В. Г. Журавлев, Дифференцирование индуцированных разбиений тора и многомерные приближения алгебраических чисел,
Зап. научн. сем. ПОМИ, 2016, том 445, 33–92

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 445, 2016 г.

В. Г. Журавлев

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ИНДУЦИРОВАННЫХ РАЗБИЕНИЙ ТОРА И МНОГОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Введение

0.1. Перекладывающиеся развертки тора. Разверткой T тора $\mathbb{T}^D_L = \mathbb{R}^D/L$, где $L = \mathbb{Z}[l_1, \dots, l_D]$ – полная решетка в $\mathbb{R}^D$, называется подмножество $T \subset \mathbb{R}^D$, получающееся подъемом тора $\mathbb{T}^D_L$ в пространство $\mathbb{R}^D$ через биекцию

$$T \overrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D_L : \quad x \mapsto x \bmod L. \tag{0.1}$$

Развертка T будет перекладывающейся, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup \ldots \sqcup T_D \tag{0.2}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{0.3}$$

на векторы $v_0, \dots, v_D$, связанные с базисом решетки L равенствами $l_k = v_k - v_0$ для $k = 1, \dots, D$. Здесь $\mathrm{col}(x) = k$ обозначает цвет точек x, принадлежащих подмножеству T_k.

В силу существования биекции (0.1) множество T можно отождествить с тором $\mathbb{T}^D_L$. Тогда перекладывание (0.3) будет эквивалентно сдвигу $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{0.4}$$

тора T на вектор $\alpha' \equiv v_0 \bmod L$.

Ключевые слова: перекладывания тора, индуцированные разбиения, наилучшие многомерные приближения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 14-11-00433.

0.2. Вкладывающиеся в тор развертки. Пусть дан еще тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^D/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$ и на нем определен

$$\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} : \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L} \tag{0.5}$$

сдвиг $S = S_\alpha$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$. Скажем, что перекладывающаяся развертка T из (0.2) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \tag{0.6}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига $S = S_\alpha$, если выполняются условия:

1) развертка $T \subset \mathbb{R}^D$ допускает вложение $T \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ в качестве его подмножества, т.е. для любых элементов x, y из T, связанных сравнением $x \equiv y \bmod \mathcal{L}$, следует их равенство $x = y$;

2) перекладывание (0.3) или сдвиг тора (0.4) являются индуцированными отображениями (отображениями первого возвращения, отображением Пуанкаре)

$$S' = S|_T$$

для сдвига тора S.

0.3. Индуцированные разбиения тора и ядро. Вкладывающаяся в тор (0.6) развертка T порождает индуцированное разбиение

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}|_T = \mathcal{T}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_D \tag{0.7}$$

тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, где $\mathcal{T}_k$ – орбиты множеств $T_k \subset T$ относительно сдвига тора S. Множество T по отношению ко всему разбиению (0.7) является ядром

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}) \tag{0.8}$$

разбиения тора $\mathcal{T}$. Ядро $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ характеризуется тем свойством, что отображение первого возвращения $S' = S|_{\mathrm{Kr}}$, индуцированное сдвигом тора S из (0.5), эквивалентно перекладыванию $D+1$ областей из $\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_D$.

0.4. Дифференцирование индуцированных разбиений. Основная цель настоящей работы – определить для произвольной размерности D операции дифференцирования

$$\sigma : \quad \mathcal{T} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{T}^\sigma \tag{0.9}$$

индуцированного разбиения (0.7) таким образом, чтобы в результате получались снова индуцированные разбиения (см. теорему 3.1)

$$\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}^\sigma}$$

того же тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, порождаемые некоторым новым ядром $\mathrm{Kr}^\sigma = T^\sigma$.

На языке ядер Kr дифференцирование

$$\sigma: \quad \mathrm{Kr} \quad \longrightarrow \quad \mathrm{Kr}^\sigma$$

сводится к комбинации следующих геометрических преобразований пространства $\mathbb{R}^D$. Все области Kr_k из ядра Kr разбиваются на три класса. Области первого класса сохраняются, второго класса – подвергаются преобразованию косого сдвига, а третьего – с дополнительным сжатием вдоль прямой.

0.5. Приближения алгебраических чисел. Пусть вещественные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ принадлежат алгебраическому полю $\mathbb{Q}(\theta)$, где θ является корнем рационального многочлена степени $D+1$, неприводимого над полем рациональных $\mathbb{Q}$. Для иррационального вектора $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$, когда числа $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D$ линейно независимы над кольцом целых чисел $\mathbb{Z}$, рассматривается бесконечная орбита точек

$$x_j \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D \quad \text{для} \quad j = 0, 1, 2, \ldots \tag{0.10}$$

на торе $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$. В предлагаемой работе строится бесконечная последовательность выпуклых центрально-симметричных параллелоэдров $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ с определенными для них порядками

$$m^{(0)} < m^{(1)} < \ldots < m^{(i)} < \ldots,$$

где $m^{(i)}$ – натуральные числа.

В теореме 11.1 (см. формулы (11.35)–(11.38)) доказано, что последовательность параллелоэдров $T^{(i)}$ обладает следующими свойствами.

1. *Ни одна из точек x_j орбиты* (0.10) *не попадает*

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \textit{для} \quad j = 1, 2, \ldots, m^{(i)} - 1 \tag{0.11}$$

в параллелоэдр $T^{(i)}$. Первой попавшей в область $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ является точка

$$x_j \in T^{(i)} \quad \textit{для} \quad j = m^{(i)}. \tag{0.12}$$

2. *Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$, выполняется следующее неравенство*

$$\varrho(T^{(i)}) \leqslant \|\mathbf{A}\|^a \varrho(T^{(b)}). \tag{0.13}$$

Здесь p – некоторый период, определяемый вектором α, и $\|\mathbf{A}\|$ обозначает спектральную норму калибровочной матрицы $\mathbf{A}$, также определяемой α.

3. *Площадь* $s(T^{(i)})$ *параллелоэдра* $T^{(i)}$ *находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det\mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{0.14}$$

где $\det\mathbf{A}$ *– определитель матрицы* $\mathbf{A}$*, удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$.

Свойства (0.11) и (0.12) означают, что ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе $\mathbb{T}^D$ выделяют из орбиты (0.10) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^D$.

Следующие два свойства (0.13) и (0.14) описывают метрические характеристики аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$. В частности, из них вытекают экспоненциальные сокращения размеров и площадей параллелоэдров

$$\varrho(T^{(i)}) \to 0, \quad s(T^{(i)}) \to 0 \quad \text{при} \quad i \to \infty, \tag{0.15}$$

причем выполнение первого свойства из (0.15) требует условия $\|\mathbf{A}\| < 1$ на спектральную норму калибровочной матрицы $\mathbf{A}$. В противном случае возможен рост радиусов аппроксимирующих параллелоэдров $T^{(i)}$ с одновременным сжатием их площадей.

В теореме 9.2 доказано, что существование периода $p > 0$ возможно только для векторов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_D)$ с координатами из некоторого алгебраического поля $\mathbb{Q}(\theta)$ степени $D + 1$. Такое утверждение является многомерным обобщением первой части теоремы Лагранжа о периодичности разложений квадратичных иррациональностей в цепную дробь (см., например, [1]). Ранее в [2,3] были рассмотрены приближения кубических иррациональностей.

История и связи. Метод настоящей работы основан на дифференцировании звезд, вкладывающихся в тор [3, 4], и имеет своим источником разбиения Рози [5,6]. Индуцированные разбиения тора впервые появились в работе Ж. Рози [5] – это были двумерные самоподобные разбиения с фрактальными границами. Общие же индуцированные разбиения были построены в [7]. Понятие ядра разбиения (0.8) и его роль были выявлены в [6]. В этой же работе было доказано, что состаляющие разбиения Рози области являются множествами ограниченного остатка.

Для размерности $D = 1$ операции дифференцирования разбиений (0.9) эквивалентны возвратному отображению для цепных дробей (backward continued fraction map) [8, 9], а для $D = 2$ такие операции были определены в [10, 11].

Интерес к индуцированным разбиениям (0.7) вызывается их связями с множествами ограниченного остатка [6, 12–18], многомерными приближениями [3], сбалансированными словами [19, 20], ростом квазикристаллов [21–23] и теорией сложности (complexity) [23].

Материал статьи излагается в следующей последовательности.

§1. Согласованные множества векторов и их производные.

§2. Индуцированные разбиения тора.

§3. Производные разбиения тора.

§4. Структура точечных орбит.

§5. Индуцированное разбиение пространства и полиэдральная гиперповерхность.

§6. Доказательство теоремы 3.2.

§7. Возвратные отображения.

§8. Дробно-линейные и проективные преобразования.

§9. Периодические точки.

§10. Преобразования и нормирования звезды.

§11. Приближения на торе.

§1. Согласованные множества векторов и их производные

1.1. Согласованные множества векторов. Обозначим через Σ совокупность всех сочетаний σ из двух элементов $\{k_1, k_2\}$ из множества индексов $\{0, 1, \ldots, D\}$. Пусть $v_0, v_1, \ldots, v_D$ – произвольные векторы из $\mathbb{R}^D$ и $\sigma' = \{k'_1, \ldots, k'_{D-1}\} = \{0, 1, \ldots, D\} \setminus \sigma$ – дополнительное к σ сочетание. Между $\sigma \in \Sigma$ и дополнительными к ним сочетаниями $\sigma' \in \Sigma$ существует взаимно однозначное соответствие

$$\sigma \Leftrightarrow \sigma'. \tag{1.1}$$

Далее мы будем рассматривать неупорядоченные множества векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$.

Определение 1.1. *Пусть любые $D-1$ вектора из $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ линейно независимы. Обозначим через*

$$H_{\sigma'} = \{\lambda_{k'_1} v_{k'_1} + \ldots + \lambda_{k'_{D-1}} v_{k'_{D-1}}; \quad \lambda_{k'_1}, \ldots, \lambda_{k'_{D-1}} \in \mathbb{R}\} \tag{1.2}$$

гиперплоскость, содержащую векторы $v_{k'_j}$ с индексами k'_j из σ'. Тогда такое множество векторов $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ назовем согласованным, *если для всех дополнительных* (1.1) *к σ' сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\} \in \Sigma$ векторы v_{k_1}, v_{k_2} из $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ не принадлежат гиперплоскости* (1.2) *и лежат по отношению к ней в разных полупространствах $H^+_{\sigma'}$ и $H^-_{\sigma'}$.*

Непосредственно из определения согласованности следует, что любые D вектора из $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ будут линейно независимы.

Определение 1.2. *Любое согласованное множество векторов $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ из $\mathbb{R}^D$ будем для краткости называть* звездой.

Объяснением названия звезды может служить следующий критерий.

Критерий 1.1. Обозначим через

$$\Delta(v) = \{\lambda_0 v_0 + \dots + \lambda_D v_D;\quad \lambda_0 + \dots + \lambda_D \leqslant 1,\quad \lambda_0, \dots, \lambda_D \geqslant 0\}, \tag{1.3}$$

где коэффициенты $\lambda_0, \dots, \lambda_D \in \mathbb{R}$, натянутый на векторы звезды v симплекс, и пусть $\Delta^{\mathrm{int}}(v)$ – внутренняя часть симплекса (1.3). Тогда условие на множество векторов v быть звездой равносильно условию

$$0 \in \Delta^{\mathrm{int}}(v). \tag{1.4}$$

1.2. Производные звезды. Далее мы будем использовать обозначения

$$X = X_1 \sqcup X_2, \quad X = X_1 \cup X_2 \tag{1.5}$$

для *строгого* и *нестрогого разбиений* множества X в случае, если $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ и $X_1^{\mathrm{int}} \cap X_2^{\mathrm{int}} = \varnothing$ соответственно, где X_k^{int} – множество внутренних точек из X_k.

Из определения 1.1 вытекает следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Предположим, что для некоторого сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ сумма векторов $v_\sigma = v_{k_1} + v_{k_2}$ звезды $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ не принадлежит плоскости $H_{\sigma'}$ из* (1.2), *где σ' – дополнительное сочетание* (1.1) *для σ. Тогда при этом условии только одно из множеств*

$$v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.6}$$

будет согласованным. Здесь

$$v(\sigma) = \{v_{k_1}, v_\sigma\} \quad \text{или} \quad v(\sigma) = \{v_\sigma, v_{k_2}\} \tag{1.7}$$

в зависимости от того, какие из пар векторов v_{k_1}, v_σ *или* v_{k_2}, v_σ *принадлежат разным полупространствам* $H^\pm_{\sigma'}$, *и* $v(\sigma')$ *– дополнительное для* $v(\sigma)$ *множество векторов из звезды* v.

Заметим, что однозначность выбора множества $v(\sigma)$ в (1.7) гарантирована ограничением на сумму векторов $v_\sigma \notin H_{\sigma'}$.

Определение 1.3. *Обозначим через*

$$v^\sigma = v(\sigma) \sqcup v(\sigma') \tag{1.8}$$

то множество векторов из (1.6), *которое является согласованным. Если существуют множества векторов* v^σ *для всех сочетаний* $\sigma \in \Sigma$, *т.е. для всех* σ *выполняется условие леммы* 1.1, *то будем говорить, что согласованное множество векторов* $\{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ нерывождено *или более кратко – звезда* $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ нерывождена.

Таким образом, согласно определению 1.3 для всех сочетаний $\sigma = \{k_1, k_2\}$ из Σ на множестве невырожденных звезд $v = \{v_0, v_1, \dots, v_D\}$ определено отображение

$$v \quad \xrightarrow{\sigma} \quad v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \dots, v_D^\sigma\}, \tag{1.9}$$

где

$$v_{k_1}^\sigma = v_{k_1}, \quad v_{k_2}^\sigma = v_\sigma$$

или

$$v_{k_1}^\sigma = v_\sigma, \quad v_{k_2}^\sigma = v_{k_2}$$

в зависимости от выполнения условия из (1.7), и

$$v_{k'}^\sigma = v_{k'} \quad \text{для всех} \quad k' \in \sigma'.$$

Звезду v^σ из (1.9) назовем *σ-производной* нерывожденой звезды v. Если нужно выделит индексы k_1, k_2 из сочетания $\sigma = \{k_1, k_2\}$, то будем для σ-производной (1.9) использовать еще и другое развернутое обозначение

$$v^\sigma = v^{\{k_1, k_2\}}. \tag{1.10}$$

По определению (1.9) имеет место формула коммутирования

$$v^{\{k_1, k_2\}} = v^{\{k_2, k_1\}}.$$

Поэтому для нерывожденной звезды v существуют $C^2_{D+1} = \frac{(D+1)D}{2}$ ее производных звезд v^σ.

1.3. Инвариантность относительно афинных отображений. Непосредственно из определения 1.1 вытекает следующее свойство инвариантности звезд.

Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ образует звезду, то ее образы

$$Av = \{Av_0, Av_1, \ldots, Av_D\}$$

относительно произвольного невырожденного аффинного отображения $A : \mathbb{R}^D \longrightarrow \mathbb{R}^D$, где $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$, также будут звездами.

Данное свойство позволяет, не уменьшая общности, ограничиваться рассмотрением лишь *приведенных* звезд, когда какие-то D выбранные вектора из $v_0, v_1, \ldots, v_D$ равны единичным векторам $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, …, $e_D = (0, 0, \ldots, 1)$.

Если A – невырожденное аффинное отображение, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} v & \xrightarrow{\sigma} & v^\sigma \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \xrightarrow{\sigma} & Av^\sigma \end{array}$$

Кратко диаграмму можно записать в виде формулы коммутируемости

$$A(v^\sigma) = (Av)^\sigma \tag{1.11}$$

σ-производных с аффинными отображениями $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$.

§2. Индуцированные разбиения тора

2.1. Перекладывающиеся развертки тора. Пусть

$$L = \mathbb{Z}[l_1, \ldots, l_D] \tag{2.1}$$

– полная решетка в пространстве $\mathbb{R}^D$ с базисом $l_1, \ldots, l_D$, т.е. векторы $l_1, \ldots, l_D$ линейно независимы на полем вещественных чисел $\mathbb{R}$; и пусть T — некоторое подмножество из $\mathbb{R}^D$. Будем говорить, что T является *разверткой тора* $\mathbb{T}^D_L = \mathbb{R}^D/L$, если отображение

$$T \overrightarrow{\sim} \mathbb{T}^D_L : \quad x \mapsto x \bmod L$$

– биекция. Развертка T называется *перекладывающейся*, если задано ее разбиение

$$T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D \tag{2.2}$$

и перекладывание

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) = x + v_{\mathrm{col}(x)} \tag{2.3}$$

на векторы $v_0, v_1, \ldots, v_D$, связанные с базисом (2.1) решетки L равенствами

$$l_k = v_k - v_0 \quad \text{для} \quad k = 1, \ldots, D. \tag{2.4}$$

В формуле (2.3) использовано обозначение $\mathrm{col}(x) = k$ для *цвета* точек x, принадлежащих подмножеству T_k из разбиения (2.2), где $k = 0, 1, \ldots, D$.

Заметим, что при переходе (2.4) от векторов переклыдывания $v_0, v_1, \ldots, v_D$ к базизу $l_1, \ldots, l_D$ решетки L нарушается симметрия, когда выделяется вектор v_0. Удобно ввести для него дополнительное обозначение

$$v_0 = \alpha'. \tag{2.5}$$

В частности, из равенств (2.4) и (2.5) вытекают сравнения

$$v_k \equiv \alpha' \bmod L$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, D$. Поэтому перекладывание (2.3) эквивалентно сдвигу тора $S' = S'_{\alpha'}$:

$$T \xrightarrow{S'} T : \quad S'(x) \equiv x + \alpha' \bmod L \tag{2.6}$$

на вектор $\alpha' \bmod L$.

2.2. Перекладывающиеся параллелоэдры и их деформации. Определим для $m = 0, 1, \ldots, D$ замкнутые D-мерные параллелепипеды

$$\overline{T}_m = \quad \{\lambda_{k_1} v_{k_1} + \ldots + \lambda_{k_D} v_{k_D}; \qquad 0 \leqslant \lambda_{k_i} \leqslant 1\}, \tag{2.7}$$

где $k_1, \ldots, k_D$ – дополнительные к m индексы в $\{0, 1, \ldots, D\}$. Если множество векторов $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ является звездой (см. определение 1.2), то объединение

$$\overline{T} = \overline{T}_0 \cup \overline{T}_1 \cup \ldots \cup \overline{T}_D \tag{2.8}$$

параллелепипедов (2.7) образует *параллелоэдр* [17, 18] – многогранник, разбивающий пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigcup_{l \in L} \overline{T}[l] \tag{2.9}$$

с помощью параллельных переносов $\overline{T}[l] = \overline{T} + l$ на векторы l решетки L. Причем различные многогранники $\overline{T}[l]$ из (2.9) не имеют общих внутренних точек. Здесь и далее будем пользоваться соглашением (1.5).

Для $D = 2$ параллелоэдр $\overline{T}$ из (2.7) является выпуклым шестиугольником с попарно равными и параллельными сторонами, для $D = 3$

– ромбододекаэдром Федорова [24], а для $D = 4$ – параллелоэдром Вороного [25].

По i-*алгоритму* из [17] вершины, ребра и грани параллелепипедов $\overline{T}_m$ можно распределить между собою так, чтобы получалось разбиение $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D$, имеющее внутреннюю часть $T^{\rm int} = (\overline{T})^{\rm int}$ такую же, как и параллелоэдр (2.8), и разбивающее пространство

$$\mathbb{R}^D = \bigsqcup_{l \in L} T[l] \tag{2.10}$$

в строгом смысле (1.5), т.е. в (2.10) многогранники $T[l'] \cap T[l''] = \varnothing$, если $l' \neq l''$. Существование разбиения (2.10) равносильно условию незамкнутому параллелоэдру T быть разверткой тора $\mathbb{T}^D_L = \mathbb{R}^D/L$.

Исходя из i-алгоритма [17], можно считать, что выполняются условия

$$0 \in T_0, \quad v_0 \in T_1, \quad v_0 + v_1 \in T_2, \quad \ldots, \quad v_0 + v_1 + \ldots + v_{D-1} \in T_D. \tag{2.11}$$

Если дополнительно предположить выполненными условия (2.11), то в результате каждой звезде $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ ставится в соответствие параллелоэдр

$$T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D, \tag{2.12}$$

являющийся перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^D_L$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_D$ в (2.3).

Приведенная конструкция развертки T не является жесткой. Параллельные $(D-1)$-мерные грани параллелепипедов $T_0, T_1, \ldots, T_D$ из (2.12) допускают малые деформации, при которых измененное множество остается перекладывающейся разверткой тора $\mathbb{T}^D_L$ с прежними векторами перекладывания.

2.3. Вмещающее пространство. Кроме тора $\mathbb{T}^D_L$, нам потребуется еще один тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^D/\mathcal{L}$ для другой полной решетки $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$. Зададим сдвиг $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ на вектор $\alpha \in \mathbb{R}^D$, полагая

$$\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \xrightarrow{S} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}: \quad x \mapsto S(x) \equiv x + \alpha \bmod \mathcal{L}. \tag{2.13}$$

Далее торы $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ будут использоваться, как вмещающие пространства для вложений различных торов $\mathbb{T}^D_L$ с изменяющимися решетками L.

2.4. Вкладывающиеся в тор развертки.

Определение 2.1. $\triangleright$ *Перекладывающаяся развертка* T *из* (2.2) вкладывается

$$T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \tag{2.14}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$, *если выполняются следующие условия.*

1. *Подмножество* $T \subset \mathbb{R}^D$ *является* $\mathcal{L}$-различимым, *т.е. для любых элементов* x, y *из* T, *связанных сравнением* $x \equiv y \operatorname{mod} \mathcal{L}$, *следует их равенство* $x = y$. *Значит, отображение*

$$T \overrightarrow{\sim} T \operatorname{mod} \mathcal{L} : \quad x \mapsto x \operatorname{mod} \mathcal{L} \tag{2.15}$$

будет взаимно однозначным; и поэтому используя отображение (2.15) *можем считать развертку* T *вложенной как множество*

$$T \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \tag{2.16}$$

в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$.

2. *Векторы перекладывания* (2.3) *имеют вид*

$$v_k \equiv m_k \alpha \operatorname{mod} \mathcal{L} \tag{2.17}$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, D$ *с некоторыми коэффициентами*

$$m_k = 1, 2, 3, \ldots$$

3. *Пусть*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 1, \ldots, m_k - 1\} \tag{2.18}$$

обозначает орбиту *подмножества* $T_k \subset T$. *В силу включения* (2.16) *будем полагать* $\mathrm{Orb}^+_k \subseteq \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. *Тогда по определению считается, что орбиты* (2.18) *удовлетворяют условию*

$$\mathrm{Orb}^+(T_k) \cap T = \varnothing \tag{2.19}$$

для $k = 0, 1, \ldots, D$. $\triangleleft$

Чтобы сформулировать следующий результат, нам потребуется в дополнение к (2.18) определить еще *полные орбиты*

$$\mathrm{Orb}(T_k) = \quad \{S^j(T_k); \quad j = 0, 1, \ldots, m_k - 1\}. \tag{2.20}$$

Кроме того, будем предполагать вектор сдвига $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ из (2.13) *иррациональным*, когда выполняется условие:

$$\textit{числа} \quad 1, \alpha_1, \ldots, \alpha_D \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{2.21}$$

Здесь α_k – координаты вектора α в некотором базисе полной решетки $\mathcal{L}$.

Теорема 2.1. *Пусть развертка* T *вкладывается* (2.14) *в тор* $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, *развертка* T *имеет внутреннюю точку, и пусть вектор* α *для сдвига* $S = S_\alpha$ *из* (2.13) *будет иррациональным* (2.21). *Тогда выполняются следующие утверждения.*

1. *Множества из полных орбит* $\mathrm{Orb}(T_k)$ *не пересекаются, т.е.*

$$S^{j_1}(T_{k_1}) \cap S^{j_2}(T_{k_2}) \neq \varnothing \tag{2.22}$$

только при условии $j_1 = j_2$ *и* $k_1 = k_2$.

2. *Имеет место разбиение тора* $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_D, \tag{2.23}$$

где

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k - 1}(T_k)$$

– орбитное разбиение, составленное из множеств, входящих в полную орбиту $\mathrm{Orb}(T_k)$ *из* (2.20).

Доказательство приведено в [7]. □

2.5. Индуцированные отображения и ядро разбиения. Из теоремы 2.1 следует, что сдвиг тора $S' : T \longrightarrow T$ из (2.6) является *индуцированным отображением* или иначе – отображением первого возвращения, отображением Пуанкаре – для сдвига тора $S : \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ из (2.13), что символически будем обозначать в виде равенства

$$S' = S|_T. \tag{2.24}$$

Обозначим

$$T = T(v), \quad \mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_D \tag{2.25}$$

соответственно развертку T из (2.2), (2.12) и *индуцированное разбиение* (2.23) тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, порождаемое вкладывающейся в тор $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ разверткой T.

Множество T по отношению ко всему разбиению тора $\mathcal{T}$ называется (ср. [6, 21]) *ядром (karyon)* разбиения $\mathcal{T}$. Чтобы указывать на такую связь между T и $\mathcal{T}$ будем использовать обозначения

$$T = \mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}). \tag{2.26}$$

Ядро (2.26) характеризуется следующим свойством:

ядро – это такое подмножество $\mathrm{Kr} \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, для которого отображение первого возвращения

$$S' = S|_{\mathrm{Kr}}, \tag{2.27}$$

индуцированное сдвигом тора $S = S_\alpha$ из (2.13), эквивалентно перекладыванию $D+1$ подмножеств из разбиения

$$\mathrm{Kr} = \mathrm{Kr}_0 \sqcup \mathrm{Kr}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathrm{Kr}_D. \tag{2.28}$$

В определении ядра Kr важно, что количество областей в разбиении (2.28) на единицу больше размерности вмещающего его тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Отсюда, в частности, следует, что Kr является разверткой некоторого тора $\mathbb{T}^D_L$, а индуцированное отображение (2.27) изоморфно сдвигу этого тора.

2.6. Критерий вложимости развертки тора.

Теорема 2.2. *Определенная в* (2.12) *развертка тора* $T = T(v)$ *вкладывается* (2.14) *в тор* $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух эквивалентных утверждений*:

1) *множество* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_D$ *из* (2.25) *является разбиением тора* $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$*;*

2) *внутренняя часть* T^{int} *развертки* $T \subset \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ *не содержит ни одной из точек* x_j *орбиты*

$$\mathrm{Orb}^+(0,\mathbf{m}) = \quad \{x_j = S^j(0); \quad j = 1,2,\ldots,\mathbf{m}-1\} \tag{2.29}$$

порядка

$$\mathbf{m} = m_0 + m_1 + \ldots + m_D. \tag{2.30}$$

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из теоремы 2.1.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что из вложения $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ следует $T \cap \mathrm{Orb}^+(0,\mathbf{m}) = \varnothing$. Все точки орбиты $\mathrm{Orb}^+(0,\mathbf{m})$ являются вершинами параллелепипедов из орбитного разбиения

$$\mathcal{T}_k = T_k \sqcup S^1(T_k) \sqcup \ldots \sqcup S^{m_k-1}(T_k),$$

составленного из параллелепипедов, входящих в орбиту $\mathrm{Orb}^+(T_k)$. Отсюда и существования (2.25) разбиения тора $\mathcal{T} = \mathcal{T}_0 \sqcup \mathcal{T}_1 \sqcup \ldots \sqcup \mathcal{T}_D$ выводим $T \cap \mathrm{Orb}^+(0,\mathbf{m}) = \varnothing$.

Методом от противного докажем обратное утверждение. Пусть какой-то параллелепипед $T^j_k = S^j(T_k)$ с индексом $0 < j < n_k$ из разбиения $\mathcal{T}_k$ пересекается $T_k^j \cap T \neq \varnothing$ с разверткой T. Предположим, что пересечение $T_k^j \cap T$ содержит внутреннюю точку развертки T. Тогда одна из вершин параллелепипеда T_k^j также попадает в T^{int}. Но в этом случае мы приходим к противоречию, поскольку при условии $0 < j < m_k$ указанная вершина будет содержаться в орбите $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Наконец, осталось рассмотреть случай

$$\overline{T}_k^j \cap \overline{T} \subset \partial\overline{T}.$$

Здесь через $\overline{T}_k^j$ и $\overline{T}$ мы обозначили замыкания T_k^j и T, а $\partial\overline{T}$ – объединение всех $(D-1)$-мерных граней многогранника T.

Однако, не трудно видеть, что согласно определению (2.25) развертки $T = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D$ при прикладывании к ней параллелепипедов $T_k^j = S^j(T_k)$ последние не пересекаются с выпуклым многограником T. Следовательно, включение $\overline{T}_k^j \cap \overline{T} \subset \partial\overline{T}$ не может иметь место. □

§3. Производные разбиения тора

3.1. Производные вкладывающихся множеств векторов. Основная теорема.

Определение 3.1. *Пусть $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ – звезда и $T = T(v)$ – отвечающая ей развертка (2.25) тора $\mathbb{T}_L^D$ с векторами перекладывания $v_0, v_1, \ldots, v_D$. Если данная развертка T вкладывается $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно некоторого сдвига $S = S_\alpha$, то в этом случае будем говорить, что такая звезда v* вкладывается

$$v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \tag{3.1}$$

в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S.

Теорема 3.1. *Пусть невырожденная звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ вкладывается (3.1) в тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига $S = S_\alpha$ с иррациональным (2.21) вектором α. Тогда любая ее σ-производная $v^\sigma = \{v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_D^\sigma\}$ для $\sigma \in \Sigma$ также вкладывается*

$$v^\sigma \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D \tag{3.2}$$

в тот же тор $\mathbb{T}_{\mathcal{L}}^D$ относительно сдвига S.

Доказательство вытекает из теоремы 3.2 частного вида, которая будет приведена ниже. □

Чтобы сформулировать указанную теорему, нам потребуются несколько дополнительных разъяснений.

3.2. Инвариантность вложений звезд. Операция вложения (3.1) звезд v инвариантна

$$\begin{array}{ccc} v & \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \\ \downarrow A & & \downarrow A \\ Av & \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} & \mathbb{T}^D_{A\mathcal{L}} \end{array} \tag{3.3}$$

относительно невырожденных аффинных преобразований $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$. В диаграмме (3.3) нижнее вложение звезды $Av = \{Av_0, Av_1, \ldots, Av_D\}$ рассматривается относительно сдвига

$$S_{A\alpha} : \mathbb{T}^D_{A\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^D_{A\mathcal{L}}$$

тора $\mathbb{T}^D_{A\mathcal{L}} = \mathbb{R}^D / A\mathcal{L}$, т.е. вектор сдвига α и решетка тора $\mathcal{L}$ преобразуются тем же преобразованием A.

3.3. Приведенные звезды. Согласно диаграмме (3.3) для любой невырожденной звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ и любого аффинного отображения $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$ звезда $Av = \{Av_0, Av_1, \ldots, Av_D\}$ снова будет невырожденной и, следовательно, для нее существует $\{0, D\}$-производная (см. обозначение (1.10))

$$\{Av_0, Av_1, \ldots, Av_D\}^{\{0,D\}} = \{(Av_0)', (Av_1)', \ldots, (Av_D)'\}. \tag{3.4}$$

Дополнительно предположим, что производная звезда (3.4) имеет векторы

$$(Av_k)' = Av_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D-1 \tag{3.5}$$

и

$$(Av_D)' = Av_0 + Av_D.$$

По определению звезды векторы $v_1, \ldots, v_D \in v$ линейно независимы. Поэтому можно выбрать аффинное отображение $A \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$ с условием

$$Av_1 = e_1, \quad \ldots, \quad Av_D = e_D.$$

Чтобы не усложнять обозначения (3.5), можем с самого начала считать исходную звезду $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$, содержащую единичные векторы

$$v_1 = e_1, \quad \ldots, \quad v_D = e_D. \tag{3.6}$$

Пусть теперь $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ – невырожденная звезда, удовлетворяющая условию (3.6), и такая, что ее $\{0, D\}$-производная

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}^{\{0,D\}} = \{v'_0, v'_1, \ldots, v'_D\} \tag{3.7}$$

имеет векторы

$$v'_k = v_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D-1 \tag{3.8}$$

и

$$v'_D = v_0 + v_D.$$

Здесь в (3.7) главное ограничение на последний вектор $v'_D = v_0 + v_D$. Переставляя местами векторы v_1, …, v_D в исходном множестве векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$, т.е. снова действую на нее аффинным преобразованием $P \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$, переставляющим местами указанные векторы, всегда можно добится выполнения условия (3.8). Более того, с помощью перестановочных матриц $P \in \mathrm{GL}_D(\mathbb{R})$ любую σ-производную звезду v^σ, где $\sigma \in \Sigma$, можно свести к рассмотрению $\{0, D\}$-производных (3.7).

Учитывая, что звезда $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ нерывождена, условие (3.8) будет означать, что вектор $v_0 \in \mathbb{R}^D$ имеет в единичном базисе e_1, …, e_D координаты

$$v_0 = (x_1, \ldots, x_D), \tag{3.9}$$

удовлетворяющие следующим неравенствам:

$$-\infty < x_1 < 0, \quad \ldots, \quad -\infty < x_{D-1} < 0, \quad -1 < x_D < 0.$$

Если переставить местами $x_1, \ldots$, x_{D-1} и воспользоваться условием иррациональности (2.21), то ограничения (3.9) можно несколько сузить

$$v_0 = (x_1, \ldots, x_D), \quad \text{где} \quad -\infty < x_{D-1} < \ldots < x_1 < 0, \quad -1 < x_3 < 0. \tag{3.10}$$

Определение 3.2. *Звезду $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$, удовлетворяющую условиям* (3.6) *и* (3.9)*, назовем* приведенной.

Обратно, если $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ – приведенная звезда (3.6) и (3.9), то она обладает свойствами:

1) множество векторов $\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ является согласованным (см. определение 1.1);

2) для звезды v существует ее $\{0, D\}$-производная $v^{\{0,D\}}$, имеющая вид (3.8).

Итак, из аффинной инвариантности (3.3) свойства вложимости $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ следует, что для доказательства приведенной ранее теоремы 3.1 достаточно рассмотреть лишь следующий ее частный случай.

Теорема 3.2. *Пусть приведенная* (3.6), (3.9) *звезда* $v=\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ *вкладывается* $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ *в тор* $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} = \mathbb{R}^D/\mathcal{L}$ *для некоторой полной решетки* $\mathcal{L} \subset \mathbb{R}^D$ *относительно сдвига* $S = S_\alpha$ *с иррациональным* (2.21) *вектором* α. *Тогда ее* $\{0, D\}$*-производная существует, имеет вид*

$$\{v_0, v_1, \ldots, v_D\}^{\{0,D\}} = \{v'_0, v'_1, \ldots, v'_D\} = \{v_0, v_1, \ldots, v_{D-1}, v_0 + v_D\} \tag{3.11}$$

и также вкладывается

$$v' = v^{\{0,D\}} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \tag{3.12}$$

в тот же тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ *относительно сдвига* S.

Доказательство будет проводится по следующему плану. В п.п. 4, 5 содержится полное описание распределения точечных орбит $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ относительно разбиений $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$. Для такого описания в п. 5 используется метод полиэдральных гиперповерхностей, вложенных в разбиение $\mathcal{T}$. Техническая часть доказательства теоремы 3.2 содержится в п. 6. □

§4. Структура точечных орбит

4.1. Структура производной орбиты $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$**.** Рассмотрим перекладывание $S' : T \longrightarrow T$ развертки тора T, являющееся индуцированным отображением $S' = S|_T$ для сдвига тора $S : \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \longrightarrow \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ из (2.13). Подействуем $(D + 1)$-кратным перекладыванием S' на точку $x_0 = 0$ из T^{int}. Получим следующую внутреннюю точку

$$S'^{D+1}(0) = x_{\mathbf{m}} \tag{4.1}$$

из T, где порядок $\mathbf{m}$ был определен в (2.30). Она является первой точкой из орбиты

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}') &= \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}') \setminus \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \\ &= \{x_j = S^j(0);\ \mathbf{m} \leqslant j \leqslant \mathbf{m}' - 1\}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

при этом

$$\mathbf{m}' = m'_0 + m'_1 + \ldots + m'_D, \tag{4.3}$$

где

$$m'_k = m_k \quad \text{для} \quad k = 0, 1, \ldots, D - 1$$

и

$$m'_D = m_0 + m_D.$$

Из (4.3) следует формула связи

$$\mathbf{m}' = 2m_0 + m_1 + \ldots + m_D = \mathbf{m} + m_0 \tag{4.4}$$

между производным $\mathbf{m}'$ и исходным $\mathbf{m}$ порядками.

Для орбиты $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ с номером $\mathbf{m}'$ из (4.4), определенной в (2.29), имеет место следующее разбиение

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}'). \tag{4.5}$$

По критерию 2) из теоремы 2.2 для доказательства теоремы 3.2 нужно проверить, что выполняется равенство

$$T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \varnothing \tag{4.6}$$

для производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ для производной звезды $v' = v^{\{0,D\}}$ была определена в (2.25). В силу разбиения (4.5), чтобы проверить (4.6), нужно доказать выполнимость двух условий:

$$T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \varnothing, \quad T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}') = \varnothing. \tag{4.7}$$

Это будет сделано в п. 6 в леммах 6.1–6.3.

4.2. Структура начальной орбиты $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$**.** В следующем предложении устанавливается важная связь между точками орбиты $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ и вершинами многогранников, входящих в разбиение $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$.

Предложение 4.1. *Обозначим через* $V_{\mathcal{T}}$ *множество всех вершин параллелепипедов* $T_k^j = S^j(T_k)$ *для* $k = 0, 1, \ldots, D$*, из которых состоит разбиение* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$*, определенное в* (2.25)*. Тогда для начальной орбиты* $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ *выполняется равенство*

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = V_{\mathcal{T}} \setminus \{x_0\}, \tag{4.8}$$

где $x_0 = 0$ *– нулевая вершина в разбиении* $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$*.*

Доказательство. Из определения (2.25) разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ следует включение

$$V_{\mathcal{T}} \subset \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\}. \tag{4.9}$$

Вспоминая соглашение (2.11), проследим движение нулевой вершины $x_0 \in V_0$ под действием сдвига S. Имеем

$$\begin{array}{lcll}
V_0 \ni x_0 & \xrightarrow{S} & x_1 \to \ldots \to x_{m_0-1} & \in V_0^j \\
V_1 \ni x_{m_0} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+1} \to \ldots \to x_{m_0+m_1-1} & \in V_1^j \\
V_2 \ni x_{m_0+m_1} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+m_1+1} \to \ldots \to x_{m_0+m_1+m_2-1} & \in V_2^j \\
 & \ldots & & \\
V_D \ni x_{m_0+m_1+\ldots+m_{D-1}} & \xrightarrow{S} & x_{m_0+m_1+\ldots+m_{D-1}+1} \to \ldots \to x_{\mathbf{m}-1} & \in V_D^j,
\end{array} \tag{4.10}$$

где для вершин параллелограммов T_k использовали обозначения $V_k = V_{T_k}$ и $V_k^j = S^j(V_k)$. Из диаграммы (4.10) следует включение

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \sqcup \{x_0\} \subset V_{\mathcal{T}},$$

из которого и (4.9) выводим равенство (4.8). $\square$

4.3. Структура новой части орбиты $\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}')$**.** Запишем координаты x_k вектора $v_0 = (x_1, \ldots, x_D)$ из (3.9) в виде

$$x_1 = -a_1 - \alpha_1, \quad \ldots, \quad x_{D-1} = -a_{D-1} - \alpha_{D-1}, \quad x_D = -\alpha_D, \tag{4.11}$$

где $a_1, \ldots, a_{D-1} = 0, 1, 2, \ldots$ и $0 < \alpha_k < 1$ для $k = 1, \ldots, D$. Тогда орбиту $\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}')$ из (4.2) можно разложить на следующие последовательности:

$$\begin{array}{llcll}
T_{k_0} \ni & x_{\mathbf{m}} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1} & \in T_{k_0}^j \\
 & \downarrow S' & & & \\
T_{k_1} \ni & x_{\mathbf{m}+m_{k_0}} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}+m_{k_1}-1} & \in T_{k_1}^j \\
 & \downarrow S' & & & \\
 & \ldots & \ldots & & \\
 & \downarrow S' & & & \\
T_{k_b} \ni & x_{\mathbf{m}+b_m} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+b_m+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+b_m+m_{k_b}-1} & \in T_{k_b}^j \\
 & \downarrow S' & & & \\
 & \ldots & \ldots & & \\
 & \downarrow S' & & & \\
T_0 \ni & x_{\mathbf{m}+a_m} & \xrightarrow{S} & x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1} & \in T_0^j
\end{array} \tag{4.12}$$

где использованы сокращения

$$b_m = b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1} m_{D-1}, \quad a_m = a_1 m_1 + \ldots + a_{D-1} m_{D-1}. \tag{4.13}$$

В диаграмме (4.12) строки имеют номера $b = 0, 1, \ldots, a$, где $a = a_1 + \ldots + a_{D-1}$. Элементы x_* строки с номером $b = b_1 + \ldots + b_{D-1} = 0, 1, \ldots, a_1 + \ldots + a_{D-1}$ принадлежат

$$x_{\mathbf{m}+b_m+j} \in T^j_{k_b}$$

соответствующему образу

$$T^j_{k_b} = S^j(T_{k_b}) \tag{4.14}$$

параллелепипеда T_{k_b} под действием отображения $S^j = \underbrace{S \circ \ldots \circ S}_{j}$, где S – сдвиг из (2.13) и степень $j = 0, 1, \ldots, m_{k_b} - 1$. Здесь индексы k_b у параллелепипедов T_{k_b} принимают значения

$$\begin{aligned} &k_b = 1, \ldots, D-1 \quad &&\text{для} \quad b = 0, 1, \ldots, a-1, \\ &k_b = 0 &&\text{для} \quad b = a, \end{aligned} \tag{4.15}$$

причем k_b принимает значение $1, \ldots, D-1$ и 0 соответственно $a_1, \ldots, a_{D-1}$ и 1 раз.

Элементы x_* в строках диаграммы (4.12) преобразуются по правилу $x_* \mapsto S(x_*)$, а при переходе со строки на строку – правилу $x_* \mapsto S'(x_*)$, где S' – производный сдвиг (2.6) или, что то же самое, – индуцированное отображение (2.24).

Индекс i' из нижней строки диаграммы (4.12) равен наименьшему числу $i' = 0, 1, 2, \ldots$, удовлетворяющему в силу (4.11) условию

$$\mathbf{m} + a_m + i' \leqslant \mathbf{m}',$$

т.е. согласно (4.4) и (4.13) – неравенству

$$a_1 m_1 + \ldots + a_{D-1} m_{D-1} + i' \leqslant m_0. \tag{4.16}$$

В свою очередь для орбиты $\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}')$ из (4.2) определим еще дополнительное разбиение

$$\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}^+_T(0, \mathbf{m}') \sqcup \mathrm{Orb}^+_{T^-}(0, \mathbf{m}'). \tag{4.17}$$

Здесь обозначили

$$\mathrm{Orb}^+_T(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}') \cap T \quad \subset \quad T \tag{4.18}$$

и

$$\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0, \mathbf{m}') = \mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}') \setminus \mathrm{Orb}^+_T(0, \mathbf{m}'). \tag{4.19}$$

Предложение 4.2. 1. *Под действием сдвига S точки орбиты*

$$\mathrm{Orb}^{+}_{\mathrm{new}}(0, \mathbf{m}')$$

движутся согласно диаграмме (4.12).

2. *Множество* (4.18) *состоит*

$$\mathrm{Orb}^{+}_{T}(0, \mathbf{m}') = \{x_{\mathbf{m}}, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}}, \ldots, x_{\mathbf{m}+a_m}\} \tag{4.20}$$

из всех точек, расположенных в левой части диаграммы (4.12), *где* a_m *определено в* (4.13).

3. *Множество* (4.19) *совпадает*

$$\begin{aligned} &\mathrm{Orb}^{+}_{T^-}(0, \mathbf{m}') = \\ &= \{x_{\mathbf{m}+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+m_{k_0}-1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+a_m+1}, \ldots, x_{\mathbf{m}+a_m+i'-1}\} \end{aligned} \tag{4.21}$$

с множеством всех точек из правой части диаграммы (4.12).

Доказательство. Развертка тора $T = T(v) = T_0 \sqcup T_1 \sqcup \ldots \sqcup T_D$ замкнута относительно производного сдвига S'. Поскольку $x_{\mathbf{m}} \in T$, то точки из правой части равенства (4.20) принадлежат развертке T и, значит, содержатся в множестве $\mathrm{Orb}^{+}_{T}(0, \mathbf{m}')$ по определению (4.18).

В силу (2.11) и (3.6) имеем

$$x_{\mathbf{m}} = v_0 + v_1 + \ldots + v_D = (x_1 + 1, \ldots, x_D + 1),$$

где $x_D + 1 > 0$ в силу условия (3.9). Точки же $(x, y, \ldots, z)$ из параллелепипеда T_D имеют координату $z \leqslant 0$, поэтому $x_{\mathbf{m}} \notin T_D$.

Если $x_{\mathbf{m}}$ принадлежит одному из множеств $T_1, \ldots, T_{D-1}$, то, до первого попадания в область T_0, начальная точка $x_{\mathbf{m}}$ будет сдигается под действием производного сдвига S' на векторы $v_1 = e_1, \ldots, v_{D-1} = e_{D-1}$. Следовательно, все ее образы $S'^{j}(x_{\mathbf{m}})$ снова принадлежат параллелепипедам $T_1, \ldots, T_{D-1}$, что доказывет равенство (4.20).

Равенство (4.21) вытекает из существования разбиения $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$, определенного в (2.23) для вкладывающейся в тор (2.12) развертки T. □

§5. Индуцированное разбиение пространства и полиэдральная гиперповерхность

5.1. Индуцированное разбиение пространства. Далее, чтобы избежать возникающих при малых размерностях D вырождений, будем предполагать выполненным условие

$$D \geqslant 3. \tag{5.1}$$

Случай $D = 1$ рассматривается аналогично [9], а $D = 2$ полностью исследован в [4].

Напомним, что развертка тора $T = T(v)$ является параллелоэдром (2.8), составленным из $D+1$ параллелепипеда $T_0, T_1, \ldots, T_D$. Она естественным образом вложена

$$T = T(v) \quad \overset{\text{em}}{\hookrightarrow} \quad \mathbb{R}^D \tag{5.2}$$

в пространство $\mathbb{R}^D$ и является ядром $T = \mathrm{Kr}(\mathcal{T})$ разбиения

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\ldots,D} \bigsqcup_{0 \leqslant j < m_k} S^j(T_k) \tag{5.3}$$

тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$, где $S^j(T_k)$ – трансляционные копии параллелепипедов T_k под действием сдвига тора S из (2.13).

Тем самым разбиение (5.3) задает для всех многогранников $S^j(T_k) \triangleleft \mathcal{T}$ их *локальные окружения*, т.е. – соседние многогранники $S^{j'}(T_{k'}) \triangleleft \mathcal{T}$, имеющие $(D-1)$-мерную общую грань с $S^j(T_k)$. Здесь и далее значок $\triangleleft$ будет означать вхождение фигуры в некоторое разбиение в качестве одного из его образующих элементов.

Используя так определенные локальные окружения и вложение (5.2), мы можем многогранники T_k из ядра $T = \mathrm{Kr}(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}^D$ окружать слоями соседними с ними многогранниками $T_{k'}$. Поскольку по условию $\mathcal{T} = \mathcal{T}(v)$ – разбиение тора, то в результате указанного процесса роста получится периодическое разбиение

$$\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{T}}(v) = \bigsqcup_{k=0,1,\ldots,D} \bigsqcup_{l \in \mathcal{L}_k} T_k[l] \tag{5.4}$$

пространства $\mathbb{R}^D$. Здесь $\mathcal{L}_k$ – объединение решетки $\mathcal{L}$ и конечного набора ее трансляционных копий $\mathcal{L} + w$, где векторы w определяются локальными окружениями из (5.3). Разбиение (5.4) назовем *индуцированным разбиением* пространства $\mathbb{R}^D$.

5.2. Полиэдральная поверхность. Выделим из развертки тора $T = T(v)$ параллелепипеды T_0, $T_1, \ldots, T_{D-1}$. Обозначим их совокупность через $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$. Пусть $T_{kk'}$ обозначает общую $(D-1)$-*грань* между соседними параллелепипедами T_k и $T_{k'}$. Тогда параллелепипеды из множества $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$ имеют $C_D^2 = \frac{D(D-1)}{2}$ общих граней.

Аналогично построению разбиения (5.4), будем послойно окружать многогранники из $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$ их соседними многогранниками, используя локальные окружения (5.3) только с гранями типа $T_{kk'}$. В результате получим подмножество

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(D)} = \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \quad \triangleleft \quad \widehat{\mathcal{T}} \tag{5.5}$$

из разбиения $\widehat{\mathcal{T}} = \widehat{\mathcal{T}}(v)$, содержащего только многогранники типа тех D многогранников, которые входят в множество $T_{(D)} = T_{(D)}(v)$, т.е. их трансляционные копии.

Зададим проекцию

$$\mathrm{pr}_{\|e_D}: \quad \mathbb{R}^D \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^{D-1}$$

параллельно вектору e_D и подействуем ей

$$\mathrm{pr}_{\|e_D}: \quad T_{(D)}(v) \quad \overset{\longrightarrow}{\sim} \quad S_{(D)}(v) \tag{5.6}$$

на множество $T_{(D)}(v)$. По условию $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ – приведенная звезда (3.6) и (3.9), поэтому образ $S_{(D)}(v)$ в (5.6) состоит

$$S_{(D)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{D-1}$$

из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \mathrm{pr}_{\|e_D} T_k$ без общих внутренних точек, причем P_0 – единичный $(D-1)-$мерный куб. Это означает, что отображение (5.6) можно продолжить

$$\mathrm{pr}_{\|e_D}: \quad \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \quad \overset{\longrightarrow}{\sim} \quad \mathcal{S}_{(D)}(v) \tag{5.7}$$

в пространство $\mathbb{R}^D$ на все множество (5.5), где $\mathcal{S}_{(D)}(v) = \mathrm{pr}_{\|e_D} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$.

Лемма 5.1. 1. *Множество $\mathcal{S}_{(D)}(v)$ из (5.7) состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов типа P_k для $k = 0, 1, \ldots, D-1$ и образует разбиение пространства $\mathbb{R}^{D-1}$. Отображение (5.7) устанавливает взаимно однозначное соответствие между $D-$мерный параллелепипедами из $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ и $(D-1)-$мерными параллелепипедами из $\mathcal{S}_{(D)}(v)$.*

2. *Множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ из (5.5) разделяет*

$$\mathbb{R}^D = \mathbb{R}^D_- \cup \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \cup \mathbb{R}^D_+ \tag{5.8}$$

пространство $\mathbb{R}^D$ на два несвязанные друг с другом полупространства $\mathbb{R}^D_\pm$, где $\mathbb{R}^D_- \cup \mathbb{R}^D_+ = \mathbb{R}^D \setminus \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ и $\mathbb{R}^D_- \cap \mathbb{R}^D_+ = \varnothing$, т.е. любые две точки из замыканий множеств $\overline{\mathbb{R}}^D_-$ и $\overline{\mathbb{R}}^D_+$ нельзя соединить непрерывной кривой, непересекающей множество $\widehat{\mathcal{S}}^{\mathrm{int}}_{(D)}(v)$.

Доказательство вытекает из существования разбиения пространства (5.4) и биекций (5.6), (5.7). □

Из леммы 5.1 следует, что подмножество (5.5) вложено

$$\mathrm{em}: \quad \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \quad \triangleleft \quad \widehat{\mathcal{T}}(v) \tag{5.9}$$

в разбиение пространства (5.4), состоит из многогранников T_k, входящих в разбиение $\widehat{\mathcal{T}}(v)$, и обладает свойствами поверхности без дыр. По этой причине будем назовать $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ *полиэдральной гиперповерхностью.*

5.3. Покрытие области T'_-. Напомним, что согласно (5.6) образ $S_{(D)}(v) = P_0 \cup P_1 \cup \ldots \cup P_{D-1}$ состоит из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P_k = \mathrm{pr}_{\|e_D} T_k$ без общих внутренних точек, где P_0 – единичный $(D-1)-$мерный куб.

Разложим производную развертку тора $T' = T(v') = T'_0 \sqcup T'_1 \sqcup \ldots \sqcup T'_D$ на части

$$T' = T'_{\mathrm{new}} \sqcup T'_{\mathrm{old}}. \tag{5.10}$$

Здесь $T'_{\mathrm{old}} = T' \cap T$ – старая область из развертки T, а новая область $T'_{\mathrm{new}} = T'_-$ имеет разбиение

$$T'_{\mathrm{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \ldots \cup T'_{D-1,-}, \tag{5.11}$$

где $T'_{1,-}, \ldots, T'_{D-1,-}$ – дальние от начала координат половины параллелепипедов $T'_1, \ldots, T'_{D-1}$.

Для развертки $T'(v)$ рассмотрим ее проекцию

$$\mathrm{pr}_{\|e_D}: \quad T'(v) \quad \longrightarrow \quad S'_{(D)}(v) \tag{5.12}$$

в пространство $\mathbb{R}^{D-1}$. Образ $S'_{(D)}(v)$ можно представить в виде разбиения

$$S'_{(D)}(v) = S_{(D)}(v) \cup P'_-, \tag{5.13}$$

где

$$P'_- = P'_{1,-} \cup \ldots \cup P'_{D-1,-}$$

– область из прилегающих друг к другу параллелепипедов $P'_{k,-} = \mathrm{pr}_{\|e_D} T'_{k,-}$, при этом $P'_{k,-}$ прилегает к параллелепипеду P_k.

Пусть

$$\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supseteq P'_- \tag{5.14}$$

– *покрытие* области P'_-, образованное всеми параллелепипедами $\widetilde{P}_k$ из разбиения $\mathcal{S}_{(D)}(v)$ пространства $\mathbb{R}^{D-1}$, пересекающимися во внутренних точках с областью P'_-. Если какой-то параллелепипед $\widetilde{P}_k$ с номером $k = 1, \ldots, D-1$ содержится в покрытии $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$, то он порождает $(D-1)$-*полиэдральный диск*

$$\mathcal{P} = \bigcup_{l'_1} P_1[l'_1] \cup \ldots \cup \bigcup_{l'_{D-1}} P_{D-1}[l'_{D-1}] \tag{5.15}$$

параллелепипедов из $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ типа $P_1, \ldots, P_{D-1}$, прилегающих к $\widetilde{P}_k$ и друг к другу по общим $(D-2)$-граням $P_{k'k''}$ параллелепипедов $P_{k'}$ и $P_{k''}$ с номерами $k', k'' = 1, \ldots, D-1$.

Для покрытия $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ из (5.14) имеет место следующее разбиение

$$\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \mathcal{P} \cup \mathcal{C}, \tag{5.16}$$

где множество

$$\mathcal{C} = \bigcup_{l'_0} P_0[l'_0]$$

состоит из $(D-1)$-кубов типа P_0. Здесь в (5.15) и (5.16) векторы l'_j являются $\mathrm{pr}_{\|e_D}$-проекциями векторов вида

$$l_j = v_0 - l_{j1}v_1 - \ldots - l_{j(D-1)}v_{D-1} \tag{5.17}$$

с коэфициентами $l_{jk} = 0, 1, 2, \ldots$, при этом $l_{01} + \ldots + l_{0(D-1)} \geqslant 1$.

Для доказательства (5.17) зададим еще проекцию

$$\mathrm{pr}_{\|e_D, \ldots, e_2} : \quad \mathbb{R}^D \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^1$$

параллельно векторам $e_D, \ldots, e_2$. Образ $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1}, \ldots, e_2} P'_- = \mathrm{pr}_{\|e_D, \ldots, e_2} T'_-$ области (5.11) полностью лежит левее точки

$$\mathrm{pr}_{\|e_D, \ldots, e_2} v_0 + \mathrm{pr}_{\|e_D, \ldots, e_2} v_1 = x_1 + 1$$

где x_1 – первая координата вектора v_0 согласно (3.9). Отсюда следует, что $l_{11} \leqslant 0$, а тогда по симметрии и остальные коэффициенты в (5.17) также неположительны. Куб $P_0[v'_0]$ не принадлежит области P'_-, поэтому случай $l_{01} = \ldots = l_{0(D-1)} = 0$ исключается в (5.17).

Из леммы 5.1 следует, что $(D$–$1)$-полиэдральное покрытие $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ можно однозначно поднять в D-полиэдральную поверхность $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$ до множества

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{C}} \quad \triangleleft \quad \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v) \tag{5.18}$$

через проекцию

$$\mathrm{pr}_{\|e_D} : \quad \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P'_-}. \tag{5.19}$$

Лемма 5.2. *Множество* $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ *из* (5.18) *является покрытием*

$$\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supset T'_- \tag{5.20}$$

объединения многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \ldots \cup T'_{D-1,-}$, *определенных в* (5.11).

Доказательство. Аналогично (5.6), рассмотрим две двумерные проекции

$$\begin{array}{llcl} \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}: & T(v) & \longrightarrow & S_{(1)}(v), \\ \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}: & T'(v) & \longrightarrow & S'_{(1)}(v). \end{array} \tag{5.21}$$

Из условий (3.6) и (3.9) приведенности звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ следует, что образ $S_{(1)}(v)$ является шестиугольником, разбитым

$$S_{(1)}(v) = Q_0 \cup Q_1 \cup Q_D$$

на прилегающие друг к другу единичный квадрат Q_0 и параллелограммы Q_1, Q_D, где $Q_k = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} T_k$. Этот же образ можно представить в виде

$$S_{(1)}(v) = Q_k$$

шестиугольной проекции параллелоэдров T_k для $k \neq 0, 1, D$. К образу же $S'_{(1)}(v)$ из (5.21) добавляется

$$S'_{(1)}(v) = S_{(1)}(v) \cup Q'_- \tag{5.22}$$

с наложением пятиугольник

$$Q'_- = Q'_{1,-} \cup Q'_{k,-},$$

где $Q'_{1,-} = \mathrm{pr}_{\|e_2} T'_{1,-}$, $Q'_{k,-} = \mathrm{pr}_{\|e_2} T'_{k,-}$ для $k \neq 0, 1, D$.

Возвращаемся к определенному в (5.18) множеству $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} = \widehat{\mathcal{P}} \cup \widehat{\mathcal{C}}$ из полиэдральной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)$. Рассмотрим его проекцию $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$. Из разложения (5.16), построения (5.19) множества $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ и вида (5.22) пятиугольника Q'_- следует включение

$$\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \supseteq Q'_-, \tag{5.23}$$

так как в силу (3.6) и (3.9) проекции векторов l_j равны

$$\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} l_j = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} v_0 - l_{j1} \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2} v_1 = (x_1, x_D) - l_{j1}(1, 0), \tag{5.24}$$

где $x_1 < 0$, $-1 < x_D < 0$ и коэффициенты $l_{j1} = 0, 1, 2, \ldots$ ввиду равенств (5.17). Покрытия множества Q'_- квадратом Q_0 и параллелограммом Q_1 очевиды, для остальных случаев снова рассматриваем проекции (5.21), отбрасывая векторы e_D и e_k для $k = 2, \ldots, D-1$.

Из включений (5.14) и (5.23) вытекает, что множество $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ покрывает (5.20) объединение многогранников $T'_- = T'_{1,-} \cup \ldots \cup T'_{D-1,-}$. □

§6. Доказательство теоремы 3.2

6.1. Точки орбиты $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$.

Лемма 6.1. *Пусть $T' = T(v')$ – развертка тора* (2.25) *для производной $v' = v^{\{0,D\}}$ приведенной звезды v и $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m})$ – орбита* (2.29) *начальной точки $x_0 = 0$ относительно сдвига тора $S = S_\alpha$ из* (2.13). *Тогда имет место равенство*

$$T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) = \varnothing. \tag{6.1}$$

Доказательство. В (5.10) производная развертка T' была разложена $T' = T'_{\mathrm{new}} \sqcup T'_{\mathrm{old}}$ на старую часть $T'_{\mathrm{old}} = T' \cap T$ и новую $T'_{\mathrm{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \ldots \cup T'_{D-1,-}$, состоящую из дальних от начала координат половин $T'_{1,-}, \ldots, T'_{D-1,-}$ параллелепипедов $T'_1, \ldots, T'_{D-1}$.

Поскольку выполняется включение $T'_{\mathrm{old}} \subset T$ и $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T^{\mathrm{int}} = \varnothing$, то можем записать

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{old}} = \varnothing. \tag{6.2}$$

В силу предложения 4.1 и разбиения (5.11) для доказательства равенства

$$\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}) \cap T'^{\mathrm{int}}_{\mathrm{new}} = \varnothing \tag{6.3}$$

нужно проверить выполнимость равенства

$$V_{\mathcal{T}} \cap T'^{\mathrm{int}}_- = \varnothing. \tag{6.4}$$

Из леммы 5.2 следует, что в область T'^{int}_- могут попасть только те вершины из $V_{\mathcal{T}}$, которые являются вершинами многогранников типа $T_0, T_1, \ldots, T_{D-1}$ из разбиения $\mathcal{T}$.

Чтобы убедиться в справедливости (6.4), нужно рассмотреть двумерные проекции $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}\, T$ и $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}\, T'$. Пятиугольная проекция $Q'_- = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}\, T'_-$ содержит пять вершин и одну внутреннюю точку – проекции вершин многогранника T'_-. Из рассуждений леммы

5.2 и условия $-1 < x_D < 0$ следует, что вершины квадратов $Q_0[l''_{0j}]$ и параллелограммов $Q_1[l''_{1j}]$, где $l''_{kj} = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_2}\, l_{kj}$, могут попадать только в указанные пять граничных вершин проекции Q'_-. Рассматривая аналогичные проекции, последовательно отбрасывая векторы e_D и e_k для $k = 2,\ldots,D-1$, убеждаемся, что вершины остальных параллелограммов $Q_k[l''_{kj}]$ также могут попадать только в те же самые пять вершин соответствующих пятиугольников Q'_-. Отсюда получаем равенство (6.4), а значит, и (6.3).

Утверждение леммы 6.1 вытекает из равенств (5.10), (6.2) и (6.3). □

6.2. Точки орбиты $\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}')$.

Лемма 6.2. *Пусть* $\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}')$ *– часть орбиты* $\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m}')$ *из* (4.2), *содержащаяся в исходной развертке тора* $T = T(v)$, *где порядок* $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + m_0$ *был определен в* (4.4). *Тогда в условиях леммы* 6.1 *выполняется равенство*

$$\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}') \cap T'^{\mathrm{int}} = \varnothing. \tag{6.5}$$

Доказательство. Из построения (2.25) производной развертки тора $T' = T(v')$ следует, что точки $(x,y,\ldots,z)$ из ее замыкания $\overline{T}'$ имеют максимальную координату

$$z = z(v'_D) = x_D + 1 > 0. \tag{6.6}$$

Определенную в (4.1) точку $x_{\mathbf{m}} = (x,y,\ldots,z)$ можно записать в виде

$$x_{\mathbf{m}} = (x,y,\ldots,z) = v_0+v_1+\ldots+v_D = v'_1+\ldots+v'_D = (x_1+1,\ldots,x_D+1). \tag{6.7}$$

Данная точка является вершиной многогранника $\overline{T}'$. Она характеризуется условием:

среди всех точек из $\overline{T}'$ *с* D*-координатой* (6.6) *точка* $x_{\mathbf{m}}$ *из* (6.7) *имеет наибольшее значение суммы первых* $D-1$ *координат*

$$x + y + \ldots = x_1 + x_2 + \ldots + 2.$$

Движение точки $x_{\mathbf{m}}$ по орбите $\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}')$ происходит согласно диаграмме (4.12) и сводится к сдвигам на векторы $v_1 = e_1,\ldots, v_{D-1} = e_{D-1}$. Следовательно, при таком движении у образов точки $x_{\mathbf{m}}$ сумма первых $D-1$ координат $x + y + \ldots$ увеличивается каждый раз на 1.

Отсюда вытекает, что все образы x_* точки $x_{\mathbf{m}}$ из орбиты $\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}')$, кроме самой начальной точки $x_{\mathbf{m}}$, не принадлежат многограннику $\overline{T}'$, что доказывает утверждение леммы (6.5). □

6.3. Точки орбиты $\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0,\mathbf{m}')$.

Лемма 6.3. *Пусть* $\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0,\mathbf{m}')$ *– часть орбиты* $\mathrm{Orb}^+_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m}')$ *из* (4.17), *дополняющая орбиту* $\mathrm{Orb}^+_T(0,\mathbf{m}')$ *из леммы* 6.2. *Тогда для этой части* $\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0,\mathbf{m}')$ *снова справедливо равенство*

$$\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0,\mathbf{m}') \cap T'^{\mathrm{int}} = \varnothing. \tag{6.8}$$

Доказательство. Из доказательства леммы 6.2 следует, что точки x_* орбиты $\mathrm{Orb}^+_{T^-}(0,\mathbf{m}')$ содержатся в D-мерных кубах $T^j_0 = S^j(T_0)$ или в параллелепипедах $T^j_k = S^j(T_k)$ с номерами $k = 1,\dots,D-1$. Поэтому некоторая точка x_* может попасть в разветку T', только если содержащий ее многогранник T^j_k пересекается с T'.

Поскольку нас в данном случае интересует лишь новая область $T'_{\mathrm{new}} = T'_- = T'_{1,-} \cup \ldots \cup T'_{D-1,-}$ из производной развертки тора T', состоящая из $D-1$ дальних от начала координат половин $T'_{1,-} \subset T'_1, \dots, T'_{D-1,-} \subset T'_{D-1}$ параллелепипедов $T'_1, \dots, T'_{D-1}$, то будем следить за попаданием точки

$$x_* \in T'_- \tag{6.9}$$

в указанную область T'_-.

Если $x_* \in T^j_k$ и выполняется условие (6.9), то по лемме 5.2 и (5.24) многогранник T^j_k будет содержаться

$$T^j_k \triangleleft \widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-} \tag{6.10}$$

в полиэдраной поверхности $\widehat{\mathcal{S}}_{(D)}(v)|_{P'_-}$ из (5.18) в качестве одного из образующих ее многогранников.

Пусть

$$x_{\mathbf{m}+b_1m_1+\ldots+b_{D-1}m_{D-1}} \quad \in \quad T_{k_b} \tag{6.11}$$

– начальная точка из диаграммы (4.12), из которой получается сдвигами точка $x_* \in T^j_k$.

Случай I: $T_{k_b} = T_k$ **для** $k = 1,\dots,D-1$. Перейдем от многогранников T^j_k к их $\mathrm{pr}_{\|e_D}$-проекциям

$$P^j_k = \mathrm{pr}_{\|e_D}\, T^j_k$$

– параллелепипедам, среди которых P_0^j – единичные $(D-1)$-мерные кубы. Из (6.10) следует, что параллелепипеды $P_1,\dots, P_{D-1}$ и P_k^j соединены *цепью* $\mathcal{C}_{x_*}$ последовательно приложенных друг к другу кубов $P_0[l_0']$ из разбиения $\mathcal{S}_{(D)}(v)|_{P_-'} = \mathcal{P}\cup\mathcal{C}$, т.е.

$$P_0[l_0'] \cap P_-' \neq \varnothing. \tag{6.12}$$

Векторы l_0' из (6.12) имеют вид

$$l_0' = v_0' - l_{j1}v_1' - \ldots - l_{j(D-1)}v_{D-1}' \tag{6.13}$$

с коэфициентами $l_{0k} = 0,1,2,\ldots$, при этом $l_{01}+\ldots+l_{0(D-1)} \geqslant 1$.

Данная цепь $\mathcal{C}_{x_*}$ однозначно задает последовательность сдвигов на векторы

$$v_0', -v_{k_1}', -v_{k_2}', \ldots, \tag{6.14}$$

при этом $k_j = 1,\ldots,D-1$ и $v_1' = (1,\ldots,0),\ldots,$ $v_{D-1}' = (0,\ldots,1)$ – единичные векторы размерности $D-1$. Пусть в последовательности (6.14) вектор v_k' встречается c_k раз. Тогда для $c = (c_1,\ldots,c_{D-1})$ точка

$$x_*' = x_{j(c)}' \quad \in \quad P_-', \tag{6.15}$$

где $x_*' = \mathrm{pr}_{\|e_D}\, x_*$, имеет порядок

$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \ldots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1},$$

так как в силу (4.4) выполняется равенство

$$\begin{aligned}(\mathbf{m} + b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1}m_{D-1}) &+ (m_0 - c_1 m_1 - \ldots - c_{D-1}m_{D-1})\\ &= \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \ldots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1}.\end{aligned}$$

Обозначим $m(c) = c_1 m_1 + \ldots + c_{D-1}m_{D-1}$. Возможны три случая:

$$\begin{aligned} m(c) &< b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1}m_{D-1},\\ m(c) &= b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1}m_{D-1},\\ m(c) &> b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1}m_{D-1}.\end{aligned} \tag{6.16}$$

В первом случае точка $x_*' = x_{j(c)}'$ из (6.15) имеет номер $j(c) > \mathbf{m}'$ и поэтому x_* не входит в орбиту $\mathrm{Orb}^{+}_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m}')$.

Во втором случае (6.16) точка

$$x_*' = x_{\mathbf{m}'}' \quad \in \quad P_-^{\prime\,\mathrm{int}} \tag{6.17}$$

– внутренняя точка из области P_-'. У нее будет максимальный номер $j(c) = \mathbf{m}'$, задающий границу для точек из орбиты $\mathrm{Orb}'_{\mathrm{new}}(0,\mathbf{m}')$, и по определению точка x_* в нее не входит.

Чтобы рассмотреть третий случай из (6.16), выделим в пространстве $\mathbb{R}^{D-1}$ бесконечный *брус* Р, параллельный вектору

$$v_0' = (x_1, \ldots, x_{D-1}) = \mathrm{pr}_{\| e_D}\ v_0$$

имеющий сечение

$$\overline{T}_{v_1'', \ldots, v_{D-1}''} = \mathrm{pr}_{\| v_0'}\ (\mathrm{pr}_{\| e_D}\ T_0) = \mathrm{pr}_{\| v_0'}\ T_0^{D-1}, \tag{6.18}$$

где T_0^{D-1} – единичный $(D-1)$-мерный куб, т.е. сечение (6.18) является замкнутым $(D-2)$-мерным параллелепипедом

$$\overline{T}_{v_1'', \ldots, v_{D-1}''} = \quad \{\lambda_1 v_1'' + \ldots + \lambda_{D-1} v_{D-1}''; \qquad 0 \leqslant \lambda_k \leqslant 1\},$$

натянутым на проекции единичных векторов $v_1'' = \mathrm{pr}_{\| v_0'}\ v_1', \ldots, v_{D-1}'' = \mathrm{pr}_{\| v_0'}\ v_{D-1}'$. Брус Р включает в себя

$$S_{(D)}'(v) = S_{(D)}(v) \cup P_-' \subset \mathrm{P} \tag{6.19}$$

все множество из (5.13).

Пусть точка

$$x_*' = x_{j(c)}' \quad \in \quad P_-' \tag{6.20}$$

для $c = (c_1, \ldots, c_{D-1})$, удовлетворяющему третьему условию из (6.16). Имеем

$$x_{\mathbf{m}'}' = x_{\mathbf{m}}' + v_0' \tag{6.21}$$

и

$$\begin{aligned} x_*' = x_{j(c)}' \quad &= x_{\mathbf{m}}' + (b_1 v_1' + \ldots + b_{D-1} v_{D-1}') - (c_1 v_1' + \ldots + c_{D-1} v_{D-1}') + v_0' \\ &= x_{\mathbf{m}'}' + (b_1 v_1' + \ldots + b_{D-1} v_{D-1}') - (c_1 v_1' + \ldots + c_{D-1} v_{D-1}'). \end{aligned} \tag{6.22}$$

Для точек $x = (x_1, \ldots, x_{D-1}) \in \mathbb{R}^{D-1}$ определим *уровень*

$$l(x) = m_1 x_1 + \ldots + m_{D-1} x_{D-1}.$$

В силу равенства (6.22) записываем

$$\begin{aligned} l(x_*') &= l(x_{j(c)}') \\ &= l(x_{\mathbf{m}'}') + l(b_1 v_1' + \ldots + b_{D-1} v_{D-1}') - l(c_1 v_1' + \ldots + c_{D-1} v_{D-1}') \\ &= l(x_{\mathbf{m}'}') + (b_1 m_1 + \ldots + b_{D-1} m_{D-1}) - (c_1 m_1 + \ldots + c_{D-1} m_{D-1}). \end{aligned}$$

Поскольку по условию выполняется третье неравенство из (6.16), то

$$l(x_*') = l(x_{j(c)}') < l(x_{\mathbf{m}'}') \tag{6.23}$$

и, значит, точка (6.20) лежит ниже гиперплоскости

$$m_1x_1 + \ldots + m_{D-1}x_{D-1} = l(x'_{\mathbf{m}'}), \tag{6.24}$$

проходящей через точку $x'_{\mathbf{m}'}$.

Используя равенство (6.22), представим точку $x'_* = x'_{j(c)}$ из (6.20) в виде разности

$$x'_{j(c)} = x'_{\mathbf{m}'} - \Delta_c \tag{6.25}$$

с вектором отклонения

$$\begin{aligned}\Delta_c &= (c_1v'_1 + \ldots + c_{D-1}v'_{D-1}) - (b_1v'_1 + \ldots + b_{D-1}v'_{D-1}) \\ &= (c_1 - b_1, \ldots, c_{D-1} - b_{D-1}),\end{aligned}$$

имеющим целочисленные координаты. В силу неравенства (6.23) уровень вектора Δ_c удовлетворяет условию

$$l(\Delta_c) > 0. \tag{6.26}$$

Введем функцию $p(\Delta_c)$, равную -1 или 0, если хотя бы две координаты вектора Δ_c имеют разные знаки или хотя бы одна координата нулевая, и равную 1 в остальных случаях. В зависимости от значения $p(\Delta_c)$ разберем три возможных случая. Не уменьшая общности, далее будем следить за первыми двумя координатами $(D-1)$-мерного вектора Δ_c, при необходимости переставляя их местами.

Случай 1:

$$p(\Delta_c) < 0. \tag{6.27}$$

Действуя проекцией

$$\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3} : \quad \mathbb{R}^{D-1} \quad \longrightarrow \quad \mathbb{R}^2$$

на множества из (6.19), перейдем к их двумерным проекциям

$$S'_{(D,\ldots,3)}(v) = S_{(D,\ldots,3)}(v) \cup P'^2_- \subset \mathrm{P}^2, \tag{6.28}$$

где $\mathrm{P}^2 = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,\mathrm{P}$ – бесконечная полоса, проходящая через точки $(1,0)$ и $(0,1)$ параллельно вектору $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,v'_0 = (x_1,x_2)$, а $P'^2_- = \mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,P'_-$ – шестиугольник, разбитый на два параллелограмма.

В силу (6.17) точка $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,x'_{\mathbf{m}'}$ является внутренней для полосы P^2. Пусть для начала $\Delta_c = \pm(1,-1,\ldots)$. Тогда точка $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,x'_{j(c)}$ должна выйти за пределы полосы P^2, что противоречит условию (6.20). При других векторах вида $\Delta_c = (*,*,\ldots)$ с условием (6.27) точка $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\,x'_{j(c)}$ тем более выходит из полосы P^2.

Случай 2:
$$p(\Delta_c) = 0. \tag{6.29}$$
Такой вектор Δ_c не может нулевым, т.к. иначе будет выполняться равенство из (6.16). Отсюда и условия (6.29) следует, что вектор Δ_c имеет как нулевые, так и ненулевые координаты, причем вторые одного знака. Этот знак не может быть отрицательным. В противном случае нарушается неравенство (6.26) и точка $x'_{j(c)}$ поднимется выше гиперплоскости (6.24).

Поэтому вектор Δ_c имеет вид $\Delta_c = (1, 0, \ldots)$. При таком Δ_c проекция $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{j(c)}$ точки (6.25) попадает в крайнюю левую вершину $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{\mathbf{m}'-m_1}$, где $x'_{\mathbf{m}'-m_1} = \mathrm{pr}_{\|e_D}\, x_{\mathbf{m}'-m_1}$, шестиугольника P'^2_- из (6.28), т.е.
$$\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{j(c)} \notin P'^{2\,\mathrm{int}}_- \tag{6.30}$$
и, значит, $x_{j(c)} \notin T'^{\mathrm{int}}$. Если же первая координата у вектора Δ_c будет > 1, то проекция $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{j(c)}$ выйдет из полосы P^2 и снова будет выполняться (6.30).

Случай 3:
$$p(\Delta_c) > 0. \tag{6.31}$$
Из использованных в случае 2 рассуждений следует, что вектор Δ_c с условием (6.31) должен быть вида $\Delta_c = (1, 1, \ldots)$. Теперь проекция $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{j(c)}$ попадает в крайнюю левую и нижнюю вершину $\mathrm{pr}_{\|e_{D-1},\ldots,e_3}\, x'_{\mathbf{m}'-m_1-m_2}$ шестиугольника P'^2_-. Поэтому при условии (6.31) также будет выполняться свойство (6.30).

Итак, для случая $T_{k_b} = T_k$, где $k = 1, \ldots, D-1$, лемма 6.3 доказана.

Случай II: $T_{k_b} = T_0$**.** Теперь цепь $\mathcal{C}_{x_*}$ из (6.14) для $c = (c_1, \ldots, c_{D-1})$ будет порождать точку
$$x'_* = x'_{j(c)} \quad \in \quad P'_- \tag{6.32}$$
порядка
$$j(c) = \mathbf{m}' + (b_1 - c_1)m_1 + \ldots + (b_k - c_k - 1)m_k + \ldots + (b_{D-1} - c_{D-1})m_{D-1}, \tag{6.33}$$
если квадрат P_0^j прикладывается к последнему $(D-1)$-мерному кубу из цепи $\mathcal{C}_{x_*}$ по $(D-2)$-мерной грани, ортогональной вектору v'_k. Обозначим
$$m(c) = c_1 m_1 + \ldots + (c_k - 1)m_k + \ldots + c_{D-1}m_{D-1} \tag{6.34}$$

в соответствии с тем, какое из условий в (6.33) выполняется. Далее следует расматреть три случая (6.16) по схеме (6.17)–(6.31), заменяя функцию $m(c)$ на модифицированную (6.34).

Таким образом, для случая $T_{k_b} = T_0$ лемма 6.3 также доказана, что вместе с предыдущим случаем полность доказывает лемму 6.3. $\square$

6.4. Окончание доказательства теоремы 3.2. В теореме 3.2 утверждается, что $\{0, D\}$-производная звезда $v' = v^{\{0,D\}}$ вкладывается $v' \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ в тор $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ относительно сдвига S в предположении вложимости $v \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ исходной приведенной звезды v.

При переходе на язык перекладывающихся разверток $T = T(v)$ тора $\mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$ с векторами перекладывания v_0, $v_1, \ldots$, v_D из звезды $v = \{v_0, v_1, \ldots, v_D\}$ приведенное выше утверждение означает вложимость

$$T' \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}} \tag{6.35}$$

производной развертки тора $T' = T'(v)$, где развертка $T'(v) = T(v')$ была определена в (2.25), при условии $T \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D_{\mathcal{L}}$.

По критерию 2) теоремы 2.2 вложимость (6.35) равносильна условию

$$T'^{\mathrm{int}} \cap \mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}') = \varnothing, \tag{6.36}$$

где $\mathrm{Orb}^+(0, \mathbf{m}')$ – орбита (2.29) начальной точки $x_0 = 0$ порядка $\mathbf{m}' = \mathbf{m} + m_0$ из (4.4). Условие же (6.36) посредством разбиений (4.5) и (4.17) сводится к проверке равенств (6.1), (6.5) и (6.8) из лемм 6.1–6.3, что и доказывает теорему 3.2. $\square$

§7. Возвратные отображения

7.1. Базисный симплекс и его симметрии. Возвратные отображения – это нормированные дифференцирования (1.9). Основной областью для нас будет замкнутый D-мерный *симплекс* $\triangle = \triangle_D$ с вершинами в точках $(0, \ldots, 0)$, $(1, \ldots, 0), \ldots$, $(0, \ldots, 1)$ из пространства $\mathbb{R}^D$. Обозначим через $S_\triangle$ *группу* его аффинных симметрий. Она сопряжена с группой метрических симметрий *правильного симплекса* $\triangle'_D \subset \mathbb{R}^{D+1}$ с вершинами $(1, 0, \ldots, 0)$, $(0, 1, \ldots, 0), \ldots$, $(0, 0, \ldots, 1)$ из $\mathbb{R}^{D+1}$. Чтобы явным образом описать указанную связь, зададим вложение

$$\begin{aligned} \mathrm{em}: \quad \mathbb{R}^D \supset \triangle_D \quad &\overset{\longrightarrow}{\sim} \quad \triangle'_D \subset \mathbb{R}^{D+1}: \\ x = (x_1, \ldots, x_D) \quad &\mapsto \quad x' = (x'_1, \ldots, x'_D, x'_{D+1}), \end{aligned} \tag{7.1}$$

где $x'_i = x_i$ для $1 \leqslant i \leqslant D$ и $x'_{D+1} = 1 - x_1 - \cdots - x_D$.

Симметрии правильного симплекса

$$\sigma : \quad \triangle'_D \quad \overrightarrow{\sim} \quad \triangle'_D \tag{7.2}$$

задаются перестановками координат точек

$$x' \quad \to \quad \sigma x' = (x'_{\sigma(1)}, x'_{\sigma(2)}, \ldots, x'_{\sigma(D+1)}), \tag{7.3}$$

где σ принадлежат группе перестновок S_{D+1} из $D+1$ элемента $1, \ldots, D+1$. Симметрии (7.2) будут изометриями правильного симплекса $\triangle'_D$.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \triangle_D \ni x & \xrightarrow{\text{em}} & x' \in \triangle'_D \\ \sigma \downarrow & & \downarrow \sigma \\ \triangle_D \ni \sigma x & \xleftarrow{\text{pr}} & \sigma x' \in \triangle'_D \end{array} \tag{7.4}$$

Здесь pr обозначает *проекцию*

$$\text{pr} : \quad \mathbb{R}^{D+1} \ni x' \quad \to \quad (x'_1, \ldots, x'_D) \in \mathbb{R}^D, \tag{7.5}$$

а левая вертикальная стрелка в диаграмме (7.4) означает отображение, определяемое из условия коммутативности диаграммы равенством

$$\sigma x = \text{pr}(\sigma x'), \tag{7.6}$$

где $\sigma \in S_{D+1}$ и $x' = \text{em}(x)$. Используя диаграмму (7.4), можем отождествить

$$S_\triangle \overrightarrow{\sim} S_{D+1} : \quad s = s_\sigma \quad \overrightarrow{\sim} \quad \sigma \tag{7.7}$$

группу аффинных симметрий $S_\triangle$ симплекса $\triangle_D$ с группой перестновок S_{D+1}.

Отсюда вытекает, что группа симметрий $S_\triangle$ имеет порядок

$$\sharp S_\triangle = (D+1)! \tag{7.8}$$

и все симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ распадаются на два класса собственных и несобственных симметрий

$$\text{sign}(s) = \pm 1 \tag{7.9}$$

в зависимости от знака $\text{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{D+1}.

Согласно (7.6) и (7.1) в координатах $(x_1, \ldots, x_D) \in \triangle_D$ относительно декартова базиса $e_1 = (1, \ldots, 0), \ldots, e_D = (0, \ldots, 1)$ симметрии $s = s_\sigma$ из $S_\triangle$ записываются следующим явным образом:

$$s_\sigma(x_1,\dots,x_D)=(\sigma x_1,\dots,\sigma x_D), \tag{7.10}$$

где

$$\sigma x_i=\begin{cases} x_{\sigma(i)}, & \text{если} \quad \sigma(i)\leqslant D,\\ 1-x_1-\dots-x_D, & \text{если} \quad \sigma(i)=D+1.\end{cases} \tag{7.11}$$

7.2. Разбиения базисного симплекса. Выделим в симплексе $\triangle=\triangle_D$ *открытые области*

$$\triangle_k^{kl}, \quad \triangle_l^{kl} \quad \subset \quad \triangle \tag{7.12}$$

с целыми индексами $0\leqslant k<l\leqslant D$. Замыкания областей $\overline{\triangle}_k^{kl}$, $\overline{\triangle}_l^{kl}$ разбивают симплекс

$$\triangle=\overline{\triangle}_k^{kl}\cup\overline{\triangle}_l^{kl} \tag{7.13}$$

и пересекаются $\overline{\triangle}_k^{kl}\cap\overline{\triangle}_l^{kl}=\mu^{kl}$ по *медианной гиперплоскости* μ^{kl}, проходящей через концы векторов $e_{kl}=\frac{1}{2}(e_k+e_l)$ и e_m для всех $0\leqslant m\leqslant D$, $m\neq k,l$, где $e_0=(0,\dots,0)$. Нижние индексы в $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ указывают на принадлежность вершин с номерами k и l соответственно $\overline{\triangle}_k^{kl}$ и $\overline{\triangle}_l^{kl}$.

Таким образом, области (7.12) представляют собою открытые полусимплексы, замыкание объединения которых

$$\triangle^{kl}=\triangle_k^{kl}\sqcup\triangle_l^{kl} \tag{7.14}$$

совпадает со всем симплексом $\triangle$ и при этом $\triangle_k^{kl}\cap\triangle_l^{kl}=\varnothing$.

7.3. Нормированные дифференцирования звезд. Согласно условию (1.4) из критерия 1.1, каждая точка $x\in\triangle^{kl}$ задает звезду $w=\{w_0,w_1,\dots,w_D\}$ с лучами

$$w_m=e_m-x, \tag{7.15}$$

выходящими из центра x в вершины симплекса $\triangle$ с соответствующими номерами $0,1,\dots,D$.

При таком выборе центра существует производная звезда

$$w'=\{w'_0,w'_1,\dots,w'_D\}. \tag{7.16}$$

Если $x\in\triangle_k^{kl}$, то лучи в (7.16) имеют вид

$$w'_k=w_k, \quad w'_l=w_k+w_l \quad \text{и} \quad w'_m=w_m \quad \text{для} \quad m\neq k,l; \tag{7.17}$$

если же $x\in\triangle_l^{kl}$, то – вид

$$w'_k=w_k+w_l, \quad w'_l=w_l \quad \text{и} \quad w'_m=w_m \quad \text{для} \quad m\neq k,l. \tag{7.18}$$

Из условия $x \in \triangle^{kl}$ вытекает, что векторы

$$e'_1 = w'_1 - w'_0, \ldots, \quad e'_D = v'_D - v'_0 \tag{7.19}$$

образуют базис пространства $\mathbb{R}^D$. Пусть A^{kl} – матрица перехода

$$e' = eA^{kl} \tag{7.20}$$

от базиса $\{e_1, \ldots, e_D\}$ к базису $\{e'_1, \ldots, e'_D\}$ из (7.19). В равенстве (7.20) слева указана строка $e' = (e'_1 \ldots e'_D)$, а справа – произведение строки $e = (e_1 \ldots e_2)$ на $D \times D$-матрицу A^{kl}. Данная матрица имеет две *специализации*

$$A^{kl} = A^{kl}_k \quad \text{или} \quad A^{kl}_l \tag{7.21}$$

в зависимости от принадлежности x области $\triangle^{kl}_k$ или $\triangle^{kl}_l$:

для $1 \leqslant k < l \leqslant D$ –

$$A^{kl}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_1 & 0 \\ & \ddots & & \\ 0 & 1_{kk} & 1 - x_k & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0_{lk} & 1 - x_l & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & 0 & -x_D & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.22}$$

$$A^{kl}_l = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & 0 \\ \ddots & & & \\ 0 & 1 - x_k & 0_{kl} & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 1 - x_l & 1_{ll} & 0 \\ & & & \ddots \\ 0 & -x_D & 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{7.23}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant D$ –

$$A^{0l}_0 = \begin{pmatrix} 1 & -x_1 & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & 1 - x_l & 0 & \\ & & \ddots & \\ 0 & -x_D & 1 & \end{pmatrix}, \tag{7.24}$$

$$A_l^{0l} = \begin{pmatrix} 1+x_1 & x_1 & & x_1 & & x_1 \\ x_2 & 1+x_2 & & x_2 & & x_2 \\ & & \ddots & & & \\ -1+x_l & -1+x_l & & x_l & & -1+x_l \\ & & & & \ddots & \\ x_D & & & x_D & & 1+x_D \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

В координатах формула перехода (7.20) примет вид

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_D \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \end{pmatrix}. \tag{7.26}$$

Здесь, чтобы не усложнять обозначения, обратные матрицы $(A^{kl})^{-1}$ для A^{kl} обозначили через $\mathcal{A}^{kl}$. С помощью обратных матриц $\mathcal{A}^{kl}$ можно для производной звезды w' из (7.16) определить *нормированную звезду*

$$\mathbf{w}' = \{\mathbf{w}'_0, \mathbf{w}'_1, \ldots, \mathbf{w}'_D\} \tag{7.27}$$

с *центром* $x' = (x'_1, \ldots, x'_D)$, вычисляемым по формуле

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_D \end{pmatrix} = \mathcal{A}^{kl} \begin{pmatrix} -w'_{01} \\ \vdots \\ -w'_{0D} \end{pmatrix}, \tag{7.28}$$

где в правом столбце использованы координаты вектора

$$w'_0 = (w'_{01}, \ldots, w'_{0D})$$

из производной звезды $w' = \{w'_0, w'_1, \ldots, w'_D\}$, определнной в (7.16). Если вектор w'_0 сохраняется неизменным $w'_0 = w_0$, то в формуле (7.26) выбирается центр $x = (x_1, \ldots, x_D) = -w_0 = -w'_0$ первоначальной звезды w. Нормированная звезда $\mathbf{w}'$, как и w, имеет лучи

$$\mathbf{w}'_m = e_m - x' \tag{7.29}$$

для $0 \leqslant m \leqslant D$, выходящими теперь уже из нового центра x' в вершины симплекса $\triangle$. Определение (7.27) звезды $\mathbf{w}'$ корректно, поскольку по определению (1.4) точка x' принадлежит внутренней области $\triangle^{\mathrm{int}}$ треугольника $\triangle$.

В явном виде координаты $(x'_1, \ldots, x'_D) = \delta^{kl}(x_1, \ldots, x_D)$ центра x' нормированной звезды $\mathbf{w}'$ из (7.27) вычисляются через *дробно-линейные преобразования*:

для $1 \leqslant k < l \leqslant D$ –

$$\begin{aligned} \delta_k^{kl}(x_1,\dots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_l},\dots,\tfrac{x_k-x_l}{1-x_l},\dots,\tfrac{x_D}{1-x_l}\right), \\ \delta_l^{kl}(x_1,\dots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_k},\dots,\tfrac{x_l-x_k}{1-x_k},\dots,\tfrac{x_D}{1-x_k}\right), \end{aligned} \tag{7.30}$$

где элементы $\frac{x_k-x_l}{1-x_l}$ и $\frac{x_l-x_k}{1-x_k}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k=0$ и $1 \leqslant l \leqslant D$ –

$$\begin{aligned} \delta_0^{0l}(x_1,\dots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{1-x_l},\dots,\tfrac{x_D}{1-x_l}\right), \\ \delta_l^{0l}(x_1,\dots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{x_1+\dots+x_D},\dots,\tfrac{x_1+\dots+2x_l+\dots+x_D-1}{x_1+\dots+x_D},\dots,\tfrac{x_D}{x_1+\dots+x_D}\right), \end{aligned} \tag{7.31}$$

где в последнем случае средний элемент стоит на l месте.

Преобразования (7.30), (7.31) представляют собою многомерный аналог одномерных [8], [9] и двумерных возвратных отображений [11].

7.4. Возвратные отображения. Дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) задают

$$\triangle \xrightarrow{\delta^{kl}} \triangle: \quad x \mapsto x' = \delta^{kl}(x) \tag{7.32}$$

$\frac{(D+1)D}{2}$ отображений δ^{kl}, нумеруемых индексами $0 \leqslant k < l \leqslant D$:

$$\delta^{kl}(x) = \begin{cases} \delta_k^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_k^{kl}, \\ \delta_l^{kl}(x), & \text{если} \quad x \in \triangle_l^{kl}, \end{cases} \tag{7.33}$$

где $\triangle_k^{kl}$ и $\triangle_l^{kl}$ – открытые области из базисного симплекса $\triangle$, определенные в (7.12). Таким образом, областью определения отображения δ^{kl} является открытая двусвязная область $\triangle^{kl} \subset \triangle$ из (7.14) и, значит, δ^{kl} определены почти всюду в симплексе $\triangle$, исключая его границы и медианную гиперплоскость μ^{kl}, определенную в (7.13).

§8. Дробно-линейные и проективные преобразования

8.1. Матрицы возвратных отображений. На языке $(D+1,D+1)$-матриц

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,D+1} \\ & \dots & \\ a_{D+1,1} & \dots & a_{D+1,D+1} \end{pmatrix}$$

дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) удобно переписать в свернутом виде

$$M\langle x\rangle = \left(\frac{\lambda_1(M,x)}{\lambda_{D+1}(M,x)},\dots,\frac{\lambda_D(M,x)}{\lambda_{D+1}(M,x)}\right), \tag{8.1}$$

где

$$\lambda_i(M,x) = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{iD}x_D + a_{i,D+1} \tag{8.2}$$

– линейные формы. В данном случае – неоднородные формы, поскольку мы здесь неявно используем специализацию $x_{D+1} = 1$, которая будет объяснена далее в п. 4.5. Последнюю форму $\lambda(M,x) = \lambda_{D+1}(M,x)$ из (8.2) назовем *фактором-автоморфности* отображения $x \mapsto M\langle x\rangle$.

В матричной форме (8.1) удобно представляется ассоциативное свойство таких преобразований

$$M_1\langle M_2\langle x\rangle\rangle = (M_1 \cdot M_2)\langle x\rangle, \tag{8.3}$$

где через $M_1 \cdot M_2$ обозначается произведение матриц M_1 и M_2.

Поскольку $E_{D+1}\langle x\rangle = x$ для единичной матрицы E_{D+1} порядка D+1, то из свойства (8.3) следует, что для $x \mapsto x' = M\langle x\rangle$ обратным отображением будет

$$x' \mapsto x = M^{-1}\langle x'\rangle. \tag{8.4}$$

Согласно определению (8.1), дробно-линейные преобразования (7.30), (7.31) имеют следующие матрицы:

для $0 < k < l \leqslant D$ –

$$\begin{gathered}\widehat{\delta}_k^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & -1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \widehat{\delta}_l^{kl} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};\end{gathered} \tag{8.5}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant D$ –

$$\widehat{\delta}_0^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\delta}_l^{0l} = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{1} & 2_{ll} & \mathbf{1} & -1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ \mathbf{1} & 1 & \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8.6}$$

где $\mathbf{1} = (11\ldots1)$ обозначают единичные строки соответствующих длин. Все матрицы (8.5), (8.6) имеют целые коэффициенты и единичный определитель и, следовательно, они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

8.2. Обратные возвратные отображения. Отображения δ^{kl} являются дважды накрывающими симплекс $\triangle$, а их специализации δ^{kl}_* задают уже биекции

$$\delta^{kl}_k : \triangle^{kl}_k \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}, \qquad \delta^{kl}_l : \triangle^{kl}_l \xrightarrow{\sim} \triangle^{\mathrm{int}}. \tag{8.7}$$

Поэтому для них существуют *обратные возвратные отображения*

$$\partial^{kl}_k : \triangle^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \triangle^{kl}_k, \qquad \partial^{kl}_l : \triangle^{\mathrm{int}} \xrightarrow{\sim} \triangle^{kl}_l. \tag{8.8}$$

Матрицами для отображений (8.8) будут обратные матрицы для соответствующих возвратных отображений (8.5), (8.6):

для $0 < k < l \leqslant D$ –

$$\begin{aligned}
\widehat{\partial}^{kl}_k &= \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 1_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
\widehat{\partial}^{kl}_l &= \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{kk} & 0 & 0_{kl} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{lk} & 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};
\end{aligned} \tag{8.9}$$

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant D$ –

$$\widehat{\partial}^{0l}_0 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{ll} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\partial}^{0l}_l = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ -\mathbf{1} & 0_{ll} & -\mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ -\mathbf{1} & -1 & -\mathbf{1} & 2 \end{pmatrix}. \tag{8.10}$$

Как уже отмечалось, все возвратные отображения δ^{kl}_* имеют унимодулярные матрицы (8.5), (8.6). Поэтому матрицы (8.9), (8.10) обратных отображений ∂^{kl}_* снова будут унимодулярными с единичным определителем.

Через дробно-линейные преобразования обратные отображения ∂_*^{kl} запишутся в следующем виде:

для $1 \leqslant k < l \leqslant D$ –

$$\begin{aligned} \partial_k^{kl}(x_1,\ldots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{x_l+1},\ldots,\tfrac{x_k+x_l}{x_l+1},\ldots,\tfrac{x_D}{x_l+1}\right),\\ \partial_l^{kl}(x_1,\ldots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{x_k+1},\ldots,\tfrac{x_k+x_l}{x_k+1},\ldots,\tfrac{x_D}{x_k+1}\right), \end{aligned} \tag{8.11}$$

где элементы $\frac{x_k+x_l}{x_l+1}$ и $\frac{x_k+x_l}{x_k+1}$ стоят соответственно на k и l местах;

для $k = 0$ и $1 \leqslant l \leqslant D$ –

$$\begin{aligned} \partial_0^{0l}(x_1,\ldots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{x_l+1},\ldots,\tfrac{x_D}{x_l+1}\right),\\ \partial_l^{0l}(x_1,\ldots,x_D) &= \left(\tfrac{x_1}{s+2},\ldots,\tfrac{s-x_l+1}{s+2},\ldots,\tfrac{x_D}{s+2}\right), \end{aligned} \tag{8.12}$$

где в последнем случае средний элемент $\frac{s-x_l+1}{s+2}$ стоит на l месте и $s = x_1 + \ldots + x_D$.

8.3. Матрицы симметрий базисного симплекса. Симметрии $s = s_\sigma$ из группы $S_\triangle$ базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$, определяемые формулой (7.10), также можно представить в матричной форме (8.1). Для них $(D+1, D+1)$-матрицами будут

$$\widehat{s} = \widehat{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & 1_{i,\sigma(i)} & \ldots & 0 & 0_{i,D+1} \\ & & \ldots & & & \\ -1 & \ldots & -1 & \ldots & -1 & 1_{j,D+1} \\ & & \ldots & & & \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & 1_{D+1,D+1} \end{pmatrix}. \tag{8.13}$$

Здесь i-строка состоит из 0, кроме элемента $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $\sigma(i)$ месте в случае $\sigma(i) \leqslant D$. Если $\sigma(j) = D + 1$, то строка с номером $j \leqslant D$ принимает иной вид $(-1,\ldots,-1,1)$. Последняя $(D+1)$-строка для всех $\sigma \in S_{D+1}$ имеет вид $(0,\ldots,0,1)$.

Матрицы (8.13) симметрий симплекса $\triangle_D$ отличаются от матриц возвратных отображений (8.5), (8.6) нижней строкой $(0,\ldots,0,1)$. Их определители вычисляются по формуле

$$\det(\widehat{s}_\sigma) = \operatorname{sign}(\sigma), \tag{8.14}$$

где справа указан знак $\operatorname{sign}(\sigma) = \pm 1$ соответствующей подстановки σ из S_{D+1}. Поэтому все матрицы симметрий (8.13) принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

Кроме самих матриц (8.13) нам потребуются еще их *однородные части* – верхние левые ($D \times D$)-блоки:

$$\check{s} = \check{s}_\sigma = \begin{pmatrix} & & \dots & & \\ 0 & \dots & 1_{i,\sigma(i)} & \dots & 0_{i,D} \\ & & \dots & & \\ -1 & \dots & -1 & \dots & -1_{j,D} \\ & & \dots & & \end{pmatrix}. \tag{8.15}$$

Матрицы (8.15) порождают группу $S_{\check{\triangle}}$ аффинных (однородных) симметрий центрированного симплекса $\check{\triangle} = \check{\triangle}_D$, получающегося сдвигом базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$ на вектор $\left(-\frac{1}{D+1}, \dots, -\frac{1}{D+1}\right)$. Следовательно, симплекс $\check{\triangle}$ имеет центр в начале координат $(0, \dots, 0)$ – неподвижной точке всех симметрий (8.15).

8.4. Полугруппа $\mathcal{D}$. Определим *полугруппу* $\mathcal{D}_\delta$ преобразований базисного симплекса $\triangle$, порожденную всеми возвратными отображениями δ^{kl}, где $0 \leqslant k < l \leqslant D$, а также определим *расширенную полугруппу* $\mathcal{D}$, добавляя к $\mathcal{D}_\delta$ все симметрии симплекса $s \in S_\triangle$. Каждое преобразование $\delta \in \mathcal{D}$ имеет свою *область определения* $\triangle(\delta) \subset \triangle$.

Пусть δ имеет разложение $\delta = \dots \delta^{kl} \dots s \dots$ и x – любая точка из области определения $\triangle(\delta)$. Тогда выбранная точка x однозначно задает *специализацию*

$$\delta_* = \delta_*(x) = \dots \delta_*^{kl} \dots s \dots \tag{8.16}$$

преобразования δ, где для каждого сомножителя δ^{kl}, входящего в разложение (8.16), указан нижний индекс $* = k$ или l. Поскольку индекс может принимать любое из двух указанных значений, то фиксированное преобразование δ может порождать 2^p различных *специализаций* δ_*, где p – количество сомножителей вида δ^{kl} из разложения (8.16). Любая из таких реализаций δ_* будет, в общем случае, иметь уже другую ме́ньшую *область определения* $\triangle(\delta_*) \subsetneq \triangle(\delta)$ по сравнению с областью определения $\triangle(\delta)$ исходного преобразования δ.

Пусть, например, специализация (8.16) имеет вид $\delta_* = \delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}$. Тогда принадлежность точки x области определения данной реализации $\triangle(\delta_*)$ означает, что определены следующие точки:

$$x_1 = \delta_{k_1}^{k_1 l_1}(x), \quad x_2 = \delta_{l_2}^{k_2 l_2}(x_1),$$

т.е. $x \in \triangle(\delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \triangle_{k_1}^{k_1 l_1}$ и $x_1 \in \triangle(\delta_{l_2}^{k_2 l_2}) = \triangle_{l_2}^{k_2 l_2}$, где области $\triangle_*^{kl}$ были определены в (7.12). С помощью матриц (8.9), (8.10) обратных отображений ∂_k^{kl} из (8.8) и дробно-линейных преобразований (8.1) область определения специализации δ_* можно записать в явном виде

$$\triangle(\delta_*) = \triangle(\delta_{l_2}^{k_2 l_2} \delta_{k_1}^{k_1 l_1}) = \widehat{\partial}_{k_1}^{k_1 l_1} \langle \widehat{\partial}_{l_2}^{k_2 l_2} \langle \triangle^{\mathrm{int}} \rangle \rangle. \tag{8.17}$$

По аналогии с (8.17), в общем случае специализации (8.16) область определения $\triangle(\delta_*)$ может быть представлена в виде

$$\triangle(\delta_*) = \ldots \langle \widehat{s}^{\,-1} \langle \ldots \widehat{\partial}_*^{kl} \langle \ldots \langle \triangle^{\mathrm{int}} \rangle \rangle \rangle \rangle, \tag{8.18}$$

где $\widehat{s}$ – матрицы (8.13) симметрий s треугольника $\triangle$.

8.5. Связь между дробно-линейными и проективными преобразованиями. Пусть

$$\mathbb{P}^D = \{\mu \cdot \widehat{x}; \quad \widehat{x} \in \mathbb{R}^{D+1} \setminus \{0\}, \mu \in \mathbb{R}^\times\}$$

– двумерное проективное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$. По определению оно состоит из классов коллинеарных векторов

$$\widetilde{x} = \{\mu \cdot \widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}^\times\}. \tag{8.19}$$

Здесь через $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ обозначена коммутативная группа ненулевых вещественных чисел.

Любая матрица M из линейной группы $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{R})$ задает проективное преобразование

$$M: \quad \widetilde{x} \quad \mapsto \quad \widetilde{x}_M \tag{8.20}$$

пространства $\mathbb{P}^D$, где

$$\widetilde{x}_M = M\widetilde{x} = \{\mu \cdot M\widehat{x}; \quad \mu \in \mathbb{R}, \mu \neq 0\}$$

и $M\widehat{x}$ обозначает произведение $(D+1, D+1)$-матрицы M на матрицу-столбец $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{D+1} \end{pmatrix}$. Проективная группа преобразований получается из группы $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{R})$ ее факторизацией

$$\mathrm{PGL}_{D+1}(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times.$$

Дробно-линейные преобразования (8.1) и проективные преобразования (8.20) пространства $\mathbb{P}^D$ связаны между собою следующей коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^D \ni x & \xrightarrow{M\langle\rangle} & x_M \in \mathbb{R}^D \\ \downarrow\sim & & \downarrow\sim \\ \mathbb{P}^D \ni \widetilde{x} & \xrightarrow{M} & \widetilde{x}_M \in \mathbb{P}^D, \end{array} \tag{8.21}$$

где обозначили $x_M = M\langle x\rangle$, а вертикальные стрелки обозначают отображение

$$\sim\colon x \mapsto \widetilde{x},$$

которое переводит точку $x = (x_1, \dots, x_D)$ в класс $\widetilde{x}$ из (8.19), содержащий элемент $\widehat{x}$, представленный в виде столбца

$$\widehat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{8.22}$$

8.6. Иррациональные точки. Аналогично определению (2.21) для векторов, точку $x = (x_1, \dots, x_D)$ из $\mathbb{R}^D$ назовем *иррациональной*, если числа

$$1, x_1, \dots, x_D \quad \textit{линейно независимы над кольцом} \quad \mathbb{Z}. \tag{8.23}$$

Лемма 8.1. *Если точка $x = (x_1, \dots, x_D)$ иррациональна* (8.23) *и матрица M принадлежит целочисленной унимодулярной группе* $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$, *то*

1) *для точки x определен ее образ $M\langle x\rangle$ относительно дробно-линейного отображения* (8.1); *и*

2) *соответствующая точка $x' = M\langle x\rangle$ снова будет иррациональной.*

Доказательство. 1. Используя для $x' = (x'_1, \dots, x'_D) = M\langle x\rangle$ запись (8.1), имеем

$$x'_1 = \frac{\lambda_1(M, x)}{\lambda(M, x)}, \dots, x'_D = \frac{\lambda_D(M, x)}{\lambda(M, x)} \tag{8.24}$$

со знаменателем

$$\lambda(M, x) = \lambda_{D+1}(M, x) = a_{D+1,1}x_1 + \ldots + a_{D+1,D}x_D + a_{D+1,D+1}, \tag{8.25}$$

равному фактору-автоморфности (8.2) отображения $x \mapsto M\langle x\rangle$. Поскольку $x = (x_1, \ldots, x_D)$ – иррациональная точка и матрица M имеет целочисленные коэффициенты a_{ij}, то $\lambda(M, x) \neq 0$ по определению (8.23), т.к. коэффициенты в (8.25) не могут все быть равными нулю. Таким образом, точка $x' = M\langle x\rangle$ существует.

2. Так как фактор-автоморфности $\lambda(M, x) \neq 0$, то условие линейно независимости $x'_1, \ldots, x'_D$, 1 над $\mathbb{Z}$ расширения чисел из (8.24) равносильно линейной независимости другой совокупности чисел

$$\lambda_1(M, x), \ldots, \lambda_D(M, x), \lambda(M, x),$$

а это вытекает из равенств (8.2) и линейной независимости строк у матрицы $M \in \mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$. □

§9. Периодические точки

9.1. Неподвижные точки и собственные значения.

Теорема 9.1. 1. *Пусть x является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}$ с областью определения $\triangle(\delta)$, т.е. выполняются условия*

$$x \in \triangle(\delta) \tag{9.1}$$

и

$$\delta x = x. \tag{9.2}$$

Тогда имеет место матричное равенство

$$M\widehat{x} = \lambda\widehat{x} \tag{9.3}$$

для $\widehat{x} = \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$ с вещественным собственным значением $\lambda \neq 0$. Здесь

$$M = M_{\delta_*} = M_s \cdots M_2 M_1 \tag{9.4}$$

– матрица специализации $\delta_* = \delta_*(x)$ отображения δ, определяемой точкой x.

Доказательство. Из (9.1) и определений (7.32), (7.33), (8.1) следует равенство

$$M\langle x\rangle = x, \tag{9.5}$$

из которого вытекает матричное равенство (9.3) с собственным числом $\lambda = \lambda(M, x)$, равным фактору-автоморфности (8.25) отображения $x \mapsto M\langle x\rangle$. В силу условия (9.1) имеем $\lambda(M, x) \neq 0$, что вместе с равенством (8.25) доказывет теорему. □

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_D)$ – произвольная точка с координатами из $\mathbb{R}$. Обозначим через

$$F_x = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_D) \tag{9.6}$$

расширение поля рациональных чисел $\mathbb{Q}$ добавлением к нему чисел $x_1, \ldots, x_D$. Данное расширение состоит из всех чисел вида $\frac{f(x_1,\ldots,x_D)}{g(x_1,\ldots,x_D)}$, где f и g являются многочленами от D переменных с коэффициентами из поля $\mathbb{Q}$. Множество (9.6) также будет полем. Определим *степень* (над $\mathbb{Q}$) точки x равенством

$$\deg(x) = \deg F_x, \tag{9.7}$$

где справа в (9.7) указана степень $\deg F_x = [F_x : \mathbb{Q}]$ поля F_x, рассматриваемого как векторное пространство на полем $\mathbb{Q}$. Если $\deg(x) = 1$, то, очевидно, точка x имеет координаты из $\mathbb{Q}$.

Теорема 9.2. *Пусть точка x будет иррациональной* (8.23). *Если она при этом является неподвижной точкой некоторого отображения δ из полугруппы $\mathcal{D}$, то ее степень*

$$\deg(x) = D + 1. \tag{9.8}$$

Доказательство. По теореме 9.1 имеет место равенство

$$M \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_D \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{9.9}$$

где M – матрица из унимодулярной группы $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$, $x_1, \ldots, x_D$ – координаты точки $x = (x_1, \ldots, x_D)$ и $\lambda \neq 0$.

Из определения (8.23) иррациональной точки следует $x \neq (0, \ldots, 0)$, поэтому λ из (9.9) является корнем *характеристического уравнения*

$$\mathrm{Char}_M(\lambda) = \det(\lambda E_{D+1} - M) = 0 \tag{9.10}$$

степени $D{+}1$ с целыми коэффициентами, а из равенства (9.10) следует, что $x_1, \ldots, x_D$ принадлежат полю $\mathbb{Q}(\lambda)$ степени

$$\deg\mathbb{Q}(\lambda) \leqslant D + 1. \tag{9.11}$$

С другой стороны, из равенства (9.9) для поля F_x из (9.6) вытекает включение

$$F_x \subseteq \mathbb{Q}(\lambda). \tag{9.12}$$

Далее, поскольку точка x иррациональная (8.23), то в силу определения (9.7) будет выполняться неравенство

$$\deg F_x \geqslant D + 1. \tag{9.13}$$

Теперь, сопоставляя (9.11) и (9.12), (9.13), выводим нужное равенство (9.8). □

§10. Преобразования и нормирования звезды

10.1. Общий случай. Пусть дано некоторое отображение δ из полугруппы $\mathcal{D}$ и точка x из области определения $\triangle(\delta)$ отображения δ.

Далее будем предполагать, что специализация δ_*, задаваемая точкой x, имеет вид

$$\delta_* = \delta_p \cdots \delta_2 \delta_1, \tag{10.1}$$

где $\delta_i = \delta_*^{k_i l_i}$ – произвольные возвратные отображения (7.30), (7.31). В отличие от рассмотренного ранее случая (9.4) из теоремы 9.1, отображение (10.1) уже не содержит симметрий $\delta_i = s_i$ из группы $S_\triangle$.

Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{w} & \xrightarrow{\delta_1} & \mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\delta_2} & \ldots & \xrightarrow{\delta_p} & \mathbf{w}^{(p)} \\ \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow A^{(1)} & & & & \downarrow A^{(p)} \\ v & \xrightarrow{\sigma_1} & v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & \ldots & \xrightarrow{\sigma_p} & v^{(p)} \end{array} \tag{10.2}$$

Здесь использовали обозначения:

$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ – начальная звезда с центром в точке $x = x^{(0)}$;

$\mathbf{w}^{(1)} = \delta_1 \mathbf{w}^{(0)}$ – звезда с центром в $x^{(1)} = \delta_1 x^{(0)}$; и т.д., ...;

$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p \mathbf{w}^{(p-1)}$ – звезда с центром в $x^{(p)} = \delta_p x^{(p-1)}$.

Кратко цепочку преобразований из верхней строки диаграммы (10.2) можем записать в виде композиции

$$\mathbf{w}^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 v))) = \delta_* \mathbf{w}, \quad x^{(p)} = \delta_p(\ldots(\delta_2(\delta_1 x))) = \delta_* x \tag{10.3}$$

из p возвратных отображений δ_*. Так определенные $\mathbf{w}^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, p$ будут, согласно определению (7.27), нормированными звездами.

Нижняя строка диаграммы (10.2) содержит обычные (см. определение 1.2) или *динамические* звезды $v^{(i)}$ для $i = 1, \ldots, p$, где

$v = v^{(0)} = \mathbf{w}$;

$v^{(1)} = v^{(0)\sigma_1}$ – производная звезда относительно дифференцирования $\sigma_1 = \{k_1, l_1\}$, ассоциированного с отображением $\delta_1 = \delta_*^{k_1 l_1}$; и т.д., $\ldots$;

$v^{(p)} = v^{(p-1)\sigma_p}$ – производная звезда относительно $\sigma_p = \{k_p, l_p\}$, ассоциированного с $\delta_p = \delta_*^{k_p l_p}$.

Следовательно, имеем представление

$$v^{(p)} = ((v^{\sigma_1})^{\sigma_2} \ldots)^{\sigma_p} = v^{\sigma} \tag{10.4}$$

звезды $v^{(p)}$ через последовательность дифференцирований

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_p,$$

ассоциированную с отображением δ_* из (10.1).

Теперь опишем вертикальные стрелки из диаграммы (10.2). Первая стрелка обозначет тождественное отображение id, т.е.

$$v = \mathrm{id}\, \mathbf{w} = \mathbf{w}.$$

Далее

$A^{(1)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)})$ – матрица (7.22)-(7.25), зависящая от начальной точки $x = x^{(0)}$;

$A^{(2)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)})$ – матрица, уже зависящая от двух точек $x = x^{(0)}$ и $x^{(1)}$; и т.д., $\ldots$;

последняя матрица

$$A^{(p)} = A_*^{k_1 l_1}(x^{(0)}) A_*^{k_2 l_2}(x^{(1)}) \cdots A_*^{k_p l_p}(x^{(p-1)}) \tag{10.5}$$

определяется всеми предыдущими точками $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(p-1)}$.

Таким образом, по определению матрицы $A^{(i)}$ определяют аффинные изоморфизмы

$$A^{(i)}: \quad \mathbf{w}^{(i)} \quad \underset{\sim}{\longrightarrow} \quad v^{(i)} \tag{10.6}$$

звезд $\mathbf{w}^{(i)}$ и $v^{(i)}$ из верхней и нижней строк диаграммы (10.2) для всех $i = 1, \ldots, p$.

Лемма 10.1. *Диаграмма* (10.2) *является коммутативной.*

Доказательство. Коммутативность первого левого блока диаграммы (10.2) следует из определения матриц (7.22)-(7.25).

Чтобы доказать коммутативность первых двух левых блоков диаграммы (10.2), рассмотрим следующую коммутативную локальную диаграмму

$$
\begin{array}{ccccc}
\mathbf{w}^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & w^{(2)} & \xleftarrow{A_2} & \mathbf{w}^{(2)} \\
\downarrow A_1 & & \downarrow A_1 & \swarrow A_1A_2 & \\
v^{(1)} & \xrightarrow{\sigma_2} & v^{(2)} & &
\end{array}
\tag{10.7}
$$

где $w^{(2)} = \mathbf{w}^{(1)\sigma_2}$ – ненормированная звезда и A_i для $i = 1, 2$ – аффинные отображения с матрицами $A_*^{k_i l_i}(x^{(i-1)})$.

Коммутативность левого блока диаграммы (10.7) следует из аффинности отображения A_1 и того факта, что σ_2-дифференцирования звезд $\mathbf{w}^{(1)}$ и $v^{(1)}$ сводится к сложению A_1-эквивалентных пар векторов $\mathbf{w}_{k_2}^{(1)}, \mathbf{w}_{l_2}^{(1)} \in \mathbf{w}^{(1)}$ и $v_{k_2}^{(1)}, v_{l_2}^{(1)} \in v^{(1)}$.

Коммутативность же правого блока диаграммы (10.7) вытекает из аффинности отображения A_2, которая снова следует из определения матриц (7.22)-(7.25), и определения наклонной стрелки как композиции отображений A_2 и A_1 в указанном порядке.

Теперь коммутативность второго блока диаграммы (10.2) выводим из коммутативности диаграммы (10.7).

Следующие блоки диаграммы (10.2) рассматриваются по той же самой схеме. $\square$

10.2. Периодический случай. Предположим, что найдется такое $p > 0$, для которого нормированная звезда $\mathbf{w}^{(p)}$ из диаграммы (10.2) будет симметричной

$$\mathbf{w}^{(p)} = \check{s}\mathbf{w} \tag{10.8}$$

исходной звезде $\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(0)}$ относительно некоторого преобразования $\check{s}$ из группы $S_{\check{\triangle}}$ аффинных однородных симметрий (8.15) базисного симплекса $\check{\triangle}$. В этом случае будем говорить, что звезда $\mathbf{w}$ *периодична* относительно отображения δ из (10.1), а звезда $v = \mathbf{w}$ *периодична* относительно дифференцирования σ из (10.4). Если $p > 0$ – минимальное число с условием (10.8), то p будет *периодом* звезды $v = \mathbf{w}$.

Заметим, что однородные преобразования $\check{s}$ из (8.15) действуют на векторы звезды $\mathbf{w}$, а преобразования s из группы $S_\triangle$ аффинных неоднородных симметрий (8.13) действуют на точки симплекса $\triangle$. В формуле (10.8) звезда $\mathbf{w}$, рассматривается как совокупность $D + 1$ векторов $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_D$.

Поскольку

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} \tag{10.9}$$

по формуле (10.6), то с помощью равенства (10.8) получаем

$$v^{(p)} = A^{(p)}\mathbf{w}^{(p)} = A^{(p)}\check{s}\mathbf{w}. \tag{10.10}$$

Поэтому, принимая во внимание равенство $\mathbf{w} = v$, можем записать

$$v^{(p)} = \mathbf{A}v, \tag{10.11}$$

где матрица $\mathbf{A} = A^{(p)}\check{s}$ определяет аффинное однородное отображение звезд $A_s^{(p)} : v \mapsto v^{(p)}$. Равенство (10.11) означает, что производная звезда $v^{(p)}$ из диаграммы (10.2) *аффинно изоморфна* начальной звезде v. По этой причине назовем $\mathbf{A}$ *калибровочной матрицей* периодической звезды v.

Далее мы хотим воспользоваться равенством (10.11) несколько раз. С этой целью рассмотрим бесконечную периодическую комбинированную последовательность

$$\xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots\} \tag{10.12}$$

с периодом p, где

$$\xi_1 = \sigma_1, \quad \xi_2 = \sigma_2, \quad \ldots, \quad \xi_p = \sigma_p\check{s}, \quad \xi_{p+1} = \sigma_1, \quad \ldots \tag{10.13}$$

С помощью последовательности (10.12) определим для звезды v по индукции звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$, полагая

$$v^{(i)} = (v^{(i-1)})^{\xi_i} \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \tag{10.14}$$

где $v^{(0)} = v$ и $v'^{\xi_i} = \check{s}(v'^{\sigma_p})$ для $i = p, 2p, 3p, \ldots$ Чтобы не вводить нового термина, будем так определенные звезды $v^{(i)}$ продолжать называть *производными* для звезды v.

Теорема 10.1. *Пусть звезда v периодична относительно дифференцирования σ из* (10.4) *с периодом p, и пусть $\mathbf{A}$ – ее калибровочная матрица, определенаая в* (10.11). *Тогда для всех $i = 0, 1, 2, \ldots$ справедлива формула*

$$v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}, \tag{10.15}$$

если $i = at + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$.

Доказательство. Формула (10.15) выполняется для $i = 0, 1, \ldots, p-1$ по определению (10.14), а для $i = p$ – по формуле (10.11).

Далее рассуждаем по индукции. Пусть формула (10.15) выполняется для $j < i + 1$. По определению (10.14) и по формуле (10.15) имеем

$$v^{(i+1)} = (v^{(i)})^{\sigma_{i+1}} = (\mathbf{A}^a v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \tag{10.16}$$

Используя, доказанную в [4], формулу коммутирования
$$(Aw)^{\varsigma} = A(w^{\varsigma}) \tag{10.17}$$
аффинных отображений A и дифференцирований ς, из (10.16) получим
$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a (v^{(b)})^{\sigma_{i+1}}. \tag{10.18}$$

Сначала предположим, что $b \leqslant p-2$. Тогда $i+1 = at + (b+1)$, где $b+1 \leqslant p-1$. Поэтому $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(b+1)}$, и из равенства (10.18) следует
$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^a v^{(b+1)} \tag{10.19}$$
– формула (10.15) для $i+1$.

Пусть теперь $b = p-1$ и, значит, $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = v^{(p)}$. Поэтому в силу формулы (10.11) можем записать $(v^{(b)})^{\sigma_{i+1}} = \mathbf{A}v$. Отсюда и равенства (10.18) выводим
$$v^{(i+1)} = \mathbf{A}^{a+1} v. \tag{10.20}$$
В рассматриваемом случае будет выполняться равенство $i+1 = (a+1)p$ и, значит, согласно (10.20) формула (10.15) будет справедлива и для порядка $i+1$, когда $i = ap + (p-1)$. $\square$

§11. Приближения на торе

11.1. Генерации вкладывающихся разверток. По определению (3.1) и теореме 3.1 производные звезды $v^{(i)}$ из (10.14) вкладываются
$$v^{(i)} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D \tag{11.1}$$
в тор $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$. По соглашению (2.25) это означает, что порождаемые ими развертки тора или иначе – параллелоэдры –
$$T^{(i)} = T(v^{(i)}) \tag{11.2}$$
вкладываются в тор
$$T^{(i)} \overset{\mathrm{em}}{\hookrightarrow} \mathbb{T}^D. \tag{11.3}$$

Из построения (10.14) производной звезды $v^{(i)} = \{v_0^{(i)}, v_1^{(i)}, \ldots, v_D^{(i)}\}$ следует, что ее векторы перекладывания $v_k^{(i)}$ имеют вид
$$v_k^{(i)} \equiv m_k^{(i)} \alpha \bmod \mathbb{Z}^D \tag{11.4}$$
для $k = 0, 1, \ldots, D$ с некоторыми коэффициентами $m_k^{(i)} = 1, 2, 3, \ldots$, которые назовем *порядками* лучей $v_k^{(i)}$ звезды $v^{(i)}$. Здесь $\alpha \in \mathbb{R}^D$ –

вектор сдвига $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^2$ из (2.9) и порядки $m_k^{(i)}$ вычисляются по правилу (1.9). Сумму данных коэффициентов

$$m^{(i)} = m_0^{(i)} + m_1^{(i)} + \ldots + m_D^{(i)} \tag{11.5}$$

назовем ***порядком*** производной звезды $v^{(i)}$. С ним свяжем конечные орбиты

$$\mathrm{Orb}'(0, m^{(i)}) = \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D; \quad j = 1, 2, \ldots, m^{(i)} - 1\}. \tag{11.6}$$

11.2. Радиусы аффинно преобразованных множеств. Рассмотрим следующие общие задачи: оценить сверху радиусы множеств AT и A_1A_2T в терминах невырожденных $D \times D$-матриц A и A_1, A_2. Как обычно, радиус $\varrho(T)$ множества $T \subset \mathbb{R}^D$ равен минимальному из радиусов окружностей, содержащих в себе указанное множество.

Начнем с равенства

$$\max_{x \neq 0} \frac{|Ax|^2}{|x|^2} = \max_{x \neq 0} \frac{A^*[x]}{|x|^2}. \tag{11.7}$$

Здесь $|x| = (x_1^2 + \ldots + x_D^2)^{1/2}$ – длина вектора $x = (x_1, \ldots, x_D)$ и $A^*[x] = x^t A^* x$ – положительно определенная квадратичная форма с симметричной матрицей $A^* = A^t \cdot A$, где A^t обозначает транспонированную матрицу для A.

Проиводя подходящую замену $x = Oy$ с матрицей O из ортогональной группы $\mathrm{O}_D(\mathbb{R})$, приведем квадратичную форму $A^*[x]$ к главным осям или сумме квадратов

$$A^*[x] = A^*[Oy] = B[y] = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_D y_D^2. \tag{11.8}$$

Матрица A^* подобна диагональной матрице

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_D \end{pmatrix},$$

поэтому коэффициенты $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_D > 0$ будут собственными значениями матрицы A^*. Арифметические значения квадратных корней $\lambda_1^{1/2} > 0, \ldots, \lambda_D^{1/2} > 0$ называются *сингулярными числами* матрицы A, а наибольший из них

$$\|A\| = \max\{\lambda_1^{1/2}, \ldots, \lambda_D^{1/2}\} \tag{11.9}$$

определяет *спектральную норму* $\|A\|$ матрицы A.

С ее помощью, подставляя (11.8) в (11.7), получаем формулу

$$\max_{x\neq 0}\frac{|Ax|}{|x|}=\|A\|,$$

из которой получаем нужную оценку для радиуса

$$\varrho(AT)\leqslant\|A\|\varrho(T). \tag{11.10}$$

Далее поступаем аналогично:

$$\max_{x\neq 0}\frac{|A_1A_2x|}{|x|}=\max_{x\neq 0}\frac{|A_1A_2x|}{|A_2x|}\frac{|A_2x|}{|x|}\leqslant\max_{y\neq 0}\frac{|A_1y|}{|y|}\ \max_{x\neq 0}\frac{|A_2x|}{|x|},$$

где произвели замену $y=A_2x$. Отсюда выводим оценку

$$\max_{x\neq 0}\frac{|A_1A_2x|}{|x|}\leqslant\|A_1\|\cdot\|A_2\|,$$

и поэтому выполняется неравенство

$$\varrho(A_1A_2T)\leqslant\|A_1\|\cdot\|A_2\|\,\varrho(T). \tag{11.11}$$

11.3. Радиусы и площади производных параллелоэдров. Применим доказанную формулу (11.11) к оценке метрических характеристик производных параллелоэдров $T^{(i)}=T(v^{(i)})$ из (11.2).

Сначала найдем радиус исходного параллелоэдра $T(v)$.

Лемма 11.1. *Если параллелоэдр $T(v)$ порождается звездой*

$$v=\{v_0,v_1,\ldots,v_D\},$$

то его радиус $\varrho(T(v))$ вычисляется по формуле

$$\varrho(T(v))=\frac{1}{2}\max_{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_D}\ |\varepsilon_0v_0+\varepsilon_1v_1+\ldots+\varepsilon_Dv_D|. \tag{11.12}$$

Здесь вертикальные скобки обозначают длину вектора и максимум в (11.12) *вычисляется по всем наборам $\{\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_D\}$, таким что $\varepsilon_i=\pm1$, при этом количество отрицательных ε_i меняется в интервале $[1,\ldots,\frac{D+1}{2}]$.*

Доказательство. Из определения (2.8) следует, что параллелоэдр $T(v)$ имеет вершины

$$v_{k_1}+\ldots+v_{k_i}, \tag{11.13}$$

где $0\leqslant k_1<\ldots<k_i\leqslant D$ и $1\leqslant i\leqslant D$. Поэтому его центром будет

$$c(T(v))=\frac{1}{2}(v_0+v_1+\ldots+v_D). \tag{11.14}$$

Радиус же параллелоэдра $\varrho(T(v))$ равен максимальной длине векторов вида $w - c(T(v))$, где w пробегает все вершины (11.13). Отсюда выводим формулу (11.12). $\square$

Многогранник $T^{(i)}$ является разверткой тора $\mathbb{T}^D_{L^{(i)}} = \mathbb{R}^D/L^{(i)}$ для решетки

$$L^{(i)} = \mathbb{Z}[l_1^{(i)}, \ldots, l_D^{(i)}] \tag{11.15}$$

с базисом $l_k^{(i)} = v_k^{(i)} - v_0^{(i)}$ для $k = 1, \ldots, D$, где $v_k^{(i)}$ – лучи звезды $v^{(i)}$ из (11.1). Поэтому *объем* $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ равна

$$s(T^{(i)}) = \left|\det \begin{pmatrix} l_{11}^{(i)} & \ldots & l_{1D}^{(i)} \\ & \ldots & \\ l_{D1}^{(i)} & \ldots & l_{DD}^{(i)} \end{pmatrix}\right| \tag{11.16}$$

площади фундаментальной области решетки (11.15), где $l_{kl}^{(i)}$ – координаты базисных векторов $l_k^{(i)}$ для $k = 1, \ldots, D$.

Лемма 11.2. 1. *Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ выполняется следующая оценка*

$$\varrho(T^{(i)}) \leqslant \|\mathbf{A}\|^a \varrho(T^{(b)}), \tag{11.17}$$

если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$. Здесь $\|\mathbf{A}\|$ – спектральная норма (11.9) *калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ звезды v из* (10.11) *и радиусы $\varrho(T^{(b)})$ вычисляются по формуле* (11.12).

2. *Объем $s(T^{(i)})$ многогранника $T^{(i)}$ находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\det\mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{11.18}$$

где $\det\mathbf{A}$ *обозначает определитель матрицы $\mathbf{A}$, удовлетворяющий неравенствам*

$$0 < |\det\mathbf{A}| < 1, \tag{11.19}$$

и площади $s(T^{(b)})$ находятся по формуле (11.16).

Доказательство. По теореме 10.1 звезды $v^{(i)}$ и $v^{(b)}$ связаны равенством $v^{(i)} = \mathbf{A}^a v^{(b)}$ и, значит, порождаемые ими многогранники $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ и $T^{(b)} = T(v^{(b)})$ аффинно подобны

$$T(v^{(i)}) = \mathbf{A}^a T(v^{(b)}). \tag{11.20}$$

Отсюда и (11.11) следует неравенство (11.17). Формула (11.18) вытекает из подобия (11.20) и равенства (11.16).

Для доказательства же неравенств (11.19) достаточно заметить, что по построению (10.5), (10.11) калибровочной матрицы $\mathbf{A}$ она состоит из сомножителей A_*^{kl}, имеющих соответственно определители

$$\mathrm{det} A_k^{kl} = 1 - x_l, \quad \mathrm{det} A_l^{kl} = 1 - x_k, \quad \mathrm{det} A_0^{0l} = 1 - x_l, \tag{11.21}$$

и

$$\mathrm{det} A_l^{0l} = x_1 + \ldots + x_D. \tag{11.22}$$

Формулы (11.21) непосредственно вытекают из явного вида (7.22)–(7.24) матриц A_k^{kl}, A_l^{kl} и A_0^{0l}. Чтобы получить формулу (11.22), нужно воспользоваться равенством (7.25) и в матрице A_l^{0l} все ее строки прибавить к l-ой строке. Из (11.21) и (11.22) следует, что в любом случае имеют место неравенства

$$0 < |\mathrm{det} A_*^{kl}| < 1, \tag{11.23}$$

поскольку точка $x = (x_1, \ldots, x_D)$ принадлежит внутренней области базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$, что равносильно условиям

$$x_1 > 0, \ldots, x_D > 0, \quad x_1 + \ldots + x_D < 1. \tag{11.24}$$

Теперь неравенства (11.19) следуют из (11.23). □

11.4. Порядковые матрицы. Составим из порядков лучей (11.4) звезды v матрицу-столбец

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}(v) = \begin{pmatrix} m_0 \\ m_1 \\ \vdots \\ m_D \end{pmatrix} \tag{11.25}$$

и выясним, как она меняется под действием симметрий базисного симплекса $\triangle = \triangle_D$ и дифференцирований v^σ на звезду v.

Для этого поставим в соответствие любой перестановке σ элементов $0, 1, \ldots, D$ ее *перестановочную матрицу*

$$S_\sigma = \begin{pmatrix} \ldots & 1_{0,\sigma(0)} & \ldots \\ \ldots & 1_{1,\sigma(1)} & \ldots \\ & \vdots & \\ \ldots & 1_{D,\sigma(D)} & \ldots \end{pmatrix}, \tag{11.26}$$

с единицами $1 = 1_{i,\sigma(i)}$ на $(i, \sigma(i))$-местах. Если заменить 0 на $D+1$, то получим перестановку (7.2), определяющую симметрию базисного симплекса $s = s_\sigma$ из группы $S_\triangle$.

Дифференцированиям же δ_k^{kl} и δ_l^{kl} из (7.33) с произвольными индексами $0 \leqslant k < l \leqslant D$ поставим в соответствие матрицы

$$D_k^{kl} = E + E_{lk}, \quad D_l^{kl} = E + E_{kl}, \tag{11.27}$$

где $E = E_{D+1}$ – единичная матрица порядка $D+1$, а матрицы E_{ij} имеют нулевые элементы, кроме $1 = 1_{ij}$ на (i,j)-месте.

Матрицы M из (11.26) и (11.27) имеют целые коэффициенты и определители $\det M = \pm 1$, поэтому они принадлежат группе унимодулярных матриц $\mathrm{GL}_{D+1}(\mathbb{Z})$.

Данные матрицы позволяют вычислять порядки лучей $m_0^\sigma, m_1^\sigma, \ldots, m_D^\sigma$ преобразованной звезды $v^\sigma = (v_0^\sigma, v_1^\sigma, \ldots, v_D^\sigma)$:

$$\mathbf{m}^\sigma = \mathbf{m}(v^\sigma) = M^\sigma(v)\mathbf{m}. \tag{11.28}$$

Здесь, согласно определению производной (1.9), имеем

$$M^\sigma(v) = D_*^{k_1 k_2}, \tag{11.29}$$

если $\sigma = \{k_1, k_2\}$ – дифференцирование, где в качестве специализации $*$ выбирается k_1 или k_2 в зависимости от того, какое из условий (1.9) выполняется; и

$$M^\sigma(v) = M^\sigma = S_\sigma \tag{11.30}$$

в случае преобразования симметрии $\sigma = s = s_\sigma$ звезды v, где S_σ – соответствующая матрица из (11.26).

Лемма 11.3. *Пусть v – периодическая звезда $v^{(p)} = \mathbf{A}v$ периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A} = A^{(t)}\check{s}$ из* (10.11), *и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определены по формуле* (10.14). *Тогда если $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$, то*

$$\mathbf{m}^{(i)} = \mathbf{m}(v^{(i)}) = \mathbf{M}^a \mathbf{m}^{(b)}. \tag{11.31}$$

Здесь

$$\mathbf{M} = SM^{(t)} \tag{11.32}$$

с матрицей S из (11.26), *соответствующей обратной симметрии для $\check{s}$, и*

$$M^{(t)} = D_*^{k_p l_p}(v^{(p-1)}) \cdots D_*^{k_2 l_2}(v^{(1)}) D_*^{k_1 l_1}(v^{(0)}), \tag{11.33}$$

где у порядковых матриц $D_*^{k_j l_j}(v^{(j-1)}) = D_*^{k_j l_j}$ из (11.29) *специализации $*$ определяются производной звездой $v^{(j-1)}$.*

Доказательство вытекает из теоремы 10.1 и определения (10.11) калибровочной матрицей $\mathbf{A}$, если учесть, что при переходе с верхней на нижнюю строку в диаграмме (10.2) меняется порядок преобразований. □

Назовем $\mathbf{M}$ *порядковой матрицей* периодической звезды v, отвечающей калибровочной матрице $\mathbf{A}$.

11.5. Основная теорема. Важность последовательности определенных ранее в (11.2) производных параллелоэдров $T^{(i)} = T(v^{(i)})$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ объясняется тем, что через их геометрию характеризуются аппроксимационные свойства точек из бесконечной орбиты

$$\mathrm{Orb}_\alpha(0) = \quad \{x_j = S^j(0) \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D; \quad j = 0, 1, 2, \ldots\}, \tag{11.34}$$

порождаемой сдвигом $S = S_\alpha$ тора $\mathbb{T}^D = \mathbb{R}^D/\mathbb{Z}^D$ из (2.13).

Ограниченные параллелоэдрами $T^{(i)}$ области на торе $\mathbb{T}^D$ выделяют из орбиты (11.34) некоторую подпоследовательность точек $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$, наилучшим образом приближающихся к $0 \in \mathbb{T}^D$.

Теорема 11.1. *Пусть v – периодическая звезда периода $p > 0$ с калибровочной матрицей $\mathbf{A}$ из* (10.11), *и пусть ее производные звезды $v^{(i)}$ для $i = 0, 1, 2, \ldots$ определены по формуле* (10.14). *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ни одна из точек $x_j \equiv j\alpha \bmod \mathbb{Z}^D$ орбиты* (11.34) *не попадает*

$$x_j \notin T^{(i)} \quad \text{для} \quad j = 1, 2, \ldots, m^{(i)} - 1 \tag{11.35}$$

в параллелоэдр $T^{(i)}$ из (11.2), *где $m^{(i)}$ – порядок* (11.5) *звезды $v^{(i)}$, равный сумме коэффициентов матрицы-столбеца $\mathbf{m}^{(i)}$ из* (11.31). *Первой попавшей в область $T^{(i)}$ является точка*

$$x_j \in T^{(i)} \quad \text{для} \quad j = m^{(i)}. \tag{11.36}$$

2. *Для радиуса $\varrho(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ с номером $i = ap + b$, где $a = 0, 1, 2, \ldots$ и $b = 0, \ldots, p-1$, выполняется следующее неравенство*

$$\varrho(T^{(i)}) \leqslant \|\mathbf{A}\|^a \varrho(T^{(b)}), \tag{11.37}$$

а для начальных номеров b радиусы $\varrho(T^{(b)})$ в (11.37) *вычисляются по формуле* (11.12). *Здесь $\|\mathbf{A}\|$ обозначает спектральную норму* (11.9) *калибровочной матрицей $\mathbf{A}$.*

3. *Объем $s(T^{(i)})$ параллелоэдра $T^{(i)}$ находится по формуле*

$$s(T^{(i)}) = |\mathrm{det}\mathbf{A}|^a s(T^{(b)}), \tag{11.38}$$

где $\det\mathbf{A}$ *обозначает определитель матрицы* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющий неравенствам* $0 < |\det\mathbf{A}| < 1$, *и объемы* $s(T^{(b)})$ *для начальных номером* $b = 0, \dots, p-1$ *вычисляются по формуле* (11.16).

Доказательство. Утверждение 1 следует из теорем 2.2 и 3.1, а утверждения 2 и 3 доказаны в лемме 11.2. □

Литература

1. А. Я. Хинчин, *Цепные дроби.* 4-ое изд. М., 1978.
2. M. Furukado, Sh. Ito, A. Saito, J. Tamura, Sh. Yasutomi, *A new multidimensional slow continued fraction algorithm and stepped surface.* — Exper. Math. **23** (2014), No. 4, 390–410.
3. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения методом делящихся торических разбиений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **440** (2015), 81–98.
4. В. Г. Журавлев, *Делящиеся разбиения тора и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **440** (2015), 99–122.
5. G. Rauzy, *Nombres algébriques et substitutions.* — Bull. Soc. Math. France, **110** (1982), 147–178.
6. В. Г. Журавлев, *Разбиения Рози и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **322** (2005), 83–106.
7. В. Г. Журавлев, *Множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, (2016) (в наст. сб.)
8. Z. Coelho, A. Lopes, L. F. Da Rocha, *Absolutely continuous invariant measures for a class of affine interval exchange maps.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 1 (1995), 3533–3542.
9. V. G. Zhuravlev, A. V. Shutov, *Derivaties of circle rotations and similarity of orbits.* — Max-Planck Inst. Math., Preprint Series **62** (2004), 1–11.
10. В. Г. Журавлев, *Дифференцирование индуцированных разбиений многомерных торов.* — Алгебра и анализ (2015), 1–28 (в печати).
11. В. Г. Журавлев, *Двумерные приближения кубических иррациональностей.* — (2015) (в печати).
12. E. Hecke, *Über analytische Funktionen und die Verteilung von Zahlen mod Eins.* — Math. Sem. Hamburg Univ., **1** (1921), 54-76.
13. S. Ferenczi, *Bounded Remaider Sets.* — Acta Arithm. **61**, No. 4 (1992), 319–326.
14. S. Grepstad, N. Lev, *Sets of bounded discrepancy for multi-dimensional irrational rotation.* — Geom. Funct. Analysis, **25**, No.1 (2014), 87–133.
15. G. Rauzy, *Ensembles à restes bornés.* — Sémin. théor. nombres Bordeaux (1984), exp. 24.
16. В. Г. Журавлев, *Многогранники ограниченного остатка.* — Математика и информатика, 1, Совр. пробл. матем., **16**, Мат. ин-т РАН, М., 2012, 82–102.
17. В. Г. Журавлев, *Перекладывающиеся торические развертки и множества ограниченного остатка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **392** (2011), 95–145.

18. В. Г. Журавлев, *Многомерная теорема Гекке о распределении дробных частей.* — Алгебра и анализ **24**, No. 3 (2012), 95–130.
19. M. Morse, C. A. Hedlund, *Symbolic Dynamics II: Sturmian trajectories.* — Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.
20. В. Г. Журавлев, *Модули торических разбиений на множества ограниченного остатка и сбалансированные слова.* — Алгебра и анализ **24**, No. 4 (2012), 97–136.
21. В. Г. Журавлев, А. В. Малеев, *Послойный рост квазипериодического разбиения Рози.* — Кристаллография **52**, No. 2 (2007), 204–210.
22. A. V. Shutov, A. V. Maleev, V. G. Zhuravlev, *Complex quasiperiodic self-similar tilings: their parameterization, boundaries, complexity, growth and symmetry.* — Acta Crystallogr. **A66** (2010), 427–437.
23. V. G. Zhuravlev, *On additive property of a complexity function related to Rauzy tiling.* — Anal. Probab. Methods Number Theory, TEV, Vilnius (2007), 240–254.
24. Е. С. Федоров, *Начала учения о фигурах.* М., 1953.
25. Г. Ф. Вороной, *Собрание сочинений.* Том 2. Киев, 1952.

Zhuravlev V. G. Differentiation of induced toric tilings and multi-dimensional approximations of algebraic numbers.

We consider the induced tilings $\mathcal{T} = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}}$ of the D-dimensional torus $\mathbb{T}^D$ generated by embedded karyons Kr. The differentiations $\sigma : \mathcal{T} \longrightarrow \mathcal{T}^\sigma$ are defined under which we obtaine again the induced tilings $\mathcal{T}^\sigma = \mathcal{T}|_{\mathrm{Kr}^\sigma}$ with a derivative karyon Kr^σ. They are used for approximation of $0 \in \mathbb{T}^D$ by an infinite sequence of points $x_j \equiv j\alpha \mod \mathbb{Z}^D$ for $j = 0, 1, 2, \ldots$, where $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_D)$ is vector whose coordinates $\alpha_1, \ldots, \alpha_D$ belong to an algebraic field $\mathbb{Q}(\theta)$ of degree $D + 1$ over the rational field $\mathbb{Q}$. For this purpose, we construct an infinite sequence of convex parallelohedra $T^{(i)} \subset \mathbb{T}^D$ for $i = 0, 1, 2, \ldots$ and define for them some natural oders $m^{(0)} < m^{(1)} < \ldots < m^{(i)} < \ldots$ Then the above parallelohedra contain a subsequence of points $\{x_{j'}\}_{j'=1}^{\infty}$ that give the best approximation of $0 \in \mathbb{T}^D$.

Владимирский государственный университет,
600024, Владимир, пр. Строителей, 11,
Россия

E-mail: vzhuravlev@mail.ru

Поступило 16 января 2016 г.