изучены их аддитивная и мультипликативная структуры (см. [5]) и, в частности, их связи с внутренними функциями (в смысле А.Берлинга, т.е. такими функциями b из H^∞, которые унимодулярны почти всюду на единичной окружности: $|b(\xi)| = 1$ п.в. $\xi \in \mathbb{T}$). Например, если $\mathcal{B}$ — некоторое семейство внутренних функций, то алгеброй Дугласа будет равномерное замыкание алгебры

$$\{f\overline{b}_1^{n_1}\overline{b}_2^{n_2}\dots\overline{b}_k^{n_k} : f \in H^\infty, b_1, \dots, b_k \in \mathcal{B}\}. \tag{0.1}$$

Основной в теории алгебр Дугласа является теорема Чанг–Маршалла о том, что все замкнутые алгебры, лежащие между L^∞ и H^∞, получаются таким образом для некоторого $\mathcal{B}$. Ее доказательство, а также другие сведения об алгебрах Дугласа можно найти в монографии Гарнетта [5].

Ключевые слова: алгебры Дугласа, теорема о короне, операторы Теплица и Ганкеля, пространства Бесова.

В статье изучаются свойства более широкого класса GD-алгебр — обобщенных алгебр Дугласа, в которых топологическое условие замкнутости в L^∞ заменено некоторым алгебраическим условием. Примеры таких алгебр получаются, если рассмотреть алгебры ограниченных функций, коаналитическая часть которых обладает некоторой гладкостью, например,

$$\{f \in L^\infty : P_- f \in B^s_{pq}\}, s > 0, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty, \tag{0.2}$$

где B^s_{pq} — пространство Бесова и P_- — проектор Рисса (интеграл Коши).

В данном примере GD-алгебра (0.2) является банаховой алгеброй относительно некоторой нормы, более сильной, чем L^∞-норма, но в общем случае такое свойство не предполагается выполненным. Например, если D — алгебра Дугласа и $\mathcal{B}$ — семейство всех внутренних функций, обратимых в D, то алгебра (0.1) будет GD-алгеброй; это минимальная GD-алгебра среди всех тех, у которых пространство максимальных идеалов то же самое, что и у алгебры D (теорема 6.1). Также возможен случай, когда GD-алгебра наделена квазибанаховой топологией. Это так, например, если в алгебре (0.2) взять индексы $0 < p = q < 1$, $s > \frac{1}{p} - 1$ (см. подробнее § 3).

Техника, развитая в статье для изучения GD-алгебр, применяется затем к решению таких аналитических задач, которые формулируются в терминах метрики пространств L^∞ и BMO. В формулировке подобных задач обычно участвуют подалгебры H^∞ — например $H^\infty \cap B^s_{pq}$, или симметричные алгебры — например $L^\infty \cap B^s_{pq}$, и дело существенно усложняется несепарабельностью подобных алгебр. Наш подход будет заключаться во включении этих алгебр в порожденные ими GD-алгебры и использовании известных методов теории алгебр Дугласа. Рассмотрим, например, задачу о короне в алгебре $H^\infty \cap B^s_{pq}$: для каждого набора функций $f_1, \ldots, f_n \in H^\infty \cap B^s_{pq}$, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{n} |f_i(z)| \geqslant \delta > 0, z \in \mathbb{D}$, требуется доказать существование функций $g_1, \ldots, g_n$ из той же алгебры, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{n} f_i g_i = 1$. Этот вопрос — для некоторых наборов индексов задавался в работах [16,22,23], а существование таких функций $g_1, \ldots, g_n$ в H^∞ составляет содержание теоремы Карлесона о короне [5]. Наш подход заключается в использовании равенства $H^\infty \cap B^s_{pq} = H^\infty \cap \overline{X}$, где X — GD-алгебра (0.2). Таким образом, алгебра $H^\infty \cap B^s_{pq}$ устроена аналогично алгебре Сарасона QDA, построенной по алгебре Дугласа D, для которых теорема о короне известна [13, 26]. Отметим, что ранее автором в [13] был рассмотрен случай алгебры $H^\infty \cap B^{1/p}_{pp}$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, методом, отличным от описанного.

Другая задача связана с уточнением следующей теоремы Феффермана–Стейна — для каждой функции f из BMO найдутся функции g, h из L^∞, для которых $f = g + \tilde{h}$, где $\tilde{h}$ — функция, гармонически сопряженная с h. Если мы дополнительно знаем, что $f \in B^s_{pq}$, то можно ли функции g и h выбрать из алгебр $L^\infty \cap B^s_{pq}$? Утвердительный ответ на этот и подобные вопросы дается в § 5. Можно дать следующую формулировку этого результата:

$$P_+(L^\infty \cap B^s_{pq}) = \mathrm{BMOA} \cap B^s_{pq}.$$

Аналогом этой теоремы для пространства $M(B^s_{pq})$ — мультипликаторов пространства B^s_{pq} относительно поточечного умножения на окружности служит описание пространства $P_+(M(B^s_{pq}))$, полученное в § 8.

Еще одна задача, рассматриваемая в этой статье на языке GD-алгебр, — это описание функциональных пространств, в которых действует оператор $\mathcal{A}$ наилучшей аппроксимации аналитическими функциями в равномерной метрике. Определяется он следующим образом: для каждой функции $f \in \mathrm{VMO}$ найдется единственная функция $\mathcal{A}(f) \in \mathrm{VMOA}$, для которой

$$\|f - \mathcal{A}(f)\|_\infty = \inf\{\|f - g\|_\infty : g \in \mathrm{VMOA}\}.$$

Различные вопросы анализа, связанные с этим оператором, и подробная библиография приведены в [12]. Там же показано, что (нелинейный) оператор $\mathcal{A}$ действует во многих подалгебрах алгебры $C(\mathbb{T})$ непрерывных функций, мы построим новые примеры $\mathcal{A}$ -инвариантных подпространств VMO и дадим ответ на некоторые вопросы из [12].

Опишем содержание работы по параграфам. В § 1 вводится понятие GD-алгебры и рассмотрены первые примеры. Основные примеры таких алгебр разобраны в параграфах со второго по четвертый с использованием описания функциональных пространств на окружности через их псевдопродолжения в круг. По сравнению с работами Е. М. Дынькина [6, 7], где было введено это понятие, для нас особое значение будет иметь гармоническое продолжение. При этом описание оказывается разным в случае пространств функции нулевой гладкости, гладкости меньше единицы и больше единицы.

Остальная часть статьи посвящена приложениям аппарата GD-алгебр. В § 5 доказываются теоремы о разложении Фефdifferentiation Фефермана–Стейна и действии оператора $\mathcal{A}$ в различных пространствах. В § 6 теория Гельфанда максимальных идеалов банаховой алгебры переносится на класс GD-алгебр, которые, вообще говоря, не снабжены банаховой структурой. В § 7 доказывается теорема о короне во всех алгебрах вида $H^\infty \cap \overline{X}$, где X — GD-алгебра. В частности, здесь приведено новое доказательство результатов автора из работы [13] и даются ответы на вопросы из [16, 22, 23]. Также здесь доказывается теорема о структуре пространств максимальных идеалов некоторых алгебр аналитических функций.

В § 8 описано пространство символов операторов Теплица, действующих в пространствах гладких функций, например в пространствах Бесова. Показано, что пространство функций, комплексно сопряженных к этому пространству,всегда является GD-алгеброй. Там же получено описание проекции Рисса пространства мультипликаторов для многих пространств гладких функций. В заключительном § 9 полученные результаты применяются к изучению символов операторов Ганкеля.

Результаты настоящей работы были анонсированы в заметке [36].

§ 1. Основные определения

Введем некоторые обозначения. Символом $\mathcal{H}$ обозначим пространство функций, гармонических в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ с топологией равномерной сходимости на компактах, $\mathcal{A}$ — подпространство аналитических функций в $\mathbb{D}$. Нормированную меру Лебега на окружности $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ обозначим через dm_1, L^p — соответствующее пространство Лебега, $H^p = L^p \cap \mathcal{A}$ — пространство Харди.

Каждой функции $f \in \mathcal{H}$ можно сопоставить ее коэффициенты Фурье:

$$\hat{f}(n) = z^{-n} \int_{\mathbb{T}} f(rz) z^{-|n|}\, dm_1, \qquad n \in \mathbb{Z},$$

где r — некоторое число из интервала (0.1). Проектор Рисса P_+, действующий из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{A}$, определяется формулой

$$\widehat{Pf_+}(n) = \begin{cases} \hat{f}(n), & n \geqslant 0, \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Сопряженное пространство к пространству $\mathcal{H}$ относительно двойственности, являющейся продолжением двойственности в L^2

$$(f,g) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\overline{\hat{g}(n)} = \int_{\mathbb{T}} f\bar{g}\,dm_1, \tag{1.1}$$

реализуется как пространство функций, гармонических в окрестности $\overline{\mathbb{D}}$:

$$\mathcal{H}^* = \{f \in \mathcal{H} : \varlimsup_{n\to\pm\infty} |\hat{f}(n)|^{1/|n|} < 1\}.$$

Аналогично $\mathcal{A}^* = \mathcal{H}^* \cap \mathcal{A}$ относительно той же двойственности (1.1).

Определим теперь понятие GD- и $\widetilde{GD}$-алгебр.

Определение. *Подалгебру X (не обязательно замкнутую) алгебры L^∞, содержащую H^∞, мы назовем обобщенной алгеброй Дугласа* (GD-*алгеброй*), *если выполнена следующая аксиома:*

(GD). *Если $f \in X$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| > 1$, то $(f-\lambda)^{-1} \in X$.*

Здесь $\|f\|_\infty := \operatorname{vraisup}\{|f(\xi)| : \xi \in \mathbb{T}\}$. Алгебру назовем $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгеброй, если выполнена более сильная аксиома:

($\widetilde{\mathrm{GD}}$). *Если $f \in X$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\varphi \in \mathcal{A}^*$, то $\varphi \circ f \in X$.*

Отметим, что если для подпространства X в L^∞ выполнена аксиома $\widetilde{\mathrm{GD}}$, то X — алгебра, достаточно рассмотреть $\varphi(z) = z^2$.

Теперь перейдем к примерам GD- и $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгебр.

Пример 1. *Пусть X — банахова алгебра, $H^\infty \subset X \subset L^\infty$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *X — GD-алгебра;*
2) *X — $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгебра;*
3) *Спектральный радиус в X $r_X(f) = \lim\limits_{n+\infty} \|f^n\|_X^{1/n}$ совпадает с L^∞-нормой.*

Действительно, из условия (GD) следует, что $r_X(f) \leqslant \|f\|_\infty$, обратное неравенство получается из включения $X \subset L^\infty$. Если же $\varphi \in \mathcal{A}^*$ и $r_X(f) \leqslant 1$, то $\varphi \circ f = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{\varphi}(n) \cdot f^n \in X$, где ряд сходится по норме в X, и из третьего условия следует второе.

Пример 2. *Если X — алгебра Дугласа, т.е. замкнутая подалгебра L^∞, содержащая H^∞, то X — GD-алгебра.*

Это частный случай предыдущего примера.

Пример 3. *Будем говорить, что подпространство U в H^1 обладает K-свойством Хавина* [27], *если для всех f из H^∞ оператор Теплица $T_{\bar{f}}$ действует в Y, где $T_{\bar{f}}(g) := P_+(\bar{f}g)$. Если еще Y — банахова алгебра, в которой плотны многочлены и для всех $f \in Y$ $r_Y(f) = \|f\|_\infty$, то $X = \overline{Y} + H^\infty = \{\bar{f} + g : f \in Y, g \in H^\infty$ - GD-алгебра.*

Действительно, из определения K-свойства можно легко вывести, что X — алгебра. В X плотны функции вида $f\bar{z}^n, f \in H^\infty$, для которых $r_X(f\bar{z}^n) \leqslant r_{H^\infty}(f) \times r_Y(z)^n = \|f\bar{z}^n\|_\infty$ и для X выполнены эквивалентные условия из примера 1.

В частности, будут $\widetilde{GD}$-алгебрами следующие пространства: $H^\infty + W_p^1$, где $W_p^1 = \{f \in L^p : f' \in L^p\}$. K-свойство для $W_p^1 \cap \mathcal{A}$ проверено в [27]. Позже мы обобщим этот пример.

Пример 4. $\overline{\mathcal{A}}^* + H^\infty$ — $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгебра. Действительно, заменяя функцию $\bar{f}$ из $\mathcal{A}^*$ на функцию $\bar{f}(1/\bar{z})$, аналитическую при $|z| > r, r < 1$, имеющую те же граничные значения на $\mathbb{T}$, убеждаемся, что пространство $\overline{\mathcal{A}}^* + H^\infty$ совпадает с множеством граничных значений функций, ограниченных и аналитических в некотором кольце $1 > |z| > r$. Теперь легко проверить аксиому $(\widetilde{GD})$.

Пример 5. *Пусть R — множество рациональных функций с полюсами вне $\mathbb{D}$. Тогда $\overline{R}+H^\infty$ — GD-алгебра, не являющаяся $\widetilde{GD}$-алгеброй. Здесь алгебра $\overline{R}+H^\infty$ совпадает с множеством граничных значений функций, мероморфных в $\mathbb{D}$ и ограниченных в некотором кольце $1 > |z| > r, r < 1$.*

Ниже будет показано, что если X – GD-алгебра и $X \neq H^\infty$, то $\bar{z} \in X$. В этом случае $X \supset \overline{R}+H^\infty$, а если еще $X - \widetilde{GD}$-алгебра, то $X \supset \overline{\mathcal{A}}^* + H^\infty$, и эти алгебры являются аналогами алгебры Сарасона $H^\infty + C$.

§ 2. Примеры GD-алгебр. Описание через псевдопродолжения пространств функций гладкости меньше единицы

В рассматриваемом круге вопросов оказывается удобным описывать функциональные пространства в терминах производных псевдопродолжения. В частности, в этом параграфе мы рассмотрим примеры пространств, описываемых в терминах первой производной.

Определение 2.1. *Функцию F, бесконечно дифференцируемую в открытом круге $\mathbb{D}$($\overset{\text{def}}{\iff}$ $F \in C^\infty(\mathbb{D})$) мы назовем псевдопродолжением функции f из класса L^1, если $\lim\limits_{r\to 1-0}\|F_r - f\|_{L^1} = 0$, где $F_r(z) := F(rz)$.*

Иногда мы будем явно указывать на продолжаемую функцию $F = F_f$.

Пример. *Гармоническое продолжение в круг $\mathcal{H}_f$.*

Если $F \in C^\infty(\mathbb{D})$, то $\partial F := \frac{1}{2}(\frac{d}{dx} - i\frac{d}{dy})F$, $\bar{\partial} F := \overline{\partial \bar{F}}$. Если E — пространство функций в $\mathbb{D}$, то $E_A := E \cap \mathcal{A}, E_A^{(k)} := \{f \in \mathcal{A} : f^{(k)} \in E\}$, где $f^{(k)}$-к-я производная, $f^{(-1)}(z) := \int_0^z f(w)\,dw$, и аналогично определяется $f^{(-k)}$.

Через $L^p(\mathbb{D})$ обозначим пространство функций, суммируемых в p-й степени относительно нормированной плоской меры Лебега в $\mathbb{D}$: $dm_2 := \frac{1}{\pi}dxdy$. Ортогональный проектор $L^2(\mathbb{D})$ на $L^2(\mathbb{D})_A$ обозначим через $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{P}(F(z)) := \int\limits_{\mathbb{D}} F(w)(1 - z\bar{w})^{-2} dm_2.$$

Лемма 2.2. *Пусть $G \in L^p(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\mathbb{D}), p > 1$. Тогда найдется функция $F \in C^\infty(\mathbb{D})$, для которой $\partial F = G$, причем F имеет L^1-граничную функцию f из $H^1, \hat{f}(0) = 0$. При этом $f' = \mathcal{P}(G)$. В частности, f определяется однозначно по G.*

Доказательство следует из явных формул для F и f:

$$F(z) := \int\limits_{\mathbb{D}} G(w)(\bar{z} - \bar{w})^{-1}\, dm_2, \quad f(z) := \int\limits_{\mathbb{D}} zG(w)(1 - z\bar{w})^{-1}\, dm_2.$$

Следствие 2.3. *Если E — пространство функций в круге $\mathbb{D}$, $E_A \subset L^p(\mathbb{D})$ при некотором $p > 1$ и $\mathcal{P}E \subset E$, то пространство $E_A^{(1)}$ совпадает с пространством аналитических функций f, для которых найдется псевдопродолжение F_f со свойством $\partial F_f \in E \cap L^p(\mathbb{D})$. Сокращенная запись:*

$$E_A^{(1)} = \{f \in H^1 : \exists F_f, \qquad \partial F_f \in E \cap L^p(\mathbb{D})\}. \tag{2.1}$$

Следствие 2.4. *Пусть справедлива формула (2.1) и выполняется свойство*

$$F \in E, \qquad G \in L^\infty(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\mathbb{D}) \Rightarrow FG \in E. \tag{2.2}$$

Тогда следующее пространство является $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгеброй:

$$X := \{f \in L^\infty : P_+(\bar{f}) \in E_A^{(1)}\} \tag{2.3}$$

Кроме того, пространство X описывается через псевдопродолжения:

$$X = \{f \in L^\infty : \exists p > 1, \exists F_f, \bar\partial F_f \in E \cap L^p(\mathbb{D}), \tag{2.4}$$

и справедлива следующая формула:

$$P_+(\bar X) = \mathrm{BMOA} \cap E_A^{(1)} \tag{2.5}$$

Доказательство. Равенство (2.4) следует из соотношения $(P_+\bar f)' = \bar\partial(\mathcal{H}_f)$ и следствия 2.3. Если $f \in X$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\varphi \in \mathcal{A}^*$, то $\varphi \circ \mathcal{H}_f$ — псевдопродолжение функции $\varphi \circ f$ и $\bar\partial(\varphi \circ \mathcal{H}_f) = \varphi' \circ \mathcal{H}_f \cdot \bar\partial \mathcal{H}_f \in E$, так как производная φ ограничена в $\overline{\mathbb{D}}$.

Если f принадлежит правой части (2.5), то по теореме Феффермана–Стейна о разложении BMO найдется функция g, $g \in L^\infty$, для которой $f = P_+ g$, и из (2.3) следует, что $\bar g \in X$. Обратное включение очевидно. •

При применении доказанных следствий вместо проверки условия $\mathcal{P}E \subset E$ мы будем использовать описание сопряженных пространств. Введем некоторые определения.

Банахово пространство Y назовем $\mathcal{H}$-пространством, если выполнена следующая аксиома:

($\mathcal{H}$). $\mathcal{H}^* \subset Y \subset \mathcal{H}$, вложения непрерывны.

Тогда $Y_c := \mathrm{clos}_Y(\mathcal{H}^*)$ и $(Y_c)^*$ — также $\mathcal{H}$-пространства, где сопряженное берется относительно двойственности (1.1). Аналогично определим $\mathcal{A}$-пространства:

($\mathcal{A}$). $\mathcal{A}^* \subset Z \subset \mathcal{A}$, вложения непрерывны.

Тогда $Z_c := \mathrm{clos}_Z(\mathcal{A}^*)$ и $(Z_c)^*$ — также $\mathcal{A}$-пространства.

Нам также понадобятся банаховы пространства функций в круге, для которых выполнено условие

(S). $C(\overline{\mathbb{D}}) \subset W \subset M^1(\mathbb{D})$, вложения непрерывны, где $M^1(\mathbb{D})$ — пространство конечных мер в $\mathbb{D}$.

Тогда $W_c := \mathrm{clos}_w(C(\overline{(\mathbb{D})}))$ и $(W_c)^*$ — также S-пространства, где сопряженное берется относительно двойственности $\langle F, \mu\rangle := \int_{\mathbb{D}} F\, d\mu$.

Лемма 2.5. *Пусть W — S-пространство, $W = W_c$ и $E = W^*$ — его сопряженное, тогда E_A и W_A — $\mathcal{A}$-пространства. Пусть еще $W_A = W_{Ac}$, $E_A^{(1)} = (W_A)^*$ и пространство $E_A^{(1)}$ z-инвариантно: $f \in E_A^{(1)} \Rightarrow zf \in E_A^{(1)}$. Тогда справедлива формула* (2.1).

Доказательство. Если $f \in H^1$, $\partial F_f \in E$ и $h \in \mathcal{A}^*$, то $\partial(F_f \bar h) = \partial F_f \cdot \bar h$ и

$$\left|\int_{\mathbb{T}} \bar z f \bar h\, dm_1\right| = \left|\int_{\mathbb{D}} \partial F_f \cdot \bar h\, dm_2\right| \leqslant c\|\partial F_f\|_E \|h\|_W.$$

Взяв супремум по всем h таким, что $\|h\|_{W_A} \leqslant 1$, мы получим, что $P_+(\bar{z}f) \in E_A^{(1)}$, а тогда и $f \in E_A^{(1)}$. •

Замечание. Можно показать, что из условий леммы следует включение $\widetilde{\mathcal{P}E} \subset E$.

Приведем теперь примеры описания функциональных пространств и $\widetilde{GD}$-алгебр.

Пример 6. *Пространства Бесова и Лизоркина–Трибеля гладкости меньше единицы.*

Введем следующие пространства со смешанной нормой:

$$E^t_{pq} := \{F \in M^1(\mathbb{D}) : \int\limits_0^1 \|F_r(1-r)^{-t}\|^q_{L^p} \frac{dr}{1-r} < \infty\},$$

где $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ и $t < 0$. При $p = 1$ или $q = 1$ вместо L^1 в этом определении будем подразумевать пространство мер M^1. Тогда при $t > -1$ эти пространства будут S-пространствами и $(E^t_{pq})_A \subset L^r(\mathbb{D})$ при $r < -\frac{1}{t}$. Если еще s — вещественное число, то пространство Бесова можно определить так [1]:

$$B^s_{pq} := \{F \in \mathcal{H} : \bar{\partial}^n F, \partial^n F \in E^{s-n}_{pq}\}, \tag{2.6}$$

где $n \geqslant 0$, $n > s$. При $p = q$ мы будем обозначать это пространство через B^s_p. При $s > 0$ для функции F из B^s_{pq} найдется единственная функция $f \in L^1$, для которой $F = \mathcal{H}_f$. Множество функций из L^1, продолжаемых до функций из B^s_{pq}, мы будем обозначать также через B^s_{pq}. Тогда при $0 < s < 1$ и $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ следующее пространство образует GD-алгебру: $\{f \in L^\infty : P_- f \in B^s_{pq}\}$.

Действительно, здесь применима Лемма 2.5, так как

$$B^s_{pq} = ((B^{-s}_{p'q'})_c)^*, \qquad E^{s-1}_{pq} = ((E^{-s}_{p'q'})_c)^*$$

При доказательстве первого равенства надо воспользоваться эквивалентным определением пространств Бесова через отрезки ряда Фурье [1].

Пространства Лизоркина–Трибеля F^s_{pq}, $1 < p, q < \infty$ получаются вполне аналогично (2.6) после замены пространства E^t_{pq} на G^t_{pq}:

$$G^t_{pq} := \{F \in L^1(\mathbb{D}) : \int\limits_{\mathbb{T}} (\int\limits_0^1 |F(r\xi)|^p (1-z)^{-p(t+1/q)} dr)^{q/p} dm_1(\xi) < \infty\},$$

где $1 < p, q < \infty$, $t < 0$ [9]. Тогда при $0 < s < 1$, $1 < p, q < \infty$ следующее пространство является $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгеброй: $\{f \in L^\infty : P_- f \in F^s_{pq}\}$. Отметим, что при $q = 2$ пространство F^s_{pq} совпадает с пространством Соболева W^s_p.

§ 3. Пространства функций гладкости больше единицы

Пример 7. *Пространства B^s_{pq} и F^s_{pq} при $s \geqslant 1$.*

Теорема 3.1. *Пусть $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, $0 < k-1 \leqslant s < k$, k — натуральное. Тогда*

1. $(B^s_{pq})_A = \{f \in H^1 : \partial^k F_f \in E^{s-k}_{pq}\}$, *точнее если $F \in C^\infty(\mathbb{D}), \partial^k F \in E^{s-k}_{pq}$, то однозначно найдутся функции $a \in \mathcal{A}$ и $f \in H^1$ такие, что $F - \bar{a}$ будет псевдопродолжением f, $\hat{f}(0) = \cdots = \hat{f}(k-1) = 0$, причем $f \in B^s_{pq}$.*
2. *Пространство $X := \{f \in L^\infty : P_- f \in B^s_{pq}\}$ — $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгебра.*

Доказательство. Существование функций a и f получается повторным применением леммы 2.2.

Докажем, что $f \in (B^s_{pq})_A$. Из формулы Грина следует, что

$$\int\limits_{\mathbb{D}} (B\bar{z}(1-|z|^2)^{n-1} - \frac{1}{n}\partial B(1-|z|^2)^n)\,dm_2 =$$

$$= -\int\limits_{\mathbb{D}} \partial(B(1-|z|^2)^n/n)\,dm_2 = -\int\limits_{\mathbb{T}} B\bar{z}(1-|z|^2)^n\,dm_1 = 0,$$

если B — такая функция в круге, что интеграл в $\mathbb{D}$ сходится.

Тогда для $h \in \mathcal{A}^*$ имеем

$$|\int\limits_{\mathbb{T}} \bar{z}^k f h\,dm_1| = \frac{1}{(k-1)!}|\int\limits_{\mathbb{D}} \partial^k(F_f)\bar{h}(1-|z|^2)^{k-1}\,dm_2| \leqslant$$

$$\leqslant c\|h\|_{E^{-s}_{p'q'}}\|\partial^k F\|_{E^{s-k}_{pq}}.$$

Поэтому $P_+(\bar{z}^k f) \in (B^s_{pq})_A$, а тогда и $f \in (B^s_{pq})_A$. Проверим, что X — $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгебра. Если $f \in X, \|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\varphi \in \mathcal{A}^*$, то $\partial^k(\varphi \circ \mathcal{H}_f) = \sum \psi_{(k_1,\dots,k_i)}\Pi^i_{j=1}\partial^{k_j} f$, где суммирование производится по всем наборам натуральных чисел k_j таких, что $\sum k_j = k$ и все функции $\psi \in L^\infty(\mathbb{D}) \cap C^\infty(\mathbb{D})$. Поэтому для окончания доказательства достаточно применить следующую лемму.

Лемма 3.2. *Пусть $s \geqslant \frac{1}{p}$, $k_j \geqslant 1$ натуральные числа, $k = \sum^i_{j=1} k_j > s$. Тогда для всех $\{f_j\}^i_{j=1} \subset (B^s_{pq})_A$ выполнено следующее неравенство:*

$$\|\prod_{j=1}^i f_j^{(k_j)}\|_{B^{s-k}_{pq}} \leqslant c\prod_{j=1}^i \|f_j\|_{(B^s_{pq})_A}.$$

Эта лемма доказана в работе автора [13]. Приведем ее доказательство для полноты изложения.

Пусть $q_j = kq/k_j$, $p_j = kp/k_j, s_j = (s-k)k_j/k$, тогда

$$\|\prod_{j=1}^i f_j^{(k_j)}\|_{B^{s-k}_{pq}} = (\int\limits_{\mathbb{D}} \|\prod_{j=1}^i (f_j^{(k_j)})_r(1-r)^{k-s}\|^q_p \frac{dr}{1-r}^{1/q} \leqslant$$

$$\leqslant (\int\limits_{\mathbb{D}} (\prod_{j=1}^i \|(f_j^{(k_j)})_r(1-r)^{-s_j}\|_{p_j})^q \frac{dr}{1-r})^{1/q} \leqslant \prod_{j=1}^i (\int\limits_{\mathbb{D}} \|(f_j^{(k_j)})_r(1-r)^{-s_j}\|^{q_j}_{p_j} \frac{dr}{1-r})^{1/q_j} =$$

$$= \prod_{j=1}^i \|f_j^{(k_j)}\|_{B^{s_j}_{p_j q_j}} \leqslant c\prod_{j=1}^i \|f_j\|_{B^s_{pq}}.$$

Мы дважды применили неравенство Гельдера и включения [1] $B^{s_j'}_{p_j q_j} \subset B^{s_j}_{p_j q} \subset B^{s-k_j}_{pq}$, так как $q_j \geqslant q$ и $s - k_j - s_j = s(1-\frac{k_j}{k} \geqslant \frac{1}{p}(1-\frac{k_j}{k}) = \frac{1}{p} - \frac{1}{p_j}$. Лемма и теорема доказаны. •

Аналогично доказываются теорема для пространств F^s_{pq}, $s > 0$, $1 < p, q < \infty$. Отметим особую роль при предложенном способе описания пространств функций гармонического (аналитического) продолжения с окружности в круг. Например, в теореме 3.1 если для некоторого продолжения F_f функции f выполнено $\partial^k F_f \in E^{s-k}_{pq}$, то это же верно и для гармонического продолжения: $f^{(k)} = \partial^k(\mathcal{H}_f) \in E^{s-k}_{pq}$.

Для нас это будет особенно важно при оценке решения задачи о короне в § 7 при описании символов операторов Тёплица и мультипликаторов в § 8. В работах Е. М. Дынькина пространства граничных значений описываются в терминах первой производной продолжения: $Y = \{f \in H^1 : \exists F_f, \partial F_f \in E\}$, где E — идеальное пространство функций в круге ($F \in E, |G| \leqslant |F| \Rightarrow G \in E$). В частности, так описываются пространства Бесова $B^s_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$ и Соболева $W^s_p, 1 < p < \infty, s > 0$ [7], регулярные пространства Карлемана бесконечно дифференцируемых функций [6], квазибанаховы пространства Бесова $B^s_p, 0 < p < 1, s > \frac{1}{p} - 1$ [8]. Со всеми этими пространствами можно связать следующее подпространство в L^∞:

$$X := \{f \in L^\infty : P_- f \in Y\} = \{f \in L^\infty : \exists F_f, \overline{\partial} F_f \in E\}.$$

Из конструкции псевдопродолжения F_f, предложенных в перечисленных выше работах Е. М. Дынькина, следует, что для $f \in X, \|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\varepsilon > 0$ можно найти псевдопродолжение F_f такое, что $\partial F_f \in E$ и $\|F_f\|_{L^\infty(\mathbb{D})} \leqslant 1 + \varepsilon$. Если еще $\varphi \in \mathcal{A}^*, \varphi$ регулярна в круге $\{z : |z| < 1 + 2\varepsilon\}$, то $\varphi \circ F_f$ — псевдопродолжение $\varphi \circ f$ и $|\overline{\partial}(\varphi \circ F_f)| = |\varphi' \circ F_f||\overline{\partial} F_f| \leqslant c|\overline{\partial} F_f|$, поэтому $X - \widetilde{GD}$-алгебра.

§ 4. Пространства функций с гладкостью, близкой к нулю

В этом параграфе мы приведем описание через псевдопродолжения пространств $BMO(\rho)$. При этом окажется необходимым ввести ограничения на лапласиан псевдопродолжения ΔF_f.

Лемма 4.1. *Пусть $G \in C^\infty(\mathbb{D})$ и*

$$\int_{\mathbb{D}} (|G|^2 + |\overline{\partial} G|)(1 - |z|^2) dm_2 < \infty.$$

Тогда найдется функция $F \in C^\infty(\mathbb{D})$, для которой $\partial F = G$ и F имеет L^1-граничную функцию f, причем $f \in H^1, \hat{f}(0) = 0$. Этими условиями функция f определяется однозначно.

Это лемма 2.13 из работы [26]. Ранее близкий результат был доказан Вольфом при доказательстве теоремы о короне [5].

Пример 8. Пространства $BMO(\rho)$. Пусть ρ — монотонная положительная функция на $(0, +\infty)$, причем $\rho(+0) = 0$ или $\rho(\cdot) \equiv 1$. Сопоставим функции $f \in L^1$ и интервалу I окружности $\mathbb{T}$ длины $|I|$ среднее:

$$I(f) := \frac{2\pi}{|I|} \cdot \int_I f\, dm_1. \quad \text{Тогда} \quad \mathrm{BMO}(\rho) :=$$

$$:= \{f \in L^1 : \sup_I I(|f - I(f)|)\rho(|I|)^{-1} < \infty\}, \mathrm{BMO} := \mathrm{BMO}(\mathbb{T}).$$

Если верхний индекс роста $q_\rho := \inf\{q : \sup\limits_{t \geqslant 1, \lambda > 0} \rho(\lambda t)/\rho(\lambda) t^q < \infty\}$ меньше единицы, то в работе [25] показано, что

$$\mathrm{BMO}(\rho) = \{f \in L^1 : \partial \mathcal{H}_f, \overline{\partial} \mathcal{H}_f \in E^2_\rho\}$$

где

$$E^p_\rho := \{F : \int_\theta^{\theta+h} \int_0^h |F(re^{i\varphi})|^p (1 - r) d\varphi dr \leqslant c\rho^p(h) h\}.$$

Это идеальные пространства функций в круге. Там же описано $\mathcal{H}$ -пространство $\mathcal{H}^1_\rho$, предсопряженное к $\mathrm{BMO}(\rho)$ относительно двойственности (1.1), аналогичные вопросы рассматриваются в работе [19]. Нам понадобятся следующие свойства пространства $\mathcal{H}^1_\rho$ [25]:

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F||\nabla g|(1-|z|)dm_2 \leqslant c\|F\|_{E^2_\rho}\|g\|_{\mathcal{H}^1_\rho}, \tag{4.1}$$

$$\int\limits_{\mathbb{D}} |F||g|(1-|z|)dm_2 \leqslant c\|F\|_{E^1_\rho}\|g\|_{\mathcal{H}^1_\rho}, \tag{4.2}$$

Теорема 4.2. 1. $\mathrm{BMO}(\rho)_A = \{f \in H^1 : \exists F_f,\ \partial F_f \in E^2_\rho,\ \Delta F_f \in E^1_\rho\}$.

2. $X := \{f \in L^\infty : P_- f \in \mathrm{BMO}(\rho)\}$ — $\widetilde{\mathrm{GD}}$-*алгебра.*

Доказательство. 1. Если $h \in \mathcal{A}^*$, $h(0)=0$, то

$$|\int\limits_{\mathbb{T}} f\overline{h}dm_1| = |\int\limits_{\mathbb{D}} \Delta(F_f\overline{h})\log\frac{1}{|z|}dm_2 =$$

$$= |\int\limits_{\mathbb{D}} (\Delta F_f\overline{h} + 4\partial F_f\overline{h}')\log\frac{1}{|z|}dm_2| \leqslant c(\|\partial F_f\|_{E^2_\rho} + \|\Delta F_f\|_{E^1_\rho})\|h\|_{H^1_\rho}.$$

Поэтому $f \in ((\mathcal{H}^1_\rho)_A)^* = P_+(\mathrm{BMO}(\rho)) = \mathrm{BMO}(\rho)_A$. Мы использовали тот факт, что проектор Рисса действует в $\mathrm{BMO}(\rho)$ [19].

2. Пусть $f \in X$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ и $\varphi \in \mathcal{A}^*$, тогда

$$\Delta(\varphi \circ \mathcal{H}_f) = 4\varphi'' \circ \mathcal{H}_f \cdot \partial\mathcal{H}_f \cdot \overline{\partial}\mathcal{H}_f \in E^1_\rho.$$

Здесь использовано, что $f \in L^\infty$, поэтому $P_+ f \in \mathrm{BMO}$ и $\partial\mathcal{H}_f \in E^2_{\mathbb{I}}$. •

Замечание 4.3. В работе [26] получено описание пространств VMOD_A через псевдопродолжения, где D — алгебра Дугласа и $\mathrm{VMOD}_A := P_+(\overline{D})$. Так же как и в теореме 4.2, там введены ограничения на ∂F_f и ΔF_f.

§ 5. Теорема Феффермана–Стейна и оператор наилучшего приближения

Пусть X — GD-алгебра, введем еще два пространства:

$$\mathrm{VMOX} := \{f \in L^1 : P_- f, P_-\overline{f} \in P_- X\}, \quad QX := X \cap \overline{X}.$$

В известной теореме Феффермана–Стейна доказывается формула $\mathrm{BMO} = L^\infty + \widetilde{L^\infty}$, где для функции $f \in L^1$ символом $\tilde{f}$ будем обозначать ее гармоническое сопряжение. Докажем аналог этой теоремы для пространств VMOX :

Теорема 5.1. $\mathrm{VMOX} = \mathrm{QX} + \widetilde{\mathrm{QX}}$.

Лемма 5.2. $X = \{f \in L^\infty : P_- f \in P_- X\}$.

Доказательство. Если $f \in L^\infty$ и $P_- f = P_- h$, $h \in X$, то $f \in h + H^\infty \subset X$. •

Лемма 5.3. $QX = L^\infty \cap \mathrm{VMOX}$. •

Лемма 5.4. *Пусть U — унимодулярная функция,*

$$\operatorname{dist}(u, H^\infty) < 1, \quad \operatorname{dist}(u, \overline{z}H^\infty) = 1 \tag{5.1}$$

и $u \in X$. Тогда $u \in$ QX. Здесь dist *— расстояние в L^∞.*

Доказательство. В известной лемме Чанг–Гарнетт [5] из условия (5.1) выводится существование функции f, $f \in H^\infty$, для которой $\|\overline{u} - f\|_\infty = \|1 - uf\|_\infty < 1$. Тогда $uf \in X$ и по определению GD-алгебры $(uf)^{-1} \in X$, поэтому $\overline{u} = (uf)^{-1} f \in X$. •

Лемма 5.5. *Пусть $f \in X$, $\operatorname{dist}(f, H^\infty) < 1$. Тогда найдется унимодулярная функция u из QX, для которой $f - u \in H^\infty$.*

Доказательство. По теореме Адамяна–Арова–Крейна найдется унимодулярная функция u, для которой $f - u \in H^\infty$ и выполнено условие (5.1) [5]. Тогда $u \in f + H^\infty \subset X$, и остается применить лемму 5.4. •

Лемма 5.6. $X = H^\infty +$ QX. •

Доказательство теоремы. Из леммы 5.6 следует, что $P_-X = P_-(QX)$. Если $f \in$ VMOX, то $f = P_+f + P_-f = P_+a + P_-b$, где $a, b \in QX$. Осталось заметить, что $P_+a = (a + i\tilde{a} + \hat{a}(0))/2$, $\quad P_-b = (b - i\tilde{b} - \hat{b}(0))/2$. •

Следствие 5.7. $\mathrm{BMO} \cap B^s_{pq} = L^\infty \cap B^s_{pq} + \widetilde{L^\infty \cap B^s_{pq}}$, *где $s > 0, 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ или $0 < p = q < 1$, $s > 1/p - 1$.*

Действительно, для GD-алгебры $X = \{f \in L^\infty : P_-f \in B^s_{pq}\}$ легко проверить, что $P_-X = \overline{\mathrm{BMO}_A \cap B^s_{pq}}$ и $\mathrm{VMOX} = \mathrm{BMO} \cap B^s_{pq}$. Случай $s > \frac{1}{p}, p \geqslant 1$ здесь тривиален, так как тогда $B^s_{pq} \subset L^\infty$. Случай $1 < p = q < \infty, s = \frac{1}{p}$ разобран в [12].

Аналогичное утверждение справедливо для пространств $F^s_{pq}, s > 0, 1 < p, q < \infty$.

Перейдем теперь к задаче наилучшего приближения в равномерной метрике. Пусть $f \in \mathrm{VMO} := \mathrm{VMO}(H^\infty + C)$, тогда [12] найдется единственная аналитическая функция f_0, $\quad f_0 \in \mathrm{VMO}_A := \mathrm{VMO} \cap \mathcal{A}$, для которой $f - f_0 \in L^\infty(\mathbb{T})$ и

$$\|f - f_0\|_\infty = \inf\{\|f - g\|_\infty : g \in \mathrm{VMO}_A\}.$$

Определим на пространстве VMO (нелинейный) оператор $\mathcal{A}$ равномерного приближения : $\mathcal{A}(f) := f_0$. Задача ставится следующим образом: какие функциональные пространства Y, $\quad Y \subset$ VMO инвариантны относительно оператора $\mathcal{A}$? Аксиоматический подход к решению этой задачи и большая библиография приведены в [12]. В частности, там подробно разобран случай подалгебр алгебры $C(\mathbb{T})$. Мы дадим примеры действия оператора $\mathcal{A}$ в подалгебрах алгебры $QC := \mathrm{VMO} \cap L^\infty$.

Теорема 5.8. *Если X — GD-алгебра, $X \subset H^\infty + C$, то оператор $\mathcal{A}$ равномерного приближения действует в пространствах* VMOX *и* QX.

Замечание. *Если X — произвольная GD-алгебра, то $X_1 := X \cap (H^\infty + C)$ — также GD-алгебра, и к ней применима теорема 5.8, причем* $\mathrm{VMOX}_1 = \mathrm{VMO} \cap \mathrm{VMOX}$, $\mathrm{QX}_1 = \mathrm{QC} \cap \mathrm{QX}$.

Доказательство теоремы. Пусть $f \in$ VMO, тогда $f - \mathcal{A}f = cu$, где c — константа и u — унимодулярная функция, причем $\operatorname{dist}(u, H^\infty) = 1$ [12, 5]. Пусть $f \in$ VMOX и $c \neq 0$, тогда $P_-u = c^{-1}P_-f \in P_-X$, поэтому $u \in X$. Так как $u \in H^\infty + C$, то $\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}(u, \overline{z}^n H^\infty) = 0$, поэтому для некоторого $n \geqslant 1$ имеем $\operatorname{dist}(uz^n, H^\infty) < 1$, $\operatorname{dist}(uz^{n-1}, H^\infty) = 1$. Теперь к функции $uz^n \in X$ применима лемма 5.4, поэтому

$\overline{u} = \overline{uz^n}z^n \in X$ и $\mathcal{A}f = f - cu \in \mathrm{VMOX}$. Действие оператора $\mathcal{A}$ в пространстве QX следует из доказанного и леммы 5.3. •

Следствие 5.9. *Оператор $\mathcal{A}$ действует в следующих пространствах:*

1. $\mathrm{VMO} \cap B^s_{pq}, s > 0,\ 1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ *или* $0 < p = q < 1, s > \frac{1}{p} - 1$. *Случай* $s > \frac{1}{p}, p \geqslant 1$ *и* $p = q \geqslant 1,\ s = \frac{1}{p}$ *разобран в* [12].

2. $\mathrm{VMO} \cap F^s_{pq},\ s = 0, 1 < p, q < \infty$. *Случай* $s > \frac{1}{p}, q = 2$ *разобран в* [12]. *При* $s = \frac{1}{p}$, $q = 2$ *это ответ на вопрос из той же работы.*

3. $\mathrm{BMO}(\rho)$, *где верхний порядок* $q_\rho < 1$. *Случай* $q_\rho < \frac{1}{2}$ *доказан в* [14].

Последний результат может быть использован для нового доказательства следующей *теоремы Карлесона–Якобса: если $f \in C(\mathbb{T})$ и для модуля непрерывности ω_f выполнено условие Дини $\int_0^1 \omega_f(t)dt/t < \infty$, то $\mathcal{A}(f) \in C(\mathbb{T})$.*

Для доказательства положим $\rho(t) := \sup_{s \geqslant t}(\omega_f(s)(\frac{t}{s})^{\frac{1}{4}})$, тогда $\omega_f \leqslant \rho$ и $q_\rho \leqslant 1/4$, поэтому $\mathcal{A}(f) \in \mathrm{BMO}(\rho)$. Разбивая интервал $[0,1]$ на открытое множество $\{\rho(t) \neq \omega_f(t)\}$ и его дополнение, легко увидеть, что $\int_0^1 \rho(t)dt/t \leqslant \int_0^1 \omega_f(t)dt/t + 4\omega_f(1) < \infty$, и поэтому $\mathrm{B}MO(\rho) \subset C(\mathbb{T})$ [18].

Теорема 5.10. *Пусть X — $\widetilde{GD}$-алгебра, $X \subset H^\infty + C$. Тогда унимодулярная функция u принадлежит алгебре QX в том и только том случае, если $u = z^n e^{i\varphi}$, $n \in \mathbb{Z}$,* $\varphi = \overline{\varphi} \in \mathrm{VMOX}$.

Эта теорема обобщает теорему Сарасона [28], разобравшего случай $X = H^\infty + C$. Для ее доказательства можно применить подход из § 3, 5 работы [12]: для каждой $\widetilde{GD}$-алгебры X пространство $\mathrm{V}MOX \cap \mathrm{V}MO$ удовлетворяет приведенным там аксиомам, достаточным для доказательства аналога теоремы Сарасона. Также аналогично работе [12] на многие GD-алгебры могут быть распространены теорема восстановления в пространстве мер (двойственное утверждение к теореме Феффермана–Стейна) и описание подмножеств окружности $\mathbb{T}$, где возможна свободная интерполяция аналитическими функциями данного класса.

§ 6. Максимальные идеалы GD-алгебр

Пусть X — подалгебра алгебры L^∞, удовлетворяющая аксиоме GD из § 1, но не обязательно содержащая H^∞. Тогда в топологии, задаваемой L^∞-нормой, X становится топологической алгеброй с открытым множеством обратимых элементов. Такие алгебры в монографии [29] названы алгебрами Вальбрука. Для них оказываются верны основные факты теории максимальных идеалов Гельфанда.

Обозначения. 1. Если $Y \subset L^\infty$, то $Y_\infty = \mathrm{clos}_{L^\infty} Y$ — равномерное замыкание Y.

2. Если X — алгебра, то M_X — ее пространство максимальных идеалов.

3. Если X — GD-алгебра, то IX — множество всех внутренних функций, обратимых в X.

Теорема 6.1. *Пусть X — подалгебра L^∞, для которой выполнена аксиома GD (определение дано в первом параграфе). Тогда*

1. *Если m — мультипликативный линейный функционал на X, то* $|m(f)| \leqslant \|f\|_\infty \quad \forall f \in X$.

2. *Если M — максимальный идеал алгебры X, то найдется единственный мультипликативный линейный функционал m на X такой, что* $\mathrm{Ker(m)} = M$.

3. *M_X можно отождествить с подмножеством в $(X_\infty)^*$ и $M_X = M_{X_\infty}$. Если $f \in X$ и $m(f) \neq 0$ $\forall m \in M_X$, то $f^{-1} \in X$.*

4. *Если X —GD-алгебра, то $M_X \subset M_{H^\infty}$. Среди всех GD-алгебр Y, для которых $M_X = M_Y$, есть максимальная, это — алгебра Дугласа X_∞, и минимальная $X_{\min} := \overline{IX} \cdot H^\infty$.*

Доказательство. 1. Пусть найдется функция f, $f \in X$, для которой $|m(f)| > \|f\|_\infty$. Тогда $m(1) = m(f)/m(f) = 1$ и из аксиомы (GD) следует, что $g := (m(f) - f)^{-1} \in X$. Поэтому $m(1) = m(g) \cdot m(m(f) - f) = 0$ — противоречие.

2. Пусть M — максимальный идеал алгебры X. Тогда достаточно проверить, что X/M — одномерное пространство. Если $g \in M$, то функция g необратима в X, поэтому $\|1-g\|_\infty \geqslant 1$, $1 \notin M_\infty$ и M_∞ — собственный идеал банаховой алгебры X_∞. Пусть M_1 — максимальный идеал X_∞, содержащий M_∞, тогда $1 \in M_1 \cap X$, $M_1 \cap X$ — собственный идеал X_∞, содержащий M, поэтому $M_1 \cap X = M$. Профакторизовав вложение $X \to X_\infty$, получим отображение $X/M \to X_\infty/M_1$, которое инъективно. Из теории максимальных идеалов в банаховых алгебрах следует, что фактор-пространство X_∞/M_1 одномерно, поэтому фактор-пространство X/M также одномерно.

Третья часть теоремы следует из уже доказанного.

4. Так как алгебра Дугласа однозначно определяется своим пространством максимальных идеалов [5], то алгебра X_∞ — максимальна в рассматриваемом семействе. Если теперь $M_X = M_Y$, то $IX = IY$ и $\overline{I} \in Y$ — для всех $I \in IX$, поэтому $Y \supset X_{\min}$. Проверим, что $X_{\min}$ — GD-алгебра. Пусть $f \in H^\infty$, $I \in IX$ и $\lambda > \|f\|_\infty$, тогда $\lambda I - f = gJ$, где $g, g^{-1} \in H^\infty$ и J — внутренняя функция, причем $|m(J)| \geqslant (\lambda - |m(f)|)|m(g^{-1})| > 0$ для m из M_X, поэтому $J \in IX$ и $(\lambda - \overline{I}f)^{-1} = Ig^{-1}\overline{J} \in X_{\min}$. •

Следствие 6.2. *Если X — GD-алгебра, то*

$$M_{QX} = M_{(QX)_\infty}, \quad M_{QX_A} = M_{(QX_A)_\infty}.$$

Следствие 6.3. *Если X — GD-алгебра, $X \neq H^\infty$, то $\overline{z} \in X$.*

Действительно, тогда $M_X = M_{X_\infty} \subset M_{H^\infty + C}$ и функция z обратима в X.

Теорема 6.4. *Пусть $X = \{f \in L^\infty : P_- f \in B^s_{pq}\}, s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$. Опишем алгебру Дугласа X_∞:*

1. *При $sp > 1$ или $sp = 1$, $q < \infty : X_\infty = H^\infty + C$.*

2. *При $sp = 1$, $q = \infty : X_\infty = \operatorname{clos}_{L^\infty}\{\overline{B}f : f \in H^\infty, B$ — произведение Бляшке с нулями $(z_n)_{n=1}^\infty$, удовлетворяющими условию Ньюмена: $\sup_n (1 - |z_{n+1}|)/(1 - z_n) < 1\}$.*

3. *При $sp < 1 : X_\infty = \operatorname{clos}_{L^\infty}\{\overline{B}f : f \in H^\infty, B$ — интерполяционное произведение Бляшке с нулями $(z_n)_{n=1}^\infty$ такими, что*

$$1 - |z_n| \downarrow 0, \quad (1 - |z_n|)^{1/p - s} \cdot n^{1/p - 1/q} \in l^q\}.$$

Доказательство следует из равенства $IX = I(X_\infty)$ и описания интерполяционных произведений Бляшке в пространствах B^s_{pq}, полученного в работе [2]. •

§ 7. Теорема о короне и свойства максимальных идеалов в некоторых аналитических алгебрах

В настоящем параграфе мы изучим алгебры аналитических функций вида $\overline{X} \cap H^\infty$, где X — GD-алгебра. В случае, если X допускает описание через псевдопродолжения так, как это изложено в § 2–4, можно дать априорную оценку решения задачи о короне и указать достаточные условия принадлежности конечнопорожденному идеалу. Для GD-алгебр общего вида будет описано равномерное замыкание таких алгебр и доказана разрешимость задачи о короне без оценок.

Также будут изучены доли Глисона пространства максимальных идеалов этих алгебр.

Введем некоторые определения. Пусть Y — подалгебра (незамкнутая) H^∞. Если для произвольного конечного набора функций $f_1, \dots, f_n \in Y$, удовлетворяющего условию

$$(\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|^2)^{1/2} \geqslant \delta > 0,\ z \in \mathbb{D}, \tag{7.1}$$

найдется набор функций $g_1, \dots, g_n \in Y$, для которого

$$\sum_{i=1}^{n} f_i g_i = 1, \tag{7.2}$$

то будем говорить, что задача о короне разрешима в алгебре Y. В алгебре H^∞ задача о короне обычно решается с помощью решения $\bar\partial$-уравнений [5]. Если GD-алгебра описывается с помощью псевдопродолжений, то применим аналогичный метод, причем даже к более общей задаче.

Теорема 7.1. *Пусть X — GD-алгебра из следствия 2.4 (т.е. „гладкости меньше единицы“), $Y = QX_A = H^\infty \cap \overline{X}$, $f_1, \dots, f_n, h \in Y$ и $(\sum_{i=1}^{n} |f_i(z)|^2)^{1/2} \geqslant |h(z)|, z \in \mathbb{D}$. Тогда найдутся функции $g_1, \dots, g_n \in Y$, для которых выполнено $h^3 = \sum_{i=1}^{n} f_i g_i$.*

Доказательство. Функции g_i будем искать в виде $g_i = \varphi_i + \sum_{j=1}^{n} v_{ij} f_j$, где $\varphi_i = \bar f_i h^3 / (\sum_{j=1}^{n} |f_j|^2)$, $\bar\partial v_{ij} = h^3 \overline{f_i' f_j - f_i f_j'} (\sum |f_k|^2)^{-2}$. Тогда из решения обобщенной задачи о короне для H^∞ следует, что $P_+(v_{ij}) \in \mathrm{BMO}$[5,13]. С другой стороны, $\bar\partial v_{ij} \in E$, поэтому $P_+ v_{ij} \in \mathrm{BMO} \cap E_A^{(1)} = P_+(\overline{X})$ по формуле (2.5). Применяя лемму 5.6 получаем, что решение $\overline{\partial}$ — уравнения v_{ij} можно выбрать из $X \cap \overline{X}$ (фактически, мы применили теорему об аналоге декомпозиции Фeффермана–Стейна для GD-алгебры X). Аналогично проверяется, что $\overline{\partial}\varphi_i, \partial\varphi_i \in E$, тогда $P_+\varphi_i, P_+\overline{\varphi}_i \in P_+(\overline{X})$, поэтому $\varphi_i \in X \cap \overline{X}$ и $g_i \in \overline{X} \cap H^\infty = Y$. Отметим, что если E было банаховым пространством и $\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_Y^2 \leqslant 1$, $\|h\|_Y \leqslant 1$, то функции g_i можно выбрать таким образом, что $(\sum_{i=1}^{n} \|g_i\|_Y^2)^{1/2} \leqslant c n^{\frac12}$, где C зависит только от X. •

Так же решается задача о короне и для GD-алгебр, построенных в § 3 и 4. В несколько более частной ситуации эти выкладки проводились подробно в работе автора [13].

Перейдем к решению задачи о короне для общей GD-алгебры X. Сначала изучим свойства равномерного замыкания алгебры QX_A.

Теорема 7.2. *Пусть X — GD-алгебра, $D := X_\infty$ — порожденная ею алгебра Дугласа, CD-алгебра Сарасона, т.е. замкнутая симметричная подалгебра L^∞, порожденная $ID = IX$. Тогда*

1.$(\mathrm{QX}_{\min})_\infty = \mathrm{C}D$,$(QX_{\min A})_\infty = \mathrm{CD_A}$. *Напомним, что* $X_{\min} = \overline{IX}\cdot H^\infty$.
2. $(\mathrm{QX})_\infty = (\overline{IX}\cdot \mathrm{Q}X_A)_\infty$.
3. $(\mathrm{QX})_\infty = (\mathrm{QX})_{A\infty} + CD$.
4. $(\mathrm{QX})_{\infty A} = (\mathrm{QX})_{A\infty}$.

Доказательство. 1. Если $f\in QX_{\min}$, то найдутся функции I,$J\in IX$, для которых $I\cdot f$, $J\cdot\bar f\in H^\infty$. Если еще $\|f\|_\infty<1$, то интеграл

$$I\cdot f = \int\limits_{\mathbb{T}} I(f+e^{it}J)/(1+e^{it}\bar fJ)\,dm_1(t)$$

представляет функцию $I\cdot f$ как равномерный предел выпуклых комбинаций внутренних функций из IX (прием Бернара [5]). Тогда $f\in\bar I\cdot CD_A\subset CD$. Обратные включения следуют из $IX\subset(QX_{\min})_A$.

2. Если $f\in QX\subset D$, то для каждого $\varepsilon>0$ найдутся $I\in IX$ и $g\in H^\infty$ такие, что $\|f-\bar Ig\|_\infty<\varepsilon$, тогда $\mathrm{dist}(If,H^\infty)<\varepsilon$. Применим лемму 5.5, тогда найдется унимодулярная функция $u\in QX$ и функция $h\in H^\infty$, для которых $If-\varepsilon u=h$, тогда $h\in QX_A$ и $\mathrm{dist}(If,QX_A)\leqslant\varepsilon$.

3. Так как из $f\in CD$ следует, что $\mathrm{dist}(f,H^\infty)=\mathrm{dist}(f,CD_A)$ (лемма Чанг [5]) и $QX_{A\infty}\supset QX_{\min A\infty}=CD_A$, то пространство $QX_{A\infty}+CD$ замкнуто, и достаточно проверить, что QX содержится в нем.

В силу 2 теоремы можно ограничиться функциями вида $\overline{B}g$, где $B\in IX$,$g\in QX_A$. Предположим, что $\|g\|_\infty<1$ и снова применим лемму 5.5, тогда $\overline{B}g=h+u$, где $u\in QX$ — унимодулярная функция, $h\in H^\infty\cap QX=QX_A$. Тогда $Bu\in H^\infty$, поэтому $u\in\overline{B}\cdot IX\subset CD$.

4. Это равенство следует из 3 и 1. •

Следствие 7.3. *Если X — GD-алгебра и $D:=X_\infty$, то алгебра $QX_{A\infty}$ совпадает с аналитической частью алгебры B, обладающей следующими свойствами:*

$$B=\overline{B},\quad B=\mathrm{clos}_{L^\infty}B,\quad CD\subset B\subset QD. \tag{7.3}$$

Действительно, из п.1 и 4 теоремы следует, что можно взять $B=(QX)_\infty$.

Теорема 7.4. *Пусть D — алгебра Дугласа и алгебра B удовлетворяет условию* (7.3). *Тогда*

1. *Алгебра B_A логарифмична на пространстве M_B:*

$$\mathrm{Re}B=(\log|B_A^{-1}|)_\infty.$$

2. $M_B=\{m\in M_{B_A}:|m(I)|=1,\,I\in ID\}$.
3. *Граница Шилова алгебры B_A совпадает с M_B.*
4. *Если $\pi: M_{H^\infty}\to M_{B_A}$ — каноническое отображение, индуцированное вложением $B_A\hookrightarrow H^\infty$, то π — сюрьекция, $\pi(M_D)=M_B$ и π — гомеоморфизм $M_{H^\infty}\backslash M_D$ на $M_{B_A}\backslash M_B$ относительно $*$-слабых топологий и изометрия относительно нормированных топологий в $(H^\infty)^*$ и в $(B_A)^*$.*

Лемма 7.5. 1. $B=B_A+CD$.
2. $B=(\bar ID\cdot B_A)_\infty$.
3. *Если $J\in ID$, $f\in H^\infty$,$\varepsilon>0$, то $f=f_1+Jh$, где $f_1\in CD_A$, $h\in H^\infty$,* $\|f_1\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty(1+\varepsilon)$.

Доказательство леммы. Если $f\in B\subset D$, то по теореме Чанг [5] найдутся функции $g\in CD$ и $h\in H^\infty$, для которых $f=g+h$, тогда $h\in B_A$. Второе равенство следует из первого. Для доказательства третьего применим ту же теорему Чанг к функции $\overline{J}f : \overline{J}f = g+h$, причем функцию $g \in CD$ можно выбрать так, что $\|g\|_\infty \leqslant \operatorname{dist}(g, CD_A)(1+\varepsilon)$. Осталось заметить, что $\operatorname{dist}(g, CD_A) = \operatorname{dist}(g, H^\infty) \leqslant \|f\|_\infty$ и что $f_1 : Jg \in CD_A$. •

Доказательство теоремы. Стандартным образом п.1 и 2 следуют из утверждения 2 леммы, п.3 — из п.2. Подробно эти результаты для типичного случая $B = CD$ доказаны в [17]. Равенство $\pi(M_{L^\infty}) = M_B$ следует из теоремы Наймарка [30]: любой элемент границы Шилова замкнутой подалгебры продолжается до элемента границы Шилова всей алгебры, включение $\pi(M_D) \subset M_B$ следует из п.2 теоремы. Если $m \in M_{B_A} \setminus M_B$, то найдется функция $I \in ID$, для которой $|m(I)| < 1$. Пусть $J := (I - m(I))/(1 - m(I)I)$, тогда $J \in ID, m(J) = 0$ и из третьего утверждения леммы следует единственность продолжения m до элемента M_{H^∞}. Поэтому отображение $\pi|_{M_{H^\infty} \setminus M_D}$ инъективно. Проверим его изометричность. Если m_1, m_2 — два элемента из $M_{H^\infty} \setminus M_D$ и $Y_1Y_2 \in ID$, $m_1(Y_1) = m_2(Y_2) = 0$, то применимо третье утерждение леммы к функции $Y := Y_1Y_2$, тогда $|(m_1 - m_2)(f)| = |(m_1 - m_2)(f_1)| \leqslant \|m_1 - m_2\|_{(B_A)^*} \|f\|_\infty (1+\varepsilon)$, $\quad f \in H^\infty$. •

Следствие 7.6. *Если алгебра B удовлетворяет условию 7.3, то в B_A разрешима задача о короне.*

Легко проверяется, что утверждение следствия эквивалентно сюръективности отображения π.

Следствие 7.7. *Если X — GD-алгебра, то разрешима задача о короне в алгебре $QX_A = H^\infty \cap \overline{X}$.*

Действительно, из теоремы 6.1 следует равенство $M_{QX_A} = M_{(QX_A)_\infty}$.
Осталось применить следствия 7.3 и 7.6.

Следствие 7.8. *Задача о короне разрешима в алгебрах $H^\infty \cap B^s_{pq}, s > 0, 1 \leqslant p,q \leqslant \infty$ или $0 < p = q < 1, s > \frac{1}{p} - 1$, и в алгебрах $H^\infty \cap F^s_{pq}, s > 0, 1 < p,q < \infty$.*

Следствие 7.9. *Доли Глисона алгебры B_A полностью определяются заданием алгебры Дугласа D.*

Напомним, что два идеала $m_1, m_2 \in M_{B_A}$ лежат в одной доле Глисона, если $\|m_1 - m_2\| < 2$.

Следствие 7.10. *Если все идеалы из M_{H^∞}, доли Глисона которых состоят из одного элемента, лежат в M_D, то все идеалы из M_{B_A} с одноточечной долей Глисона принадлежат границе Шилова алгебры B_A.*

Можно показать, что следствие 7.10 применимо к алгебрам Дугласа D, порожденным над H^∞ любым семейством произведений Бляшке B с условием $\lim\limits_{n\to\infty} |B'(z_n)|(1 - |z_n|^2) = 1$, где z_n — нули B.

Замечание 7.11. Ранее свойства алгебр B, удовлетворяющих (7.3), изучались в заметке [3].

Замечание 7.12. Теорема о короне в алгебре B_1 была доказана для случая $B = CD$ в работе [17] и для случая $B = QD$ в [26].

В случае алгебр B общего вида, теорема о короне была доказана в работе автора [13] методом, близким к доказательству теоремы 7.1. Там же был доказан частный случай следствия 7.8, когда $1 \leqslant p = q = s^{-1} < \infty$. Вопрос о справедливости теоремы о короне в алгебрах ограниченных аналитических функций с конечным интегралом Дирихле $H^\infty \cap B_2^{1/2}$ задавался в работах [16,22].

§ 8. Описание операторов Теплица, действующих в пространствах гладких функций

На протяжении всего параграфа символом Y будет обозначаться или пространство B^s_{pqA}, $s > 0$, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ или F^s_{pqA}, $s > 0$, $1 < p, q < \infty$ или $\mathrm{BMO}(\rho)_A$, $q_\rho < 1$. Мы дадим описание символов операторов Тёплица, действующих в Y. Окажется, что это алгебра, описываемая через псевдопродолжения, и комплексно сопряженное пространство является $\widetilde{\mathrm{GD}}$-алгеброй.

Мы применим эти результаты к изучению свойств мультипликаторов. Например, при $0 < s < 1$ функция является мультипликатором пространства $Y + \overline{Y}$, если она ограниченна и на ее градиент наложены некоторые естественные ограничения. Для случая пространств Соболева $W^s_p = F^s_{p2}$ это отмечено, например, в [10]. В теореме 8.5 показано, что аналитическая функция лежит в пространстве $P_+M(Y + \overline{Y})$ тогда и только тогда, когда ее производная удовлетворяет этому же ограничению. Этот результат аналогичен известному описанию пространства $P_+L^\infty = \mathrm{BMO_A}$ через меры Карлесона.

Введем некоторые определения. Если $f \in \mathcal{A}^*$, то действие оператора Тёплица с символом $h \in \mathcal{H}$ на f определим так: $T_h f := P_+(hf)$, произведение задается как свертка коэффициентов Фурье. Символом $\mathrm{ST}(Y)$ обозначим множество тех h, для которых оператор Тёплица продолжается по непрерывности до оператора из Y_c в Y. Оператор Ганкеля с символом $\varphi \in \mathcal{A}$ определим так: $\Gamma_\varphi f := P_-(\varphi(z)f(\bar z))$, $\mathrm{SH}(Y)$ — пространство символов операторов Ганкеля, допускающих продолжение до оператора из Y_c в Y. Через $M(Y)$ и $M(Y + \overline{Y})$ будем обозначать пространства мультипликаторов.

Теорема 8.1. 1. $M(Y + \overline{Y}) = \mathrm{ST}(Y) \cap \overline{\mathrm{ST(Y)}}$.

2. $\mathrm{ST}(Y) = \overline{H}^\infty + M(Y + \overline{Y})$; $\overline{\mathrm{ST(Y)}} - \widetilde{\mathrm{GD}}$*-алгебра.*

Лемма 8.2. *Пространство* $\mathrm{ST}(Y)$ *допускает описание через псевдопродолжения. Точнее;*

1. *Если* $0 < s < 1$ *и* Y *представлено в виде* (2.1), *где* $E = E^{s-1}_{pq}$ *или* G^{s-1}_{pq}, *то* $\mathrm{ST}(Y) = \{f \in L^\infty$:

$$(P_+f)' \in M(Y, Y^{(-1)})\} = \{f \in L^1 : \exists F_f \in L^\infty(\mathbb{D});\ \bar\partial F_f \in M(Y, E)\}.$$

2. *Если* $Y = B^1_{1qA}$, *то* $\mathrm{ST}(Y) = \{f \in L^\infty : (P_+f)'' \in M(Y, Y^{(-2)})\} = \{f \in L^1 : \exists F_f \in L^\infty(\mathbb{D}),\ \ \partial F_f \in E^{-\frac{1}{2}}_{2,2q},\ \partial^2 F_f \in M(Y, E^{-1}_{1q})\}$.

3. *При* $s > 1$ *или* $s = 1, p > 1$ $\quad Y$ *— алгебра и* $\mathrm{ST}(Y) = \overline{H}^\infty + Y$.

4. *Если* $Y = \mathrm{BMO}(\rho)_A$, $\quad q_\rho < 1$, *то* $\mathrm{ST}(Y) = \{f \in L^\infty : (P_+f)' \in M(Y, Y^{-1})\} = \{f \in L^1 : \exists F_f \in L^\infty(\mathbb{D}), \partial F_f \in M(Y, E^2_\rho), \bar\partial F_f \in E^2_1, \Delta F_f \in M(Y, E^1_\rho)\}$.

Доказательство леммы. В работах [14,20] показано, что для рассматриваемых пространств $\mathrm{ST}(Y) \subset L^\infty$. Пусть $0 < s < 1$, тогда для $f \in L^\infty \|f\|_{\mathrm{ST}(Y)} = \sup\{\|P_+(fg)\|_Y : g \in \mathcal{A}^*, \|g\|_Y \leqslant 1\} = \sup\{|\int_{\mathbb{T}} fg\bar h\, dm_1| : g, h \in \mathcal{A}^*, \|g\|_Y = \|h\|_{(Y_c)^*} = 1\}$, так как у нас $Y = (((Y_c)^*_c)^*$ более общие равенства такого рода доказаны в [13]).

Так как

$$\int_{\mathbb{T}} f g\bar{h}\, dm_1 = \int_{\mathbb{D}} \partial(\mathcal{H}_f g\bar{h}z)\, dm_2 = \int_{\mathbb{D}} (\mathcal{H}_f(zg)' + \partial\mathcal{H}_f zg)\bar{h}\, dm_2, \tag{8.1}$$

то $f \in \mathrm{ST}(Y)$ тогда и только тогда, когда $f \in L^\infty$ и аналитическая функция $a := \partial(\mathcal{H}_f)g$ задает непрерывный антилинейный функционал на пространстве $(Yc)^*$ по формуле $h \to \int_{\mathbb{D}} za\bar{h}dm_2 = \int_{\mathbb{T}} a^{(-1)}\bar{h}\, dm_1$, тогда $a^{(-1)} \in Y$. Поэтому $\mathrm{ST}(Y) = \{f \in L^\infty : (P_+f)' = \partial\mathcal{H}_f \in M(Y, Y^{(-1)})\}$. Наоборот, если функция $f \in L^1$ обладает таким псевдопродолжением F_f, что $F_f \in L^\infty(\mathbb{D})$ и $\partial F_f \in M(Y, E)$, то из формулы, аналогичной (8.1), следует, что $f \in \mathrm{ST}(Y)$.

2. Пусть теперь $Y \in B^1_{1qA}$, $f \in L^1, g, h \in \mathcal{A}^*$, тогда

$$\int_{\mathbb{T}} f g\bar{h}\bar{z}^2\, dm_1 = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} \partial^2(\mathcal{H}_f \cdot g\bar{h})(1-|z|^2)\, dm_2 =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{D}} (\mathcal{H}_f g''\bar{h} + 2\partial\mathcal{H}_f g'\bar{h} + \partial^2\mathcal{H}_f g\bar{h})(1-|z|^2)\, dm_2.s$$

Функция f принадлежит $\mathrm{ST}(B^1_{1qA})$ тогда и только тогда, когда конечен супремум модуля правой части этого равенства по всем g, h : $\|g\|_{B^1_{1qA}} \leqslant 1$, $\|h\|_{B^{-1}_{\infty q'A}} \leqslant 1$. Если $f \in \mathrm{ST}(Y)$, то $f \in L^\infty$ и $\partial(\mathcal{H}_f) = (T_f 1)' \in B^0_{1q}$. Из неравенства Гёльдера и включения $B^{-1/2}_{2,2q} \supset B^0_{1q}$ [1] теперь следует, что

$$\int_{\mathbb{D}} |\partial\mathcal{H}_f||g'||h|(1-|z|^2)\, dm_2 \leqslant$$

$$\leqslant c\|\partial\mathcal{H}_f \cdot g'\|_{B^{-1}_{1q}} \leqslant c\|\partial\mathcal{H}_f\|_{B^{-1/2}_{2q}}\|g'\|_{B^{-1/2}_{2q}} \leqslant c\|f\|_{ST(Y)}.$$

Теперь доказательство заканчивается так же, как и в первом пункте.

3. Случай, когда Y — алгебра, разобран, например, в [14,15]: если $f \in \mathrm{ST}(Y)$, то $P_+f = T_f 1 \in Y \subset \mathrm{ST}(Y)$ и $f \in \overline{H^\infty} + Y$.

4. В случае $Y = \mathrm{BMO}(\rho)_A$ воспользуемся формулой

$$\int_{\mathbb{T}} f g\bar{h}\, dm_1 = \int_{\mathbb{D}} \Delta(\mathcal{H}_f \cdot gh)\log\frac{1}{|z|}\, dm_2 = 4\int_{\mathbb{D}} (\mathcal{H}_f g'\bar{h}' +$$

$$+\partial\mathcal{H}_f g\bar{h}' + \bar{\partial}\mathcal{H}_f g'\bar{h})\log\frac{1}{|z|}\, dm_2, \quad f \in L^1, g, h \in \mathcal{A}^*. \tag{8.2}$$

Если $f \in \mathrm{ST}(Y)$, то $f \in L^\infty$ и $\bar{\partial}(\mathcal{H}_f) = (P_-f)' \in E^2_1$, тогда из определения пространств E^p_ρ следует, что $\bar{\partial}\mathcal{H}_f \cdot g' \in E^1_\rho$, а из формулы (4.2) — ограниченность третьего слагаемого. Дальше те же рассуждения, что и в п.1, только при рассмотрении псевдопродолжения F_f вместо $\mathcal{H}_f$ надо учесть появление в формуле (8.2) дополнительного слагаемого $\int_{\mathbb{D}} \Delta F_f g\bar{h}\log\frac{1}{|z|}\, dm_2$. •

Доказательство теоремы. Мы разберем только случай $0 < s < 1$, остальные доказываются аналогично. Из леммы 8.2 следует, что если $f \in \mathrm{ST}(Y) \cap \overline{\mathrm{ST}}(Y)$, то $f \in L^\infty$, $\partial\mathcal{H}_f, \bar{\partial}\mathcal{H}_f \in M(Y, E)$. Если еще $g \in Y + \bar{Y}$, то $\mathcal{H}_f \cdot \mathcal{H}_g$ — псевдопродолжение функции $f \cdot g$ и из полученного во втором параграфе описания пространства Y следует, что $fg \in Y + \overline{Y}$, поэтому п.1 доказан. Справедливость аксиомы $\widehat{(\mathrm{GD})}$

доказывается применением леммы 8.2 и следствия 2.4. Доказательство теоремы заканчивается применением леммы 5.6. •

Следствие 8.3. *Оператор $\mathcal{A}$ действует в пространствах $M(Y+\overline{Y})\cap \mathrm{VMO}$. В алгебре $M(Y)$ справедлива теорема о короне с оценками решения.* •

Следствие 8.4. $\mathrm{ST}(BMO(\rho)_A) = \{f \in L^\infty : P_+f \in \mathrm{BMO}(\rho_1)\}$, *где* $\rho_1(t) := \rho(t)/\int_t^1 \rho(s)s^{-1}\,ds$ *и* $q_\rho < 1$.

Доказательство. Обозначим пространство справа через G, тогда это — GD-алгебра (теорема 4.2) и $G = H^\infty + L^\infty \cap \mathrm{BMO}(\rho_1)$ (лемма 5.6). Осталось применить теорему из [18]: $M(\mathrm{BMO}(\rho)) = L^\infty \cap \mathrm{BMO}(\rho_1)$. •

Теорема 8.5. *Для рассматриваемых пространств при $0 < s < 1$ справедлива формула*

$$P_+\mathrm{ST}(Y) = P_+M(Y+\overline{Y}) = M(Y, Y^{(-1)})^{(1)}, \tag{8.3}$$

для пространств $Y = B^1_{1qA}, 1 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$P_+\mathrm{ST}(Y) = P_+M(Y+\overline{Y}) = M(Y, Y^{(-2)})^{(2)}.$$

Лемма 8.6. *Пусть W — $\mathcal{A}$-пространство (определение дано во втором параграфе), $W = W_c$ и $JW \subset W$, где $Jf(z) := \overline{f(\bar z)}$. Тогда*

$$\mathrm{SH}(W) \subset \mathrm{BMOA}.$$

Доказательство. Если $\varphi \in \mathrm{SH}(W)$, то Γ_φ — ограниченный оператор в W, и $\Gamma^*_\varphi = \Gamma_{J\varphi}$ — ограничен в W^*. Тогда и $\Gamma_\varphi = J\Gamma^*_\varphi J$ действует в $\mathcal{A}$-пространство W^*. Пространство $X := W \cap W^*$ плотно вложено в гильбертово пространство H^2, и оператор Γ_φ действует в X и тогда по теореме Нието [21] оператор Γ_φ ограничен в H^2, поэтому $\varphi \in \mathrm{BMOA}$. •

Доказательство теоремы. Мы разберем только случай $Y = B^s_{pq}, 0 < s < 1$.

Пусть $\varphi \in V := M(Y, Y^{(-1)})^{(1)}$, тогда из неравенства

$$\Big|\int_{\mathbb{T}} \bar g(z)\varphi(z)f(\bar z)\,dm_1\Big| = \Big|\int_{\mathbb{D}} \bar g(z)(z\varphi(z))'f(\bar z)\,dm_2\Big| \leqslant$$
$$\leqslant c\|\varphi\|_V\|f\|_Y\|g\|_{B^{-s}_{p'q'}},$$

где $f, g \in \mathcal{A}^*$, следует, что $\varphi \in \mathrm{SH}(Y)$, а при $Y = Y_c$ из леммы 8.6 получаем, что $\varphi \in \mathrm{BMOA}$. Если же $Y \neq Y_c$, то из инвариантности Y относительно поворотов окружности $\mathbb{T}$ следует, что при $0 < r < 1$ функция $\varphi_r(z) := \varphi(rz)$ принадлежит $\mathcal{A}^*$ и $\|\varphi_r\|_V \leqslant \|\varphi\|_V$, поэтому из леммы 8.6, примененной к пространству Y_c, следует, что $\|\varphi_r\|_{BMO} \leqslant c\|\varphi_r\|_{SH(\varphi_c)} \leqslant c\|\varphi_r\|_V \leqslant c$, и $\varphi \in \mathrm{BMOA}$. Теперь из леммы 8.2 и теоремы 8.1 следует, что

$$P_+\mathrm{ST}(Y) = P_+M(Y+\overline{Y}) = \mathrm{BMOA} \cap M(Y, Y^{(-1)})^{(1)} = M(Y, Y^{(-1)})^{(1)}. \quad \bullet$$

Замечание 8.7. Условие принадлежности функции пространству $M(Y, Y^{(-1)})$ можно переформулировать в терминах емкости, связанной с пространством Y. Для случая пространств Бесова B^s_p или Соболева W^s_p это сделано, например, в [10].

8.8. Примеры других пространств, для которых справедливы теоремы 8.1 и 8.5, можно получить с помощью работы [9]. Приведем без доказательства один результат.

Теорема 8.9. *Если числа a_n положительны, $a_n n^{-k} \downarrow 0, a_n^{-1} n^{\alpha} \downarrow 0$, где $0 < \alpha < k < 1$, то для пространства $Y := \{f \in \mathcal{A} : \sum\limits_{n=0}^{\infty} |\hat{f}(n)|^2 a_n^2 < \infty\}$ справедливы теорема* 8.1 *и формула* 8.3. •

Вопрос о справедливости теоремы о короне в алгебрах мультипликаторов пространств такого типа задавался в работах [16,23]. Ранее некоторые результаты в этом направлении были получены автором в [13].

§ 9. Описание операторов Ганкеля, действующих в B_p^s, $s > 0$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$

Для пространств Харди $H^p, 1 < p < \infty$, хорошо известно, что $\mathrm{SH}(H^p) = \mathrm{BMOA} = P_+(L^\infty) = P_+(M(L^p))$. Мы распространим этот результат на некоторые пространства Бесова.

Теорема 9.1. *Если $s > 0$ и $1 \leqslant p \leqslant \infty$, то* $\mathrm{SH}(B_{pA}^s) = P_+ M(B_p^s)$.

Так как при $s \geqslant 1$ пространство B_p^s — алгебра, то в этом случае достаточно проверить лемму:

Лемма 9.2. *Если Y — $\mathcal{A}$-пространство, $Y + \overline{Y}$ — алгебра и $JY \subset Y$, то* $\mathrm{SH}(Y) = Y$.

Действительно, если $\varphi \in \mathrm{SH}(Y)$, то $\varphi = \Gamma_\varphi 1 \in Y$. Наоборот, для $\varphi, f \in Y$ функция $\varphi(z) f(\overline{z}) = (\varphi \cdot Jf)(z) \in Y + \overline{Y}$. •

Лемма 9.3. *При $0 < s < 1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $K(g)(z) := \int_{\mathbb{D}} |g(z) - g(w)||1 - z\overline{w}|^{-3} dw_2(w)$ — непрерывный субаддитивный оператор из B_{pA}^s в E_p^{s-1}.*

Доказательство леммы. Если $g \in B_{1A}^s$, $\alpha := \frac{1-s}{2}$, то [11] найдутся такие функции $u_n, v_n \in A$, что

$$(g(z) - g(w))/(z - w) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z) v_n(w), \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_{B_\alpha^{-\alpha}} \leqslant c \|g\|_{B_1^{-s}}.$$

Тогда $K(g) \leqslant \sum_{n=1}^\infty |u_n| Q(|v_n|)$, где оператор Q задается так: $Qv(z) := \int_{\mathbb{D}} v(w)|1 - z\overline{w}^{-2} dm_2$. В работе [24] показано, что оператор Q действует в пространствах $E_1^{-\alpha}$ и $E_\infty^{-\alpha}$, тогда из теоремы об интерполяции следует, что он ограничен в $E_z^{-\alpha}$, поэтому оператор K ограничен при $p = 1$. При $p = \infty$

$$\|K(g)\|_{E_\infty^{s-1}} \leqslant c \|g\|_{B_\infty^s} \sup_{z \in \mathbb{D}} \int_{\mathbb{D}} |z - w|^s |1 - z\overline{w}|^{-3} (1 - |z|)^{1-s} dm_2(w) \leqslant c \|g\|_{B_{\infty A}^s}.$$

Общий случай получается интерполяцией. •

Доказательство теоремы. Пусть $0 < s < 1$, $\varphi \in \mathrm{BMOA}$, $f, g \in \mathcal{A}^*$, $g(0) = 0$, тогда $\int_{\mathbb{T}} \overline{g} \Gamma_\varphi J f dm_1 = f_{\mathbb{T}} \overline{g} \varphi \overline{f} dm_1 = 4 \int_{\mathbb{D}} (\varphi' \overline{f'} \overline{g} + \varphi' \overline{f g'}) \log \frac{1}{|z|} dm_2$. Так как $|\varphi'(z)|(1 - |z|) \leqslant c \|\varphi\|_{B_\infty^0} \leqslant c \|\varphi\|_{BMO}$, справедлива оценка

$$\int_{\mathbb{D}} |\varphi'||f'||g| \log \frac{1}{|z|} dm_2 \leqslant c \|\varphi\|_{\mathrm{BMO}} \|f\|_{B_p^s} \|g\|_{B_{p'}^{-s}}$$

и $\varphi \in \mathrm{SH}(B^s_{pA})$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\int_{\mathbb{D}} \varphi'\overline{f}\overline{g'}(1-|z|^2)dm_2\right| = \left|\int_{\mathbb{D}} R(\varphi'\overline{f})\overline{g'}(1-|z|^2)dm_2\right| \leqslant c\|f\|_{B^s_{pA}}\|g\|_{B^{-s}_{p'A}},$$

где $R(f)(z) := \int_{\mathbb{D}} f(w)(1-|w|^2)(1-z\overline{w})^{-3}dm_2$ — самосопряженный проектор в $L^2(\mathbb{D},(1-|z|^2)dm_2$, на множество коаналитических функций. Последнее неравенство эквивалентно $\|R(\varphi'\overline{f})\|_{B^{s-1}_{pA}} \leqslant c\|f\|_{B^s_{pA}}$. Из леммы следует, что $\|R(\varphi'\overline{f}) - \varphi'\overline{f}\|_{E^{s-1}_p} = \|\int_{\mathbb{D}}(\overline{f}(w)-\overline{f}(z))\varphi'(w)\cdot(1-|w|^2)(1-z\overline{w})^{-3}dm_2(w)\|_{E^{s-1}_p} \leqslant c\|\varphi\|_{B^0_\infty}\|K(f)\|_{E^{s-1}_p}$, поэтому

$$\varphi \in \mathrm{SH}(B^s_{pA}) \Leftrightarrow \varphi' \in M(B^s_{pA}, B^{s-1}_{pA}) \Leftrightarrow \varphi \in P_+M(B^s_p). \quad \bullet$$

В заключение автор хотел бы сделать несколько замечаний. Эта статья была подготовлена автором в 1986 г. За прошедшее время появилось несколько новых работ по этой тематике.

В работе [34] получено следствие 7.6 — решение задачи о короне для алгебр B_A.

В статье [31] доказано следующее n-мерное уточнение теоремы Феффермана–Стейна: если $F^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$ — n-мерное пространство Лизоркина–Трибеля, R_j, $j = 1,2,\dots,n$ — преобразования Рисса в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}_0 = I$, то

$$F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \cap \mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n) = \sum_{j=0}^{n} R_j(F^s_{pq}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)).$$

В работах [32,33] изучаются сингулярные интегральные операторы, действующие в пространствах Бесова в $\mathbb{R}^n$ и в связи с этим пространства BMO^s_{pq} — пространство символов ограниченных сингулярных операторов в $B^s_{pq}(\mathbb{R}^n)$.

Список литературы

[1] Берг Й., Лёфстрем Й., *Интерполяционные пространства*, Мир, М., 1980.

[2] Вербицкий И. Э., *Внутренние функции, пространства Бесова и мультипликаторы*, ДАН СССР **276**, вып. 1 (1984), 11–13.

[3] Вольберг А. Л., Толоконников В. А., *Несколько замечаний о мультипликаторах интегралов типа Коши и алгебрах Сарасона*, Функцион. анализ и его прил. **18**, вып. 2 (1984), 61–62.

[4] Вольберг А. Л., Толонников В. А., *Ганкелевы операторы и задачи наилучшего приближения неограниченных функций*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 141, 1985, с. 5–17.

[5] Гарнетт Дж., *Ограниченные аналитические функции*, Мир, М., 1984.

[6] Дынькин Е. М., *Псевдоаналитическое продолжение гладких функций. Равномерная шкала*, Тр. седьмой зимн. школы (Дорогобыч, 1974), М., 1974, с. 40–73.

[7] Дынькин Е. М., *Конструктивная характеристика классов С. И. Соболева и О. В. Бесова*, Тр. МИАН, т. 155, 1981, с. 41–76.

[8] Дынькин Е. М., *О классах B^s_p при $0 < p < 1$*, ДАН СССР **275**, вып. 5 (1984), 1063–1066.

[9] Калябин Г. А., *Описание функций из классов типа Бесова–Лизоркина–Трибеля*, Тр. МИАН, т. 156, 1980, с. 82–109.

[10] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд-во ЛГУ, Л., 1986.

[11] Пеллер В. В., *Описание операторов Ганкеля класса S^p при исследовании скорости рациональной аппроксимации и другие приложения*, Мат. сб. **122 (164)** (1983), 481–510.

[12] Пеллер В. В., Хрущев С. В., *Операторы Ганкеля, наилучшие приближения и стационарные гауссовские процессы*, Успехи мат. наук **37** (1982), 80–101.

[13] Толоконников В. А., *Теорема о короне в алгебрах ограниченных аналитических функций*, Деп. ВИНИТИ, вып. 251–84 Деп. (1984), 1–61.

[14] Толоконников В. А., *Операторы Ганкеля и Тёплица в пространствах Харди*, Зап. научн. семинаров ЛОМИ, т. 141, 1985, с. 165–175.

[15] Шамоян Ф. А., *Тёплицевы операторы и деление на внутренние функции в некоторых пространствах аналитических функций*, ДАН АрмССР, т. 76, 1983, с. 109–113.
[16] Brown L., Shields A. L., *Cyclic vectors in the direchlet space*, Trans. Amer. Mat. Soc. **285** (1984), 269–304.
[17] Chang S.-Y., Marshall D. E., *Some slgebras of analytic functions containing the disk algebra*, Lect. Not. Math. **604** (1977), 12–20.
[18] Janson S., *On functions with conditions of the mean oscilation*, Ark. Mat. **14** (1976), 189–196.
[19] Janson S., *Generalizations of Lipschitz spaces and an application to Hardy spaces and BMO*, Duke Mat. J. **47** (1980), 959–982.
[20] Janson S., Peetre J., Semmes S., *On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces*, Duke Mat. J. **51** (1984), 934–959.
[21] Nieto J. I., *Sur un theoreme d́interpolation de Lions and J.Peetre*, Canad. Bul. Mat. **14** (1971), 343–376.
[22] Protas D., Chow K. N., *The maximal ideal space of bounded analytic direchlet finite functions*, Arch. Mat. **31** (1978), 298–301.
[23] Shields A. L., *Weighted shift operators and analytic functions theory*, Mat. Surveys **16** (1974), 49–128.
[24] Shields A. L., Williams D. C., *Bounded proections, duality and multipliers in spaces of bounded analytic functions*, Trans. Amer. Mat. Soc. **162** (1971), 287-303.
[25] Smith W. S., *BMO(p) and Carleson measures*, Trans. Amer. Mat. Soc. **287** (1985), 107–126.
[26] Sundberg C., Wolff T. H., *Interpolation sequences for* Q_{AB}, Trans. Amer. Mat. Soc. (1983), 551–581.
[27] Хавин В. П., *О факторизации аналитических функций, гладких вплоть до границы*, Зап. науч. семинаров ЛОМИ, т. 22, 1971, с. 202–205.
[28] Sarason D., *Algebras of functions on the unit circle*, Bull. amer. Mat. Soc. **79** (1973), 286–299.
[29] Mallios A., *Topological algebras. Selected topics*, Math. Hollan, New York, 1986.
[30] Наймарк М. А., *Нормированные кольца*, Наука, М., 1968.
[31] Adams P. R., Frazier M., *BMO and smooth truncation in Sobolev spaces*, Stud. Mat. **139** (1988), 241–260.
[32] Lemarie P. G., *Continuite sur les spaces de Besov des operateurs definespar integrales singulieres*, Ann. Inst. Fourier,Grenoble **35** (1985), 175–187.
[33] Meyer M., *Une classe d'espaces fonctionnels de type BMO*, Ark. Mat. **27** (1989), 305–318.
[34] Mortini R., *Corona theorems for subalgebras of* H^∞., Michigan Math. J. **36** (1989), 193-202.
[35] Nikolskii N. K., *Treatise on the shift operator*, Grund. der. Mat. **273** (1986), 1–491.
[36] Толоконников В. А., *Алгебры ограниченных аналитических функций с гладкой коаналитической частью*, Функцион. анализ и его прил. **23** (1989), 88–89.

НТО АН СССР
Ленинград, пр.Огородникова, 242

Поступило 20 марта 1990 г.