

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО, СВЯЗАННЫЕ С ФИЗИКОЙ

*С. Б. Кадомцев, Э. Г. Позняк,
Д. Д. Соколов*

§ 1. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО — ТИПИЧНЫЙ ПРЕДСТАВИТЕЛЬ ГЕОМЕТРИИ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

Исторически геометрия Лобачевского возникла как первая неевклидова геометрия, осознанная как таковая. Именно с этим и связан тот поворотный пункт в развитии геометрии от еще оперирующей наглядными образами геометрии Евклида к современной геометрии, вобравшей в себя как концепцию искривленного пространства Римана, так и алгебро-групповые идеи Ф. Клейна. Представляется, что этот мировоззренческий аспект был главным в развитии геометрии Лобачевского в прошлом веке. Как раз его, по-видимому, и осознал в наибольшей степени тот из трех ученых, стоявших у колыбели этой науки (Лобачевский, Бойаи и Гаусс), имя которого она по справедливости носит. В частности, это выразилось в сложной эволюции взглядов Н. И. Лобачевского на вопрос о геометрии реального мира, которая привела в итоге к формированию представления о возможности и необходимости геометрических построений, не имеющих прямого отношения к реальному пространству. Подчеркнем глубокую нетривиальность осознания построенной геометрии как неевклидовой. Дело в том, что, строго говоря, эта геометрия была не первой, а второй неевклидовой геометрией. Со времен эллинской (или во всяком случае эллинистической) древности была хорошо известна другая неевклидова геометрия — сферическая. Степень ее развития уже тогда принципиально не отличалась от степени развития евклидовой геометрии. Начало сферической геометрии положил, по-видимому, еще Эвдокс*, а к концу I в. н. э. уже относится систематическое изложение этой науки, принадлежащее Менелая Александрийскому, которое

* Как сообщает Азий (II, 2, 2): «σφαιρική τὸν ἰσοδοχόν»

дошло до нас в арабском переводе Сабита ибн Корры [99]. О популярности этого сочинения говорит хотя бы тот факт, что из него происходит знаменитая теорема Менелая. В том, что сферическая геометрия не смогла сыграть роль, пришедшуюся на долю геометрии Лобачевского, сказалось, по-видимому, то, что сферическая геометрия может быть очевидным образом реализована в целом на поверхности евклидова пространства. Вопрос о реализации геометрии Лобачевского на поверхности евклидова пространства, по-видимому, впервые был поставлен и частично решен Бельтрами [74]. Он построил реализацию орикруга плоскостью Лобачевского на поверхности постоянной отрицательной кривизны. Следует заметить, что еще ранее поверхности постоянной отрицательной кривизны изучались Миндингом [100].

Мировоззренческое значение вопроса о возможности реализации всей плоскости Лобачевского на поверхности евклидова пространства было столь велико, что в 1900 году Гильберт [89] назвал его в числе кардинальных проблем математики. В 1901 году им же было дано отрицательное решение этого вопроса [90].

В настоящее время обрисованная выше роль геометрии Лобачевского в науке прошлого века уже исчерпана. Геометрия Лобачевского в узком смысле этого слова как наука, аналогичная геометрии «Начал» Евклида и «Сферики» Менелая, тоже, конечно, исчерпана с идейной стороны. Это не значит, что здесь невозможно доказательство отдельных, быть может, очень трудных теорем, более того, подобные исследования уже составили обширную библиотеку. Речь идет о том, что эти исследования не лежат на переднем крае математики. Однако сам комплекс идей, связанных с рождением этой геометрии и оперирующих ее понятиями, продолжает активно развиваться. Основное внимание в нем переместилось с изучения геометрии Лобачевского как замкнутой теории на ее исследования в связи с многочисленными смежными проблемами математики. Поэтому изменилась и та роль, которую играет сейчас в науке геометрия Лобачевского. Сейчас она рассматривается, прежде всего, как типичное многообразие отрицательной кривизны, моделирующее свойства других многообразий отрицательной кривизны, и достаточно простое для изучения. Такой же естественной моделью многообразий положительной кривизны является сферическая геометрия. Представляется, что подобный подход, при котором различные пространства исследуются в отношении их сходства с простейшими пространствами постоянной кривизны (или максимальной подвижности), сейчас занимает центральное место во многих разделах геометрии. Более того, в тех вопросах, в которых метрики постоянной кривизны не являются такими типичными многообразиями, каждое продвижение сопряжено с

огромным трудом даже по правильной постановке задачи. Любопытно, что с этой точки зрения классическое евклидово пространство представляет меньший интерес, так как не моделирует свойств широкого круга пространств.

Именно с представлениями о геометрии Лобачевского как о типичном представителе пространств отрицательной кривизны связаны в основном физические приложения этой науки, которым и посвящен настоящий обзор. Среди этих приложений наиболее традиционными являются приложения в общей теории относительности, которая, с математической точки зрения, базируется на геометрии искривленных пространств. Менее широко известны другие приложения — в ядерной физике, физике элементарных частиц и т. п., которые связаны, в частности, с геометрической интерпретацией нелинейных уравнений, встречающихся в этих науках. В рамках этого обзора мы не ставим задачи охватить все имеющиеся к настоящему времени приложения и тем более дать всеобъемлющий перечень физической литературы, посвященной этим вопросам. Мы хотим дать возможность читателю на небольшом количестве близких нам примеров уяснить общую ситуацию, в которой геометрия Лобачевского входит в контакт с современной физикой. Начать же, очевидно, следует с того, чтобы, не претендуя на полноту, показать, в чем выражается упомянутый модельный характер геометрии Лобачевского с точки зрения математики. Нам представляется также полезным в необходимых случаях проводить сравнение с ситуацией, возникающей для других пространств, в частности, пространств положительной кривизны.

Рассмотрим, прежде всего, результаты, связанные с развитием глобальной римановой геометрии. В их основе лежит тот факт, что геометрия Лобачевского (как двумерная, так и многомерная) моделирует экспоненциальную неустойчивость геодезических на пространствах отрицательной кривизны. Аналогично, сфера моделирует возникновение сопряженных точек на пространствах положительной кривизны. Элементарное рассмотрение этого факта подробно проведено в [3]. Заметим, что там же читатель сможет познакомиться с многочисленными применениями идей геометрии Лобачевского в гидродинамике.

Свойства устойчивости и неустойчивости геодезических исследуются, как известно, с помощью теорем сравнения для уравнения Якоби [19]. На основе исследования этого уравнения получаются многочисленные оценки, связывающие геометрические характеристики пространств переменной и постоянной кривизны. Итогом этих оценок являются знаменитые теорема Адамара—Картана [86], [78] и теорема о сфере [95]. Согласно первой из них полное односвязное риманово многообразие неположительной секционной кривизны диффео-

морфно евклидову пространству. Вторая утверждает, что полное односвязное риманово многообразие, секционная кривизна которого меняется менее, чем в четыре раза, гомеоморфно сфере. Огромное количество геометрических неравенств, также в значительной степени восходящих к идее сравнения с пространством постоянной кривизны, приведено в [14].

Подчеркнем, что возможность выделения двух больших классов римановых пространств по знаку их секционных кривизн отнюдь не является чем-то само собой разумеющимся. Для того, чтобы проиллюстрировать это, обратимся к псевдоримановым пространствам. Первое, что обращает на себя внимание, это то, что знак секционной кривизны уже не определяет свойств устойчивости геодезических. Например, двумерное уравнение Якоби теперь имеет вид

$$y'' + K(v, v)y = 0,$$

где y — компонента якобиева поля, перпендикулярная геодезической, v — касательный вектор геодезической. Итак, устойчивость решений определяется уже знаком произведения $K(v, v)$, который может быть различен при одном и том же знаке K , так как метрика знаконеопределена. Поэтому на многообразии, скажем, отрицательной кривизны одновременно присутствует как экспоненциальная неустойчивость для одних геодезических, так и сопряженные точки на других. Более того, само понятие секционной кривизны может быть введено уже не для всех двумерных направлений. Действительно, кривизна в направлении σ , натянутом на линейно независимые векторы v и w , равна

$$K_\sigma = \frac{(R(v, w)w, v)}{(v, v)(w, w) - (v, w)^2}.$$

Однако определитель Грама, стоящий в знаменателе, обращается в нуль для изотропных двумерных направлений (т. е. таких, на которых индуцируется вырожденная метрика). Если в этом случае обращается в нуль и числитель, то понятие секционной кривизны можно сохранить с помощью продолжения по непрерывности (см. [36]).

Очень большое внимание привлекает проблема метрической и топологической классификации пространств постоянной кривизны. С основными проблемами, возникающими в этой связи, можно познакомиться по [20], [21]. Подробное изложение результатов содержится в [121]. В общих чертах ситуация состоит в том, что проблеме удалось редуцировать к проблеме выделения подгрупп группы движения определенного класса, но для пространства Лобачевского эта групповая задача оказалась трансцендентно сложной. Рассматриваются также теоремы сравнения для неодносвязных пространств (см. о них [14]). Этот круг вопросов находит широкие физические приложения, на которых мы остановимся в § 2.

Детальное изучение внутренней геометрии полных двумерных римановых многообразий с кривизной, заключенной между двумя отрицательными константами, также отталкивается от идеи сравнения с плоскостью Лобачевского. Отметим, прежде всего, результат [87], согласно которому такая метрика конформно эквивалентна плоскости Лобачевского. Это позволяет выделить на ней области, сопоставимые с известными областями плоскости Лобачевского, например, орикругом [43]. Свойства орициклов, ограничивающих орикруг, подробно изучались [72] и оказались в общем сходными со свойствами орицикла плоскости Лобачевского.

Особенно впечатляющую роль играет идея сравнения свойств поверхностей переменной и постоянной кривизны в геометрии в целом. Напомним, что центральное место среди задач этой науки занимает вопрос о реализации метрик заданного класса. В случае положительного решения этого вопроса естественно возникает задача о степени произвола реализации, степени ее регулярности при гарантированной регулярности метрики, а при дальнейшем исследовании — вопросы жесткости, устойчивости и т. д. Другие классические задачи геометрии в целом ставят вопрос о восстановлении поверхности не по метрике, а по другим ее характеристикам, например, по гауссовой или средней кривизне.

Принципиальным достижением в проблеме реализации, достигнутым в середине нашего столетия, было обоснование определяющей роли знака кривизны для возможности реализации метрики. Грубо говоря, метрики положительной кривизны хорошо погружаются в евклидово пространство, а метрики отрицательной кривизны, вообще говоря, не погружаются. Особое место среди поверхностей трехмерного евклидова пространства занимает полная поверхность постоянной положительной кривизны — сфера. Полные многообразия, близкие в определенном смысле к многообразиям постоянной положительной кривизны, имеют и реализации, сходные со сферой. Например, если кривизна такого многообразия отделена от нуля, то оно реализуется в виде овалоида. Эта реализация единственна (скажем, в классе общих выпуклых поверхностей), а ее регулярность естественным образом определяется регулярностью метрики. При ослаблении условия отделенности кривизны от нуля сходство со сферой уменьшается.

В общем можно сказать, что поверхности положительной кривизны (или, несколько более широко, выпуклые поверхности) в евклидовом пространстве образуют естественный класс, обобщающий свойства сферы. Этот фундаментальный вывод был сформулирован А. Д. Александровым в предвоенные годы во время дискуссии о методах решения проблемы Вейля. Представляется, что именно этот переход от решения важной, но ограниченной задачи, какой была проблема Вейля, к рассмот-

рению выпуклых поверхностей, как естественного класса, был рубежом, отделившим начальный этап развития геометрии в целом в работах Гильберта, Минковского, Кристоффеля, Вейля, Кон-Фоссена и др. от ее современного этапа развития. На этом этапе в классических работах А. Д. Александрова [1], А. В. Погорелова [37], их многочисленных учеников и последователей была создана общая теория выпуклых поверхностей, охватывающая все основные вопросы их строения.

Совершенно иная картина наблюдается для поверхностей отрицательной кривизны. Прежде всего, как показал Гильберт [90], среди этих поверхностей нет реализации полной метрики постоянной кривизны — плоскости Лобачевского. Н. В. Ефимов [22] показал, что этот факт отнюдь не случаен: полные метрики отрицательной отделенной от нуля кривизны не допускают регулярной реализации в целом в евклидовом пространстве. Иными словами, на всякой полной поверхности евклидова пространства точная верхняя грань кривизны неотрицательна.

То, что поверхности отрицательной кривизны не образуют естественного класса, вовсе не означает, что они не имеют важных и интересных для геометра свойств. Смысл этого утверждения состоит в том, что класс поверхностей отрицательной кривизны разбивается на ряд подклассов, внутри которых обнаруживается значительное сходство, но поверхности разных классов мало похожи между собой. Эти подклассы обобщают свойства разных поверхностей отрицательной кривизны и реализуют некоторые узкие классы метрик. Очевидно, для выделения подобных подклассов нужно снять либо условие полноты поверхности, либо условие отделенности кривизны от нуля, рассматривая метрики, у которых кривизна предписанным образом стремится к нулю на бесконечности. В первом случае Э. Г. Позняк показал [42], что геодезические полосы метрик отделенной от нуля отрицательной кривизны реализуются поверхностями, сходными с «катушками Миндинга», а Е. В. Шикин [71] — что орициклические области таких метрик также реализуются, но уже в виде поверхностей, сходных с псевдосферой. В работах А. Л. Вернера (см. [15]) исследовался класс поверхностей, напоминающих однополостный гиперболоид и представляющих собой различные рога и чаши. В последнее время внимание исследователей привлекает класс поверхностей, сходных с гиперболическим параболоидом [55].

Еще рельефнее станет эта картина, если обратиться к теории поверхностей в псевдоевклидовом пространстве $E_{(2,1)}^3$ (см. [47]). В этом случае естественные классы характеризуются не только знаком гауссовой кривизны, но и знаком определителя первой квадратичной формы. Комбинация этих знаков дает четыре класса. Два из них: класс поверхностей отрицательной кривизны с положительно определенной метрикой и класс поверхностей положительной кривизны с индефинитной метрикой,

оказываются естественными классами. Оба эти естественных класса обобщают свойства соответствующих компонент единичной сферы псевдоевклидова пространства. Важно подчеркнуть, что для поверхностей первого из этих классов уравнения Монжа—Ампера оказываются эллиптическими, а для другого класса — гиперболическими. Поверхности одного из этих классов выпуклые, а другого — седлообразные. Эти обстоятельства отвергают гипотезу о том, что выделение естественных классов поверхностей связано с типом уравнений Монжа—Ампера или свойством выпуклости.

Два других класса — поверхностей положительной кривизны с положительно определенной метрикой и поверхностей отрицательной кривизны с индефинитной метрикой — не являются естественными классами. Для поверхностей этих классов выполнены оценки для кривизны типа оценки Н. В. Ефимова. Обе эти оценки можно объединить в неравенство

$$\inf_{\Phi} K \operatorname{sign} \Delta \geq 0,$$

где K — гауссова кривизна, Δ — определитель метрического тензора внутренне полной поверхности Φ с невырожденной метрикой. Доказательство этой оценки, несколько выходящей за рамки работы Д. Д. Соколова [48], приведено в приложении.

Рассмотрение всех упомянутых шести классов поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах показывает, что возникновение естественного класса поверхностей связано с наличием в этом классе компоненты сферы (или всей сферы). Отметим, что, согласно результатам С. З. Шефеля [70] и С. Б. Кадомцева [25], повышение размерности объемлющего пространства при выполнении естественных групповых условий ничего не изменяет в этой ситуации. Именно, если реализация сферы в пространстве высокой размерности является в некотором смысле выпуклой, то эта реализация на самом деле трехмерна. В пространстве высокой размерности возможна реализация плоскости Лобачевского, но эта реализация не имеет максимальной подвижности как поверхность объемлющего пространства. Сходные явления наблюдаются и в псевдоевклидовом пространстве.

Отмеченная роль сфер в формировании естественных классов поверхностей позволяет лучше понять, почему такие трудности вызывает построение аналогичных естественных классов многомерных поверхностей. Для многообразий высокой размерности сфера не может играть роль типичной реализации. Действительно, сфера является гиперповерхностью, т. е. имеет координатность 1, тогда как погружение n -мерного многообразия, вообще говоря, имеет размерность не меньше $n(n-1)/2$, что совпадает с единицей лишь в двумерном случае. Показательно, что в многомерных аналогах задачи Минковского, где не возникает подобного несоответствия размерностей, вопросы много-

мерного обобщения двумерных результатов не встречаются таких принципиальных затруднений [38]. Отметим также, что сфера оказывается нетипичной поверхностью и при изучении пространства с вырожденной метрикой. Поэтому, в частности, их изучение в ряде работ, среди которых необходимо отметить работы А. Артыкбаева (см. [4]), не привело еще к выделению естественных классов поверхностей.

§ 2. ФРИДМАНОВСКАЯ КОСМОЛОГИЯ И ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО

Релятивистская космология доставляет наиболее важный и простой пример того, как геометрия Лобачевского используется в физике в качестве типичного примера геометрии риманова многообразия отрицательной кривизны. Исходным наблюдательным фактом, лежащим в основе современной релятивистской космологии, является очень высокая степень однородности и изотропии доступных наблюдениям областей Вселенной. Разумеется, речь идет об однородности и изотропии в очень большом — космологическом — масштабе. В малом масштабе окружающий нас мир резко неоднороден и анизотропен. Например, анизотропия в масштабе Галактики хорошо видна простым глазом — на небе видна полоса, в которую концентрируются звезды, так называемый Млечный путь. Итак, звезды группируются в галактики, галактики — в скопления галактик. Эти скопления галактик, как выясняется в самое последнее время, образуют сложную ячеистую структуру, наподобие сот с характерным размером 50—100 мегапарсек (1 мегапарсек = 10^6 парсек = $3 \cdot 10^{24}$ см).

По мере перехода к структурам все большего масштаба плотность вещества меняется все меньше и, наконец, на масштабах, много большего размера ячеек ячеистой структуры, она становится приблизительно постоянной.

Представление об однородности Вселенной в космологических масштабах формировалось, начиная с 30-х годов на основании изучения распределения галактик, однако представить себе реальную исключительно высокую степень изотропии Вселенной удалось лишь после того, как в 60-х годах Пензиасом и Уилсоном [104] было открыто и исследовано реликтовое тепловое радиоизлучение. Оказалось, что оно имеет фантастическую степень изотропии, по имеющимся оценкам изменение его температуры по различным направлениям не больше, чем $\Delta T/T \sim 10^{-4}$. Разумеется, мы можем проверить факт изотропии Вселенной, однако если не предполагать, что Земля находится в специально выделенном «центре» Вселенной (так называемый принцип Коперника), то из изотропии следует и однородность.

Другой фундаментальной наблюдательной основой космологии является факт расширения Вселенной. Этот факт устанавливается по покраснению спектра удаленных галактик. Мерой этого покраснения служит некоторая величина z , называемая красным смещением. Подчеркнем, что красное смещение удаленных объектов измеряется непосредственно и с высокой точностью. Указанное покраснение объясняется доплер-эффектом, обусловленным тем, что далекие галактики удаляются друг относительно друга. Скорость этого разбегания пропорциональна расстоянию между объектами. Поэтому красное смещение можно рассматривать как меру расстояния до удаленных объектов. Для не слишком удаленных объектов расстояние пропорционально красному смещению, далее зависимость между ними становится более сложной. Эта зависимость и коэффициент пропорциональности определяются так называемой постоянной Хаббла, абсолютное значение которой известно очень плохо. Ниже мы будем все расстояния измерять в единицах z . Для ориентировки укажем, что хорошо исследованы галактики до $z=0,2-0,4$, а квазары известны до $z=3,5$.

Нетрудно понять, что Вселенная однородна и изотропна лишь в некоторой системе отсчета, именно в той, в которой покоится (в среднем) реликтовое излучение. Другими словами, однородность и изотропия фиксируют удобную, естественно выделенную систему отсчета в пространстве-времени. Из факта расширения Вселенной вытекает (см., например, [49]), что пространство-время реальной Вселенной диффеоморфно прямому произведению $M^3 \times R^1$, где R^1 — ось времени, M^3 — пространственное сечение. Если бы однородность и изотропия реальной Вселенной была бы идеальной, то это бы означало, что метрику пространства-времени можно привести к виду

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) d\Sigma^2, \quad (1)$$

где $d\Sigma^2$ — пространственная форма постоянной кривизны, представляющая собой метрику пространственного сечения, а функция $a(t)$ описывает временную эволюцию Вселенной. Реальная Вселенная однородна и изотропна лишь приближенно, а поскольку, как установил И. В. Грибков [18], теорема Шура, вообще говоря, некорректна по Адамару, т. е. пространство с мало меняющимися по направлению секционными кривизнами может сильно отличаться от пространства постоянной кривизны, то приходится дополнительно постулировать, что метрика реальной Вселенной близка в некотором смысле к метрике (1).

Конкретный вид функции $a(t)$ находится с помощью уравнений Эйнштейна. Это было сделано еще в двадцатых годах советским математиком А. А. Фридманом [84]. Поэтому метрика (1) называется фридмановской моделью Вселенной. Любопытно, что ни Фридман, ни Эйнштейн, также искавшие в это время однородные и изотропные модели Вселенной, не имели еще достоверных сведений о том, что реальная Вселенная действитель-

но является однородной и изотропной. В то время еще не сложилось отчетливое представление о том, что ряд наблюдаемых туманностей являются галактиками, подобными Галактике Млечного пути (замечание И. С. Шкловского).

Фридмановская модель при фиксированном значении постоянной Хаббла определяется значением средней плотности Вселенной. При этом возможны три качественно различных варианта: средняя плотность ρ может быть больше, равна или меньше некоторой величины, называемой критической плотностью ρ_c . При этом кривизна пространственной формы $d\Sigma^2$ будет соответственно больше, равна или меньше нуля. Во всех трех случаях Вселенная возникла из некоторого сингулярного состояния, а в одном из случаев и завершит свою эволюцию в сингулярном состоянии. В наше время, по-видимому, нет необходимости подчеркивать, что наличие сингулярных состояний означает не акт творения и уничтожения мира, а ограниченность методов описания Вселенной в рамках общей теории относительности.

Итак, если средняя плотность мира меньше критической, то наша Вселенная описывается геометрией Лобачевского. Какова же плотность мира на самом деле? Ответ на этот вопрос требует кропотливого и очень трудного подсчета масс светящихся объектов. Его проведение связано с именем голландского астронома Оорта [101]. Оказалось, что средняя плотность светящегося вещества во Вселенной составляет примерно 1/20 часть критической плотности ($\rho/\rho_c = 1/20$). Однако тяжелые частицы — барионы, из которых в основном состоят светящиеся объекты, составляют лишь небольшую часть всех частиц во Вселенной. Количество частиц — фотонов — в реликтовом излучении примерно в 10^8 раз превосходит количество барионов. Именно этот факт имеют в виду, когда говорят о горячей Вселенной. Поскольку фотоны не имеют массы покоя, то это обстоятельство мало меняет оценку средней плотности. Однако во Вселенной примерно столько же нейтрино. До недавнего времени считалось, что эта частица также имеет нулевую массу покоя, однако в самое последнее время группа советских физиков [97] в результате очень кропотливых и тонких измерений установила, что, по-видимому, нейтрино имеет ненулевую массу покоя, причем этой массы может хватить для того, чтобы сделать среднюю плотность мира близкой к критической, а может быть даже и большей ее.

Каков же радиус кривизны пространственного сечения реальной Вселенной? Впервые этот вопрос был поставлен самим Н. И. Лобачевским в связи с естественным вопросом о том, какая из геометрий лучше описывает реальный мир. Исследуя параллаксы ближайших звезд, он показал, что радиус кривизны Вселенной много больше характерного расстояния до ближайших звезд, равного нескольким парсекам. Современные оценки радиуса кривизны зависят от значения средней плотности Все-

ленной. Однако если плотность мира много меньше критической, то радиус кривизны, измеренный в единицах красного смещения, перестает зависеть от средней плотности. Именно, как нетрудно проверить (см., например, [50]),

$$R = e - 1 \approx 1,7.$$

Другими словами, если $z \ll 1,7$, то геометрию пространства можно считать евклидовой, а при $z \gg 1,7$ геометрия пространства существенно неевклидова.

Более детальное описание распределения и эволюции вещества во Вселенной предполагает переменность кривизны от точки к точке и по направлениям. Другими словами, необходимо рассматривать модели, близкие к фридмановским. Это делается в так называемой теории возмущений, в которой предполагается, что малы вариации плотности $\delta\rho/\rho$, скорости и других физических величин. В силу уравнений Эйнштейна, временная эволюция Вселенной также близка к эволюции фридмановской модели и ее можно изучать методами теории возмущений. Более тонко обстоит дело с пространственным строением таких возмущенных моделей. Дело в том, что малым относительным изменениям плотности вовсе не обязательно соответствуют малые относительные изменения кривизны K ; грубо говоря, $\delta K/K \sim \frac{\delta\rho}{\rho - \rho_c}$, т. е. для того, чтобы $\delta K/K$ было мало, нужна малость величин типа $\delta\rho/(\rho - \rho_c)$. Другими словами, если плотность мира близка к критической, то малым возмущением ее можно сильно изменить пространственное строение мира. Дело не ограничивается даже тем, что можно модель с пространством отрицательной кривизны сделать моделью с пространством положительной кривизны. Например, можно сделать пространственное сечение диффеоморфным прямому произведению сферы на прямую. Выполнение условия $\delta\rho \ll (\rho - \rho_c)$ не столь безобидно, как кажется на первый взгляд. Дело в том, что на ранних стадиях эволюции Вселенной, когда начинался процесс развития неоднородностей, плотность мира, как известно, была близка к критической.

Пространственная форма постоянной кривизны может иметь весьма разнообразное топологическое и геометрическое строение (при одной и той же кривизне). Общеизвестно, что из пространства нулевой кривизны можно склеить путем отождествления точек цилиндры, торы и другие более сложные многообразия. Сходные склейки возможны, разумеется, и в пространствах положительной и отрицательной кривизны. На эту возможность впервые в связи с физикой обратили внимание Клиффорд и Клейн. Их интерес был связан с так называемым гравитационным парадоксом, возникающим при рассмотрении в рамках ньютоновской теории тяготения неограниченного пространства, равномерно заполненного веществом. При этом, как нетрудно убедиться, оказывается, что гравита-

ционный потенциал обращается в бесконечность. Исторически гравитационный парадокс был решен в рамках общей теории относительности, а затем при ретроспективном анализе ньютоновской теории тяготения, с точки зрения общей теории относительности, было понято (см. [23]), что гравитационный парадокс решается и в рамках самой ньютоновской теории, если вместо ненаблюдаемого непосредственно потенциала рассматривать реально наблюдаемые вторые производные потенциала. Клиффорд и Клейн пытались решить этот парадокс совершенно иным способом — предположить, что реальное (ньютоновское!) пространство имеет топологию, например, тора, у которого просто нет бесконечности. Развитие физики не пошло этим путем, но в результате работ Клиффорда и Клейна сформировалось научное направление, исследующее пространственные формы постоянной кривизны. При этом те из них, которые являются замкнутыми, часто называют клиффорд-клейновскими.

Первый этап изучения пространственных форм постоянной кривизны закончился к тридцатым годам нашего века и был связан с именем Х. Хопфа. Основным достижением этого этапа была алгебраизация проблемы: было показано, что пространственные формы постоянной кривизны являются фактор-пространствами универсальных накрывающих (т. е. сферы, евклидова пространства и пространства Лобачевского) по тем дискретным подгруппам группы движений, которые не имеют неподвижных точек. В дальнейшем основные усилия были сосредоточены на поиске этих подгрупп. Результаты этих исследований, интенсивно проводившихся различными математиками, суммированы в [121]. Именно, построена топологическая и геометрическая классификация пространственных форм постоянной положительной кривизны и не вполне законченная, но достаточная для приложений теория пространственных форм нулевой кривизны. Напротив, проблема классификации пространственных форм отрицательной кривизны в общей постановке чрезвычайно трудна и еще не решена.

Разумеется, сразу после построения общей теории относительности было замечено, что локально изометрические модели пространства-времени могут быть топологически различными. На это впервые обратили внимание Эйнштейн [83] и Клейн [94]. Однако до семидесятых годов лишь в редких изолированных работах анализировался вопрос о том, каково же действительное пространственное строение Вселенной. Среди этих работ следует особенно отметить работу венгерского астронома Паала [102], который попытался объяснить некоторые особенности распределения квазаров нетривиальным топологическим строением пространственного сечения. Хотя в настоящее время ясно, что эти наблюдательные особенности связаны, по-видимому, с совершенно другими эффектами (наблю-

дательной селекцией), тем не менее работа Паала была первой, где проблемы глобального строения пространственного сечения были рассмотрены с точки зрения конкретных данных астрофизики.

Что же известно сегодня о строении пространственного сечения Вселенной? Ясно, что, оставаясь в рамках общей теории относительности, это строение можно определить лишь из наблюдений: уравнениям Эйнштейна одинаково хорошо удовлетворяют любые варианты глобального строения метрики $d\Sigma^2$. Для того чтобы произвести необходимое сопоставление с наблюдениями, необходимо, прежде всего, построить такие геометрические характеристики пространственной формы, или, как говорят, в космологии, склеенного мира, которые можно было бы сравнить с наблюдениями. Дело в том, что обычная топологическая и геометрическая классификации пространственных форм постоянной кривизны, в силу своего алгебраического характера, не содержат подобных величин; понятно, что в телескоп можно увидеть сколь угодно разнообразные звезды, галактики, квазары, но никак не свободную циклическую группу.

Параметры, характеризующие строение склеенных миров и допускающие сопоставление с наблюдениями, были построены в работе Д. Д. Соколова и В. Ф. Шварцмана [53]. Для построения этих параметров необходимо ввести сначала понятие о так называемых духах. На пространственной форме $d\Sigma^2$ рассмотрим точку b , соответствующую наблюдателю. На универсальной накрывающей пространственной формы $d\Sigma^2$ существует класс выделенных точек $\{B_i\}$, соответствующих наблюдателю. Одну из них (безразлично какую) мы будем называть оригиналом B наблюдателя b , а остальные — духами наблюдателя. Рассмотрим теперь на $d\Sigma^2$ некоторую точку a . Мы будем считать, что в a находится некий светящийся объект. При наблюдении мы видим картину универсальной накрывающей, другими словами, световые лучи, пришедшие разными путями от одного объекта a , мы воспринимаем как лучи, испущенные разными источниками A_i , расположенными в эквивалентных точках универсальной накрывающей M . Мы будем называть оригиналом объекта тот источник A , который ближе всего находится к оригиналу наблюдателя B , а остальные источники — духами источника. Может, разумеется, случиться и так, что одному объекту будет соответствовать несколько оригиналов объекта, находящихся на равных расстояниях от оригинала наблюдателя. Тогда мы будем произвольно считать оригиналом один из этих источников (множество подобных точек на универсальной накрывающей имеет меру нуль). Обозначим теперь совокупность всех оригиналов источников (возникающих, когда a пробегает $d\Sigma^2$) через $H(B)$, где точка B фиксирует положение оригинала наблюдателя, и на-

зовем это множество областью оригиналов. Очевидно, что область оригиналов является фундаментальной областью. Теперь легко построить необходимые нам параметры, которые принято называть параметрами склейки. Именно максимальным параметром склейки называется точная верхняя грань расстояния от точки B до границы области оригиналов, а минимальным параметром склейки — точная нижняя грань этого расстояния.

Важно подчеркнуть, что рассматриваемые эффекты сложного строения пространственного сечения являются не единственной причиной, которая может привести к появлению духов. Еще на начальном этапе развития общей теории относительности было осознано, что духи могут появляться в модели мира со сферическим пространственным сечением, когда свет несколько раз успевает обежать большой круг сферы. Фактически в стандартной фридмановской модели это может случиться лишь тогда, когда расширение сменится сжатием, однако можно построить и более сложные модели с так называемой космологической постоянной, в которых духи этого вида можно будет наблюдать и в настоящее время [105]. Такие духи легко отличить от духов, порожденных склейкой — они будут расположены в диаметрально противоположных направлениях на небесной сфере. Несмотря на то, что были предприняты поиски таких духов (см., например, [106]), результат оказался отрицательным [110]. Гораздо больший интерес представляют духи, возникающие из-за локальных неоднородностей Вселенной. Дело в том, что галактика или какой-либо иной объект, находящийся на пути распространения света, действует на него подобно линзе. Этот эффект так и называется гравитационной линзой. В результате действия гравитационной линзы может возникнуть дополнительное изображение удаленного источника. Эффект фактически наблюдается: открыты два удаленных квазара с очень сходными характеристиками, очень близко расположенные на небесной сфере, причем обнаружена и галактика, лежащая на пути распространения света от этих источников, масса которой достаточна для создания необходимого эффекта. Отличительной чертой этих духов как раз и является наличие объекта — гравитационной линзы, а также небольшое возможное число изображений и их крайняя близость друг к другу.

Казалось бы, нетрудно организовать поиски духов в любой конкретной модели склеенного мира. Для этого достаточно выбрать несколько легко доступных для наблюдения источников и поискать их духи в заранее предсказанных местах (разумеется, фактически придется перебрать возможные значения нескольких параметров, описывающих склейку). Однако дело осложняется тем, что от разных изображений одного и того же объекта свет идет к наблюдателю в разное время.

С другой стороны, все яркие и хорошо доступные наблюдению объекты очень быстро (по космологическим меркам) эволюционируют и мы просто не сможем опознать в одном источнике дух другого, быть может, уже погасшего источника.

В рамках этой статьи мы не будем останавливаться на конкретных оценках параметров склейки по имеющимся наблюдениям. Приведем лишь результат: максимальный параметр склейки не менее 400 мегапарсек ($z \sim 0,1$) [53], минимальный параметр склейки оценивается снизу величиной того же порядка, однако эту оценку не удастся получить методами поиска духов и необходимы другие методы, к обзору которых мы перейдем ниже. Важно, однако, сразу подчеркнуть, что ничто в современных наблюдательных данных не противоречит предположению о том, что мир склеен, скажем, в виде тора с расстоянием между склеиваемыми плоскостями порядка $z \sim 0,5-1$ [44]. Это обстоятельство означает, в частности, что часто встречающееся утверждение о том, что отрицательность знака кривизны пространственного сечения влечет пространственную неограниченность мира, основано на недоразумении.

Итак, обратимся к методам оценки минимального параметра склейки. Его трудно оценивать с помощью поиска духов просто потому, что максимальный параметр склейки — это расстояние, за которым нет оригиналов, а минимальный — расстояние, до которого нет духов, а распознать чем-либо выдающийся оригинал легче, чем убедиться, что на небе нет небольшого числа неприметных духов. Однако здесь на помощь приходит то обстоятельство, что склейки нарушают глобальную однородность и изотропию мира. Действительно, у большинства склеенных миров область оригиналов и параметры склейки зависят от положения наблюдателя. В некоторых особенно простых плоских склеенных мирах (цилиндрах и торах) такой зависимости нет, но область оригинала не переходит в себя при вращении вокруг положения наблюдателя (проще говоря, не является шаром). Имеется лишь один выделенный склеенный мир — проективное пространство, имеющее положительную кривизну, для которого склейка не нарушает однородность и изотропию (на это впервые обратил внимание Я. Б. Зельдович [122]). Этот факт нетрудно доказать, заметив, что фундаментальная группа склеенного мира остается инвариантной при группе движений универсальной накрывающей при действиях поворотов и трансляций лишь в том случае, когда она состоит из единицы и отражения.

Глобальная неоднородность и анизотропия склеенного мира отражается на спектре оператора Лапласа на этом многообразии, а затем и на картине возмущений в склеенном мире. Естественно думать, что при фиксированной длине волны возмущения в первоначальном спектре возмущений, из ко-

торых впоследствии сформировались скопления галактик, все возможные пространственные моды представлены примерно одинаково. Например, в простейшем случае глобального однородного плоского трехмерного тора спектр возмущений дискретный, причем его волновые векторы имеют вид

$$\left(\frac{2\pi m}{a}, \frac{2\pi n}{b}, \frac{2\pi p}{c}\right); m, n, p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

где a, b, c — размеры тора; наблюдаемая картина распределения скоплений галактик будет соответствующим образом модулирована и должна наблюдаться строгой периодичностью в ячеистой структуре. Разумеется, этот эффект будет заметен, только если длина волны возмущения сравнима с размерами тора. Аналогичная картина будет возникать и в более сложных моделях склеенного мира. Поэтому разумно считать, что нижняя оценка на минимальный параметр склейки — характерный размер ячеистой структуры (поскольку ничего не известно о наличии какой-либо ее точной периодичности).

Существенно новые черты может приобрести эта картина в глобально неоднородном мире, например, в роге (тороидального сечения, склеенном из пространства Лобачевского). Дело в том, что если в окрестности Земли расстояние между склеивающимися плоскостями будет много больше характерного расстояния между скоплениями галактик, то все равно найдется область, где все эти расстояния сравниваются и расстояние между отождествляемыми плоскостями начинает быть меньше расстояния между скоплениями; такая область называется G -областью. Как показали Д. Д. Соколов и А. А. Старобинский [52], в G -областях такого типа образования скоплений галактик, а также, по-видимому, и самих галактик не происходит. На небесной сфере такая область будет выглядеть в виде темного пятна. Можно было бы подумать, что из-за ничтожных угловых размеров объекта с линейными размерами, равными характерному расстоянию между скоплениями галактик, нет надежды увидеть такую мелкую деталь распределения галактик. Однако на самом деле духи этого объекта лежат в непосредственной близости с оригиналом, причем все вместе они образуют на универсальной накрывающей оришар, который виден под углом

$$\sin \varphi/2 = \frac{1}{z+1},$$

где z — красное смещение, под которым видна ближайшая точка границы G -области. При других типах склейки возможны также G -области, в которых будут образовываться галактики, не группирующиеся в скопления.

Другое наблюдательное проявление G -областей отмечено

в работе Д. Д. Соколова и А. А. Старобинского [51]. Поскольку точки G -областей имеют много духов, красное смещение которых мало отличается от красного смещения оригинала, то оказывается, что если время стабильной активности квазара порядка 10^6 — 10^7 лет, а $z \sim 1$ — 3 , то в G -области можно наблюдать 5—20 духов этого квазара с практически одинаковым красным смещением. Иными словами, если бы было обнаружено такое небольшое скопление примерно однотипных квазаров, то его имело бы смысл проанализировать на предмет поиска склеек. Важная отличительная особенность этого эффекта, по сравнению с эффектом гравитационной линзы, состоит в том, что мы должны наблюдать много квазаров на разных стадиях развития. Особенно благоприятным в этом смысле оказывается тот случай, когда квазар возникает в непосредственной близости от границы G -области в роге с тороидальным сечением. Там можно было бы при благоприятных условиях наблюдать несколько сот духов квазара! Именно с этим эффектом множественного появления духов связано название G -области, т. е. области духов (от нем. Geist — дух).

Обрисованное выше неутешительное положение о возможности наблюдательного изучения глобального строения мира заставляет еще раз вернуться к вопросу о возможности теоретического предсказания того или иного топологического строения пространственного сечения. Этот вопрос не может быть решен в рамках стандартной общей теории относительности, для которой задание той или иной склейки осуществляется в граничных условиях при выходе из квантово-гравитационной стадии эволюции Вселенной вблизи сингулярности. Далее это глобальное строение уже меняться не может. Однако возможно, что квантовая теория гравитации отбрасывает некоторые, а может быть и все возможные склеенные миры, кроме универсальных накрывающих. Пусть в классической области пространственное сечение представляет собой плоский трехмерный тор. Тогда в квантовой области надо, по-видимому, рассматривать суперпространство над прямым произведением трехмерного тора на ось времени, а также квантово-гравитационный фейнмановский интеграл (см. [56]) на этом суперпространстве. Следует отметить, что сколь-нибудь последовательной квантовой теории гравитации в настоящее время не существует и этот интеграл не только нельзя вычислить, но далеко не всегда понятно и как записать. Поэтому мы ограничимся лишь случаем пылевидного уравнения состояния, не обсуждая вопрос о применимости его в такой ситуации. Считается, что классическому пространству-времени соответствует в квантовой теории перевальная точка фейнмановского интеграла. Однако в рассматриваемом случае этот интеграл определяется не только локальными параметрами—компонентами метрического тензора, — но и тремя глобальными параметрами —

размерами тора. Разумеется, искомая перевальная точка должна определяться с учетом и этих параметров. Но нетрудно проверить, что наличие глобальных параметров обуславливает отсутствие перевальной точки у рассматриваемого интеграла. Действительно, в точках, являющихся перевальными по локальным параметрам, действие пропорционально объему многообразия, который является монотонной функцией параметров. Для обычной универсальной накрывающей нет таких глобальных параметров и указанная трудность не возникает. Итак, рассмотренный случай, по-видимому, запрещен законами квантовой гравитации. К сожалению, подобные непрерывные семейства диффеоморфных, но неизометричных склеенных миров не исчерпывают всего их разнообразия: более сложные склеенные миры характеризуются дискретным набором параметров и применить к ним непосредственно изложенные сообщения нельзя.

Казалось бы, можно еще более расширить класс рассматриваемых склеенных миров, включив в их число те факторпространства, которые имеют фундаментальные группы с неподвижными точками. В этих неподвижных точках пространство будет устроено подобно тому, как в вершине конуса. Это снова не приведет к осязаемым наблюдательным следствиям вдали от этих конических точек. Однако в этом случае саму коническую точку следует рассматривать как точку пространство-времени и поместить в ней такое вещество, чтобы выполнялись уравнения Эйнштейна. Необходимый расчет нельзя провести методами обычной общей теории относительности, так как в конических точках пространство-время нерегулярно, и мы встречаемся с истинной особенностью, которая, однако, может и не иметь ничего общего с квантово-гравитационными особенностями, с помощью которых должны описываться начальные этапы эволюции Вселенной. Рассмотрение этих нерегулярностей методами теории пространства ограниченной кривизны А. Д. Александра произведено в [24]. Оказывается, что, согласно уравнениям Эйнштейна, в конических сингулярностях должно быть сосредоточено вещество с самыми нереалистическими свойствами (отрицательным анизотропным давлением и т. п.). Однако наиболее ярко невозможность подобных сингулярностей доказывается рассмотрением квантовых эффектов в их окрестности, где, как показал А. А. Старобинский [54], должна наблюдаться огромная поляризация вакуума, стремящаяся к бесконечности при приближении к сингулярности. В обычных склеенных мирах также имеется некоторая поляризация вакуума, однако она ненаблюдаема в силу своей ничтожно малой величины.

§ 3. ПРОСТРАНСТВО СКОРОСТЕЙ
СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ —
ПРОСТРАНСТВО ЛОБАЧЕВСКОГО

В § 1 мы отметили, что пространство Лобачевского может быть реализовано в виде одной из компонент единичной сферы в псевдоевклидовом пространстве. Это означает, что ортогональная группа движений в специальной теории относительности представляет собой группу движений пространства Лобачевского. С точки зрения физики, этот факт интерпретируется следующим образом: пространство скоростей специальной теории относительности представляет собой пространство Лобачевского. В порядке иллюстрации полезно рассмотреть аналог пространства скоростей в классической механике. Пространством-временем классической механики является так называемое галилеево пространство E_g с координатами x, y, z, t , в котором заданы две метрики:

$$\rho_1(p_1, p_2) = |t_1 - t_2|,$$

$$\rho_2(p_1, p_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

если $\rho_1 = 0$. Пространство скоростей этой геометрии, т. е. его единичная сфера, имеет уравнение $|t| = 1$ (оно несвязно!). Группа движений этого пространства — группа Галилея — состоит из всевозможных движений евклидова пространства E^3 . Она в некотором (точно определенном) смысле и является пределом группы Лоренца при $v/c \rightarrow 0$. Группа Галилея содержит в качестве подгруппы ортогональную группу трехмерного пространства, но, конечно, не сводится к ней. При анализе интерпретации классической механики с помощью галилеева пространства-времени необходимо помнить, что такой подход является ретроспекцией, изложением классической механики в несвойственной ей системе понятий теории относительности. Аналогичная ретроспекция до некоторой степени возможна и при анализе более ранних физических теорий. Например, можно пытаться излагать в терминах теории пространства-времени физику Аристотеля (это делает, например, Пенроуз [103]). Разумеется, что чем дальше мы удаляемся от настоящего времени, тем меньше удерживают подобные ретроспекции имманентных черт соответствующих физических теорий. Подобные исследования порождают, однако, интересные геометрические конструкции. Отметим в этой связи очень интересную серию работ А. Артыкбаева по теории поверхностей в галилеевом пространстве (см., например, [4]). Он показал, что геометрия галилеева пространства доставляет адекватный аппарат исследования задачи Дирихле для эллиптических уравнений типа Монжа — Ампера в невыпуклых областях.

Прежде чем перейти к более детальному описанию пространства скоростей теории относительности, осветим кратко

историю вопроса. Первые шаги в формировании соответствующего взгляда на механику были предприняты еще самим Лобачевским [31], а также (в несколько более конкретной форме) Де-Тилли [81], [82], Дженокки [85] и Шерингом [108], [109], в связи с выяснением возможности построения механики в пространстве Лобачевского. Опираясь на известную аналогию между кинематикой и статикой твердого тела в евклидовом пространстве, пытаясь перенести ее в механику неевклидова пространства, они столкнулись с необходимостью построения новой теории векторов, пригодной для неевклидовых пространств.

Дальнейшее развитие этого круга идей с привлечением аппарата проективной геометрии было осуществлено в работах Линдемана [96], Клиффорда [79], Кокса [80] и Бухгейма [77]. Помимо обычных векторов (пары точек) они рассматривали как элементы теории векторов пары плоскостей и пары прямых. В соответствии с этим в векторную алгебру были введены комплексные числа с двумя единицами. До логического завершения эта теория была доведена А. П. Котельниковым [28]. Им был открыт так называемый принцип соответствия, позволяющий свести изучение сложных объектов этой теории к изучению гораздо более простой модели — связки векторов в евклидовом пространстве.

Открытие Эйнштейном специальной теории относительности придало этим исследованиям новое направление — выяснение связи геометрии пространства скоростей в специальной теории относительности и пространства Лобачевского. По-видимому, впервые на эту связь обратил внимание в 1909 году Зоммерфельд [111], а затем, независимо, Варичак [120], Герглоц [88] и Роб [107].

Далее, в 1914 году появился русский перевод статьи Клейна [27], стимулировавшей работы Казанской школы геометров. Клейн доказал, что группа Лоренца изоморфна группе движений пространства Лобачевского. В 1923 году А. П. Котельниковым [30] связь между геометрией Лобачевского и специальной теорией относительности была установлена полностью. А. П. Котельников, представляя скорость частицы в виде бесконечно удаленной точки пространства-времени, ввел проективное пространство скоростей. В этом пространстве скорость частицы с нулевой массой покоя (фотона) лежит на абсолюте, скорость частицы с положительной массой покоя — внутри абсолюта, а скорость частицы с мнимой массой покоя (такие частицы сейчас называют тахионами) — вне абсолюта. При этом внутренняя область абсолюта представляет собой пространство Лобачевского с характерной константой c , равной скорости света.

Интерес к этим исследованиям вновь возродился лишь в середине пятидесятых годов, в связи с появлением в свет кни-

ги В. А. Фока [57] и работы Н. А. Черникова [58]. В упомянутой книге В. А. Фока введение пространства скоростей Лобачевского основано на формулах Эйнштейна—Пуанкаре для относительной скорости частиц и модели Бельтрами геометрии Лобачевского. В отличие от В. А. Фока, построение Н. А. Черникова основано на введении расслоенного пространства.

Поясним основную идею построения Н. А. Черникова. Пространство-время теории относительности представляет собой гладкое многообразие, в котором траекториям частиц соответствуют гладкие кривые. Касательные к этим кривым представляют собой скорости частиц. Таким образом, в каждой точке $x \in M^4$ пространство скоростей частиц представляет собой проективное трехмерное пространство $P^3(x)$. Пространство же всех скоростей частиц представляет собой семимерное пространство с базой M^4 и слоем $P^3(x)$. При этом дифференциалы координат на многообразии M^4 представляют собой однородные координаты в $P^3(x)$. Зададим в слое $P^3(x)$ метрику $g_{ij}dx^i dx^j$ с сигнатурой $(+, -, -, -)$. Для обычных частиц $g_{ij}dx^i dx^j > 0$. Эта область представляет собой пространство Лобачевского с характерной константой c , равной скорости света. Скорости частиц с нулевой массой покоя (фотонов) определяются условием $g_{ij}dx^i dx^j = 0$, а частиц с мнимой массой (таххионов) — условием $g_{ij}dx^i dx^j < 0$.

Более детальное развитие теории пространства скоростей можно найти в работах Н. А. Черникова [58]—[68]. В настоящее время этот подход уже систематически используется рядом физиков (см. [9], [26], [45], [46]).

Сравнительно недавно изучение космических лучей показало, что при скоростях, близких к скорости света, соотношения Лоренца могут нарушаться. Причина этого явления заключается в следующем. Вблизи тяготеющих масс (например, Солнечной системы) космические лучи могут рассматриваться как пробные частицы. Иными словами, их собственным гравитационным полем можно пренебречь, по сравнению с гравитационным полем тяготеющих масс. Зато вдали от тяготеющих масс, наоборот, можно пренебречь внешним гравитационным полем — оно мало, по сравнению с собственным полем частиц. При этом собственное поле, конечно, может зависеть от направления скорости частиц, что приводит к анизотропии пространства скоростей. Пространство тем самым становится финслеровым.

Геометрические аспекты такой локальной анизотропии не раз обсуждались в литературе [11], [91], [93], [98], [116]—[118], однако вопрос о конкретизации типа финслеровых пространств, пригодных для описания этого эффекта, оставался открытым. Этот вопрос был решен Г. С. Асановым [5—8], изучившим свойства финслерова пространства $F_N\{r_A^m\}$ и показавшим, что при $N=4$ структура этого пространства полностью согласуется с теорией относительности.

В свете вышеизложенного представляется интересным вопрос о связи группы движений пространства Лобачевского и группы движений евклидова пространства. Естественной формулировкой этого вопроса является вопрос о возможности таких изометрических погружений пространств Лобачевского в евклидово пространство, при которых какая-либо группа движений пространства Лобачевского может быть индуцирована движениями объемлющего евклидова пространства. По-видимому, впервые на этот вопрос обратил внимание Бибербах [76]. Им было построено такое изометрическое погружение плоскости Лобачевского в гильбертово пространство, при котором любое внутреннее движение плоскости Лобачевского реализуется с помощью соответствующего движения гильбертова пространства (примерами такого типа погружений в E^3 метрик нулевой и постоянной положительной кривизны могут служить плоскость и сфера). Дальнейшему изучению этих вопросов посвящена работа С. Б. Кадомцева [25]. В ней доказаны следующие два утверждения:

1) Плоскость Лобачевского не допускает погружения в классе C^0 ни в какое конечномерное евклидово пространство в виде поверхности вращения с полюсом (с неподвижной точкой); при этом такое погружение части плоскости Лобачевского оказывается возможным уже в E^4 .

2) Плоскость Лобачевского не допускает погружения в классе C^0 ни в какое конечномерное евклидово пространство в виде поверхности, допускающей движения по самой себе вдоль любой своей геодезической (примером такой поверхности нулевой кривизны в E^3 может служить круговой цилиндр).

В той же работе приведено обобщение этих утверждений на случай погружений пространства Лобачевского Λ^h в E^n .

Заметим, что центральное место в доказательстве этих предложений занимает доказательство некоторого вспомогательного утверждения, представляющего, однако, и самостоятельный интерес. Суть его в следующем. Пусть L — кривая класса C^0 в евклидовом пространстве, обладающая следующим свойством: для любых двух точек кривой L существуют окрестности этих точек, конгруэнтные друг другу (примерами таких кривых в E^3 могут служить прямая, окружность и винтовая линия). Тогда кривая L — аналитическая.

С. Б. Кадомцевым получено следующее обобщение указанных двух утверждений. Плоскость Лобачевского не может быть погружена ни в какое конечномерное евклидово пространство в классе C^0 так, что какая-либо непрерывная группа движений реализуется с помощью движений объемлющего пространства. Поясним кратко идею этого доказательства. Предполагая противное, допустим, что указанное погружение возможно. Тогда метрику соответствующей поверхности можно привести к виду

$$dl^2 = ds^2 + H^2(s) dt^2,$$

где координатные линии t являются одновременно траекториями некоторой однопараметрической группы движений плоскости Лобачевского и некоторой однопараметрической группы движений объемлющего евклидова пространства. Учитывая вид движений объемлющего пространства, можно получить для функции $H(s)$ следующую оценку: $|H(s)| \leq Cs^2$ при достаточно больших s . С другой стороны, функция $H(s)$, очевидно, экспоненциально возрастает. Полученное противоречие доказывает утверждение.

§ 4. ГЕОМЕТРИЯ ЛОБАЧЕВСКОГО И НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

С физической точки зрения уравнения гиперболического типа описывают прежде всего различные волновые процессы. В частности, нелинейные уравнения гиперболического типа описывают распространение нелинейных волн, которые привлекают пристальное внимание в самых различных областях физики. К этому классу относится и уравнение, которое носит несколько необычное название «уравнение сайн-Гордона»

$$z_{tt} - z_{xx} = \sin z.$$

В релятивистской квантовой механике волновую функцию свободной частицы с массой m и нулевым спином можно описать так называемым уравнением Клейна—Гордона

$$\omega_{tt} - \omega_{xx} = m^2 \omega.$$

Развивающаяся нелинейная теория поля потребовала нелинейных аналогов уравнения Клейна—Гордона, причем простейший удачный вариант состоял в замене правой части $m^2 \omega$ на $\sin \omega$. По аналогии с названием «уравнение Клейна—Гордона» и родилось название «уравнение сайн-Гордона (от англ. sine — синус). В то время прошло незамеченным, что уравнение сайн-Гордона давно и хорошо известно в геометрии. Еще в 1878 г. в сообщении выдающегося русского математика П. Л. Чебышева «О кройке одежды» [119] был рассмотрен вопрос о таких сетях на поверхностях, в которых в любом сетевом четырехугольнике противоположные стороны имеют одинаковую длину. Если линии этой сети взять за координатные линии на поверхности, то линейный элемент поверхности примет вид

$$ds^2 = du^2 + 2\cos z \, du \, dv + dv^2,$$

где z — угол между линиями сети, а u и v — длины дуг координатных линий. П. Л. Чебышев указал дифференциальное уравнение, связывающее кривизну K этой поверхности и угол z . В современных обозначениях оно имеет вид

$$z_{uv} = -K \sin z.$$

Для поверхности постоянной отрицательной (скажем, равной -1) кривизны это уравнение простой заменой сводится к

уравнению сайн-Гордона. В 1900 г. Гильберт [90] показал, что сеть Чебышева на поверхности постоянной отрицательной кривизны образуется семействами асимптотических линий. Напомним, что асимптотическими называются такие линии на поверхности отрицательной кривизны, касательные векторы к которым обращают в нуль вторую квадратичную форму поверхности. В асимптотических координатах u и v эта форма имеет особенно простой вид

$$II = 2M du dv.$$

Очевидно, что сетевой угол z на регулярной поверхности должен удовлетворять условию

$$0 < z < \pi, \quad (2)$$

которое означает, что на седловой поверхности действительно имеется два семейства асимптотических линий. Оказывается, что верно и обратное: по данному регулярному решению уравнения сайн-Гордона, удовлетворяющему условию (2), можно построить регулярную поверхность постоянной отрицательной кривизны. В той же работе Гильберт показал, что на всей плоскости не существует регулярного решения уравнения сайн-Гордона, удовлетворяющего геометрическому условию регулярности (2). Это и было знаменитым доказательством теоремы о нереализуемости плоскости Лобачевского в евклидовом пространстве.

Начиная с работы Миндинга [100] и Бельтрами [74], было найдено много конкретных поверхностей постоянной отрицательной кривизны, реализующих части плоскости Лобачевского. В частности, Бэкlundом был указан способ построения по известной поверхности постоянной отрицательной кривизны новой поверхности того же рода. Систематически теория этих простых решений уравнения сайн-Гордона была развита Бьянки [75]. Впоследствии оказалось, что многие из этих конкретных решений уравнения сайн-Гордона имеют вполне определенный физический смысл, описывают распространение уединенных волн, так называемых солитонов. В современной физике аппарат нахождения солитонных решений, развитый Бьянки и Бэкlundом, находит широчайшее применение. С ним можно ознакомиться по обзорной статье [35]. Заметим, что решение, отвечающее псевдосфере

$$z = 4 \operatorname{arctg} e^{u+v},$$

описывает один солитон. Обратим внимание читателя, что это решение отвечает объединению обеих регулярных компонент псевдосферы, которая в целом не является регулярной поверхностью. Итак, возникает вопрос о том, можно ли сопоставить каждому регулярному решению уравнения сайн-Гордона нерегулярную поверхность аналогично тому, как солитону соот-

ветствует псевдосфера. Подход к решению этого вопроса был указан И. В. Грибковым [17], который обратил внимание на то, что на поверхностях вращения постоянной отрицательной кривизны асимптотические линии при переходе ребер и острий остаются регулярными пространственными кривыми, понятие угла между которыми сохраняет свой смысл. Далее Э. Г. Позняк [41] дал общий способ сопоставления решению уравнения сайн-Гордона поверхности в евклидовом пространстве.

Поверхности в псевдоевклидовом пространстве позволяют дать геометрическую интерпретацию и уравнениям, получающимся из уравнения сайн-Гордона путем комплексных замен (или, если угодно, интерпретацию комплексных решений этого уравнения) типа:

$$\begin{aligned} \omega_{uv} &= \operatorname{sh} \omega, \\ \omega_{uu} + \omega_{vv} &= \sin \omega, \\ \omega_{uu} + \omega_{vv} &= \operatorname{sh} \omega. \end{aligned}$$

Первое из них отвечает углу между асимптотическими линиями на поверхности постоянной положительной кривизны $+1$ с индефинитной метрикой. Несколько более изощренной должна быть геометрическая интерпретация уравнений эллиптического типа: они должны интерпретироваться с помощью выпуклых поверхностей, у которых нет асимптотических линий. Приходится вводить эти линии искусственно, вводя на поверхности комплексные координаты. Этот прием аналогичен введению мнимого времени в теории относительности, который позволяет рассматривать в некоторых случаях пространство с индефинитной метрикой наподобие пространства с положительно определенной метрикой.

Возвращаясь снова к уравнениям сайн-Гордона, отметим, что Бьянки начал рассматривать различные краевые задачи для этого уравнения. С современным состоянием вопроса можно ознакомиться по обзорной статье Э. Г. Позняка [39], где приведен также ряд оригинальных результатов, и по его же статье [40]. Многомерная геометрия уравнений типа сайн-Гордона развивалась Ю. А. Аминовым [2].

Авторы благодарны Р. Ф. Галеевой, Я. А. Смородинскому, С. Ф. Шандарину за полезное обсуждение.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Теорема. Пусть Φ — внутренне полная поверхность класса S^2 с индефинитной метрикой знакопостоянной кривизны K в псевдоевклидовом пространстве. Тогда поверхность Φ является внешне полной.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что все неизотропные геодезические поверхности Φ будут внешне пол-

ными кривыми. Это очевидное следствие обратного неравенства треугольника. Предположим теперь, что наша теорема неверна и поверхность Φ^* неполна. Рассмотрим ее пополнение $[\Phi^*]$ в E^3 и пусть P^* — точка Φ^* . Окружим точку P^* замкнутым шаром $V_{P^*}(R)$ и пусть $\Omega^*(P^*, R)$ — связная компонента множества $[\Phi^*]$, лежащая в этом шаре, содержащая точку P^* . Будем увеличивать радиус шара до тех пор, пока в множестве $\Omega^*(P^*, R)$ не появятся точки множества $[\Phi^*] \setminus \Phi$. Малым смещением точки P^* легко добиться того, чтобы на границе этого множества появилась ровно одна точка множества $[\Phi^*] \setminus \Phi$. Обозначим ее через Q^* . Теперь нашей задачей будет построение неизотропной геодезической, упирающейся в точку Q , соответствующую точке Q^* . Выполнение этой задачи несколько осложнено тем обстоятельством, что на псевдоримановом многообразии геодезическая полнота не обеспечивает геодезической связности. Это, в свою очередь, связано с тем, что в уравнение Якоби для вариаций геодезических вместо кривизны входит величина $K(v, v)$, где v — единичный касательный вектор геодезической. Поэтому на одном и том же многообразии для одних геодезических наблюдается и экспоненциальная неустойчивость и сближение геодезических. За сопряженными точками могут возникать точки, которые нельзя соединить геодезической с исходной точкой. Однако для таких точек, которые можно соединить кривой, на которой $K(v, v) < 0$, свойство геодезической связности, как легко видеть, сохраняется, поскольку действует условие разбегания кратчайших, и краевая задача для уравнения Якоби всегда однозначно разрешима (мы воспользовались условием знакопостоянства кривизны).

Рассмотрим теперь множество $\Omega(P^*, R)$, соответствующее в псевдоевклидовом пространстве множеству $\Omega^*(P^*, R)$. Может представиться две возможности: либо в любой окрестности точки Q существуют точки этого множества, которые можно соединить с Q кривой так, чтобы на ней было выполнено неравенство $K(v, v) < 0$, либо таких точек не найдется. Рассмотрим первую возможность. Зафиксируем одну из указанных точек и назовем ее M . Из других точек образуем последовательность M_n , сходящуюся в точке Q . Очевидно, можно добиться того, чтобы точки M и M_n тоже можно было соединить кривыми, на которых $K(v, v) < 0$. Соединим теперь точки M_n и M геодезическими отрезками γ_n . Нетрудно провести выбор точек M_n так, чтобы последовательность γ_n сходилась к неизотропной геодезической, исходящей из M , и, разумеется, упирающейся в Q . Для этого достаточно, например, брать точки либо на границе множества $\Omega(P^*, R)$, либо на изотропных линиях, исходящих из точки Q (сами эти линии, тоже, конечно, в двумерном случае являющиеся геодезическими, использовать затруднительно, поскольку мы не обосновали их внешней

полноты). Теперь нам осталось вспомнить, что неизотропные геодезические поверхности Φ должны быть внешне полными, а это условие здесь явно нарушено.

Обратимся теперь ко второму случаю. Легко видеть, что теперь Q^* — изолированная точка множества $[\Phi^*] \setminus \Phi$ и в ней поверхность Φ имеет острие, так что координата z , рассматриваемая как функция точки P на Φ^* , имеет в Q экстремум. Мы считаем, что метрика объемлющего пространства имеет вид $ds^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. Рассмотрим точку P_0 , близкую к Q , и выпустим из нее геодезическую с отрицательным квадратом касательного вектора. На этой геодезической функция $z(P)$ не может иметь локальных внутренних экстремумов, поэтому она упирается в точку Q , и мы снова приходим к противоречию с внешней полнотой неизотропных геодезических. Теорема доказана.

Заметим, что при доказательстве этой теоремы нам потребовалась даже не геодезическая полнота, а вообще говоря, несколько более слабое условие полноты неизотропных геодезических. Из доказанной теоремы вытекает, в частности, и внешняя полнота внутренне полной трубки с индефинитной метрикой положительной кривизны. В этом случае внешняя полнота означает просто, что трубка является уходящей в бесконечность поверхностью, проектирующейся на всю ось z .

ЛИТЕРАТУРА

1. Александров А. Д., Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей. М. — Л., Физматгиз, 1948, 387 с.
2. Аминов Ю. А., Изометрические погружения областей n -мерного пространства Лобачевского в $(2n-1)$ -мерное евклидово пространство. Мат. сб., 1980, 111, № 3, 402—433 (РЖМат, 1980, 7А689)
3. Арнольд В. И., Математические методы классической механики. М., Наука, 1974, 431 с. (РЖМат, 1975, 6Б433К)
4. Артыкбаев А., Восстановление выпуклых поверхностей по внешней кривизне в пространствах с проективными метриками. Докл. АН УзССР, 1976, № 10, 6—7 (РЖМат, 1977, 5А559)
5. Асанов Г. С., Финслерова геометрия локально анизотропного пространства-времени. VI Всес. геометр. конф. по современным проблемам геометрии. Тезисы докладов. Вильнюс, 1975, 19—21 (РЖМат, 1975, 12А583К)
6. —, Эффекты локальной анизотропии пространства-времени, определяемые финслеровой структурой. В сб. «Пробл. теории гравитации и элементарн. частиц». Вып. 8. М., Атомиздат, 1977, 37—43 (РЖМат, 1977, 12А831)
7. —, Гравитационное поле в финслеровом пространстве, основанном на понятии объема. Вестн. Моск. ун-та. Физ., астрон., 1976, 17, № 3, 288—296 (РЖМат, 1977, 2А779)
8. —, Финслерово пространство с алгебраической метрикой, определяемой полем реперов. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 67—87 (РЖМат, 1978, 1А643)
9. Атанашев Н. М., Миц-Касимов Р. М., Нагиев Ш. М., Уравнение квазипотенциального типа для релятивистской амплитуды рассеяния в ковари-

- антной гамильтоновой формулировке теории поля на световом конусе. Изв. АН АзССР, 1977, № 2, 15—22
10. *Бернштейн И. Н., Шварцман В. Ф.*, О связи между размерами Вселенной и ее кривизной. ЖЭТФ, 1980, 79, № 5, 1617—1628
 11. *Богословский Г. Ю.*, Специальная релятивистская теория анизотропного пространства-времени. В сб. «Актуальные проблемы физики элементарных частиц». Дубна, Объедин. ин-т ядер. исслед. РИ, 2—8529, 1975, 39—72
 12. *Богущи А. Н., Курочкин И. С., Федоров В. А.*, Векторы пространства Лобачевского и релятивистская кинематика. Докл. АН СССР, 1977, 136, № 1, 58—60
 13. *Бураго Ю. Д., Залгаллер В. А.*, Выпуклые множества в римановых пространствах неотрицательной кривизны. Успехи мат. наук, 1977, 32, № 3, 3—55 (РЖМат, 1977, 10А470)
 14. —, —, Геометрические неравенства. Л., Наука, 1980, 288 с. (РЖМат, 1980, 12А674К)
 15. *Вернер А. Л.*, Топологическое строение полных поверхностей неположительной кривизны со взаимно однозначным сферическим отображением. Вестн. Ленингр. ун-та, 1965, № 7, 16—29 (РЖМат, 1965, 10А450)
 16. *Гильберт Д.*, Основания геометрии. М.—Л., ОГИЗ, 1948, 491 с.
 17. *Грибков И. В.*, Построение некоторых регулярных решений уравнения «синус-Гордон» с помощью поверхностей постоянной отрицательной кривизны. Вестн. Моск. ун-та. Мат. мех., 1977, № 4, 78—83 (РЖМат, 1978, 4А559)
 18. —, Некорректность теоремы Шура. Докл. АН СССР, 1980, 252, № 6, 1304—1307 (РЖМат, 1980, 11А746)
 19. *Громоу Д., Клиффорд В., Мейер В.*, Риманова геометрия в целом. М., Мир, 1971, 343 с. (РЖМат, 1971, 7А734К)
 20. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.*, Современная геометрия. Методы и приложения. М., Наука, 1979, 759 с. (РЖМат, 1980, 5А623К)
 21. *Ефимов Н. В.*, Высшая геометрия. М., Физматгиз, 1961, 580 с. (РЖМат, 1962, 5А399К)
 22. —, Возникновение особенностей на поверхностях отрицательной кривизны. Мат. сб., 1964, 64, № 2, 286—320 (РЖМат, 1966, 5А478)
 23. *Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.*, Строение и эволюция Вселенной. М., Наука, 1975, 735 с.
 24. —, *Соколов Д. Д., Старобинский А. А.*, Некоторые вопросы геометрии в целом в общей теории относительности. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского», Казань, 1976. М., 1977, 122—132 (РЖМат, 1978, 7А1011)
 25. *Кадолицев С. Б.*, Невозможность некоторых специальных изометрических погружений пространства Лобачевского. Мат. сб., 1978, 107, № 2, 175—198 (РЖМат, 1979, 4А792)
 26. *Кадышевский В. Г.*, Квантовая теория поля с неевклидовым пространством относительных импульсов. Материалы Объедин. ин-та ядер. исслед. Дубна, 1970, 17 с.
 27. *Клейн Ф.*, О геометрических основаниях лоренцовой группы. В кн. «Новые идеи в математике». Вып. 5, С.-Пб., 1914, 144—174
 28. *Котельников А. П.*, Проективная теория векторов. Изв. Казанск. физ.-мат. об-ва, 2-я серия, 1892, VIII и IX
 29. —, Винтовое счисление. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1895—1896. Отд. изд. 1895
 30. —, Принцип относительности и геометрия Лобачевского. В сб. «In memoriam Lobatchevskii». Казань, 1927, 2, 37—66
 31. *Лобачевский Н. И.*, Собрание сочинений в 5 томах. Под ред. В. Ф. Кагана. М.—Л., Гостехиздат, 1949, 2
 32. *Матвиевская Г. П.*, Теория параллельных линий в Древности и в Средние века. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского», Казань, 1976. М., 1977, 88—95 (РЖМат, 1978, 7А812)
 33. *Оловягинищikov С. П.*, Об изгибании бесконечных выпуклых поверхностей. Мат. сб., 1946, 18, № 3, 429—440

34. Паули В., Теория относительности. М. — Л., ОГИЗ, 1947, 157 с.
35. Пелиновский Е. Н., Преобразование Бэклунда. Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 1, 19—36
36. Петров А. З., Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961, 459 с.
37. Позорелов А. В., Внешняя геометрия выпуклых поверхностей. М., Наука, 1969, 759 с. (РЖМат, 1969, 9А495К)
38. —, Многомерная проблема Минковского. М., Наука, 1975, 96 с. (РЖМат, 1975, 9А536К)
39. Позняк Э. Г., Геометрические исследования, связанные с уравнением $z_{xy} = \sin z$. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 8. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1977, 225—241 (РЖМат, 1978, 1А660)
40. —, Некоторые новые результаты об изометрических погружениях частей плоскости Лобачевского в E^3 . Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского», Казань, 1976, М., 1977. 73—78 (РЖМат, 1978, 7А934)
41. —, Геометрическая интерпретация регулярных решений уравнения $z_{xy} = \sin z$. Дифференц. уравнения, 1979, 15, № 7, 1332—1336 (РЖМат, 1980, 2Б308)
42. —, О регулярной реализации в целом двумерных метрик отрицательной кривизны. Докл. АН СССР, 1966, 170, № 4, 786—789 (РЖМат, 1967, 2А449)
43. —, Шикин Е. В., Поверхности отрицательной кривизны. В сб. «Алгебра. Топология. Геометрия (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1974, 171—207 (РЖМат, 1975, 6А861)
44. Рузмайкин А. А., Соколов Д. Д., Неоднородное крупномасштабное магнитное поле и глобальная структура Вселенной. Астрофизика, 1977, 13, № 1, 95—102
45. Скачков Н. Б., Солодовцов И. Л., Потенциалы однобозонного обмена в релятивистском конфигурационном представлении. Ядерная физика, 1977, 26, № 4, 695—702
46. Смородинский Я. А., Кинематика столкновений в геометрическом изложении. В сб. «Вопросы физики элементарных частиц». Ереван, Изд-во АН АрмССР, 1963, 242—271
47. Соколов Д. Д., Поверхности в псевдоевклидовом пространстве. В сб. «Пробл. геометрии. Т. 11. (Итоги науки и техн. ВИНТИ АН СССР)». М., 1980, 177—202 (РЖМат, 1980, 11А772)
48. —, О выпуклых поверхностях с индефинитной метрикой. Успехи мат. наук, 1978, 33, № 4, 227—228 (РЖМат, 1979, 2А572)
49. —, Некоторые свойства псевдоримановых многообразий и их приложения к математическим задачам космологии. Укр. геометр. сб., 1974, 15, 104—112 (РЖМат, 1975, 4А824)
50. —, Крупномасштабное магнитное поле и глобальная структура Вселенной. Письма в Астрон. ж., 1975, 1, № 3, 3—5
51. —, Старобинский А. А., О глобально неоднородных склеенных мирах. Астрон. ж., 1975, 52, № 5, 1041—1047
52. —, G -области в склеенных мирах и их наблюдательные проявления. В сб. «Релятивистская астрофизика. Космология. Гравитационный эксперимент». Минск, Ин-т физики АН БССР, 1976, 105—107
53. —, Шварцман В. Ф., Оценка размеров Вселенной с топологической точки зрения. ЖЭТФ, 1974, 66, № 2, 412—420
54. Старобинский А. А., Влияние топологии пространства-времени на поляризацию вакуума квантовых полей. В сб. «Классическая и квантовая теория гравитации». Минск, Ин-т физики АН БССР, 1976, 110—111
55. Ген Л. В., Жесткость полных поверхностей отрицательной кривизны, совпадающих с гиперболическим параболоидом вне компактной области. Успехи мат. наук, 1980, 35, № 6, 175—176 (РЖМат, 1981, 4А666)
56. Фейнман Р., Хибс А., Квантовая механика и интегралы по траекториям. М., Мир, 1968, 382 с.
57. Фок В. А., Теория пространства, времени и тяготения. М., Наука, 1955, 516 с.

58. Черников Н. А., Распад частицы и соединение частиц в образах пространства скоростей. Научн. докл. высш. школы, физ.-мат. н., 1958, № 2, 158—161 (РЖМат, 1960, 859)
59. —, Релятивистское распределение Максвелла — Больцмана и интегральная форма законов сохранения. Препринт (Объедин. ин-т ядер. исслед., Р — 723). Дубна, 1961
60. —, Кинетическое уравнение для релятивистского газа в произвольном гравитационном поле. Препринт (Объедин. ин-т ядер. исслед., Р — 1028). Дубна, 1961
61. —, Применения геометрии Лобачевского в специальной теории относительности. Междунар. зимняя школа теор. физики. Объедин. ин-т ядер. исслед. Дубна, 1964.
62. —, Лекции по геометрии Лобачевского и теории относительности. Новосибирск. Гос. ун-т, 1965
63. —, Стохастическое движение релятивистской частицы. Препринт (ИТФ, 68—44). Киев, 1968
64. —, Геометрия Лобачевского и релятивистская механика. В сб. «Физика элементарных частиц и атомного ядра». М., Атомиздат, 1973, 4, вып. 3, 773—810
65. —, Введение геометрии Лобачевского в механику. В сб. «Классическая и квантовая теория гравитации». Минск, Ин-т физики АН БССР, 1976, 47—53
66. —, Геометрия Лобачевского как физическая наука. Препринт. (Объедин. ин-т ядер. исслед., Р2—10251). Дубна, 1976
67. —, Введение геометрии Лобачевского в механику. Препринт (Объедин. ин-т ядер. исслед., Р2—9620). Дубна, 1976, 9 с. (РЖМат, 1976, 12А836)
68. —, Геометрия Лобачевского как физическая наука. Всес. науч. конф. по неевклид. геометрии «150 лет геометрии Лобачевского», Казань, 1976. М., 1977, 146—153 (РЖМат, 1978, 7А943)
69. Шварц Л., Математические методы для физических наук. М., Мир, 1965, 412 с. (РЖМат, 1967, 3В353К)
70. Шефель С. З., Вполне регулярные изометрические погружения в евклидово пространство. Сиб. мат. ж., 1970, 11, № 2, 442—460 (РЖМат, 1970, 8А573)
71. Шикин Е. В., Об изометрическом погружении в целом в R^3 некоторых метрик неположительной кривизны. Докл. АН СССР, 1974, 215, № 1, 61—63 (РЖМат, 1974, 7А842)
72. —, О регулярности орициклических координат. Мат. заметки, 1975, 17, № 3, 475—484 (РЖМат, 1975, 7А932)
73. Широков П. А., Н. И. Лобачевский как творец новой геометрической системы (к 150-летию со дня его рождения). Приложение в книге: Н. И. Лобачевский, Избранные работы по геометрии. Казань, 1966, 432 с. (РЖМат, 1967, 8А426К)
74. Beltrami E., Sull superficie di rotazione che serve di tipo alle superficie pseudospheriche. Giorn. di Math., 1872, 18, opere II
75. Bianchi L., Lezioni di Geometria differentiale. V. 1, Parte 2. Bologna, 1927
76. Bieberbach L., Eine singularitätenfreie Fläche konstanter negativer Krümmung im Hilbertschen Raum. Comment. math. helv., 1932, 4, 248—255
77. Buchheim A., A memoir on biquaternions. Amer. J. Math., 1885, 7
78. Cartan E., La geometrie des espaces de Riemann. Mem. sci. Math., 1923, 9, 457 p.
79. Clifford W. K., Preliminary sketch of biquaternions. Proc. London Math. Soc., 1873, 4
80. Cox H., On the applications of quaternions and Grassmann's Ausdehnungslehre to different kind, of uniform spaces. Trans. Cambridge Phil. Soc., 1883, 13
81. De-Tilly J., Etudes de Mécanique abstraite Mémoires couronnés et autres Mémoires. Publ. Acad. Belg., 1870, 21
82. —, Rapport sur la «Lettre à M. Quelet». Bull. Acad. Belg., 1873, 36, № 2

83. *Einstein A.*, Der Energiesatz in der allgemeine Relativitätstheorie. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1918, 1, 448—459
84. *Friedman A.*, Über der Krümmung der Raums. Z. Phys., 1922, 10, 377
85. *Genocchi A.*, Interna ad una dimostrazione di Daviet de Foncenex. Atti Accad. sci. Torino, 1869, 4
86. *Hadamard J.*, Les surfaces à courbures opposées. J. Math. pures et appl., 1898, 5, ser. 4, 27—73
87. *Hartman Ph., Wintner A.*, On the asymptotic curves of a surface. Amer. Trans. Math., 1951, 43, № 1, 149—172
88. *Herglotz G.*, Geometrie und relativistische Dynamik. Ann. Phys., 1910, 31, 404
89. *Hilbert D.*, Mathematische Probleme, Vortrag gehalten auf dem Internationalen Math. Kongress zu Paris 1900. Gött. Nachr., 1900, 253—297
90. —, Über Flächen von konstanter Gausschen Krümmung. Trans. Amer. Math. Soc., 1901, 2, 87—99
91. *Horváth J. I.*, New geometrical methods of the theory of physical fields. Nuovo cim., 1958, 9, Suppl., 2, 444—496
92. —, *Moor A.*, Entwicklung einer einheitlichen Feldtheorie begründet auf die Finslerische Geometry. Z. Phys., 1952, 131, 544—570
93. —, —, Entwicklung einer Feldtheorie begründet auf einen allgemeinen metrischen Linienelementraum. 1,2. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1955, A58, № 4, 421—429, № 5, 581—587 (PJKMar, 1957, 2513)
94. *Klein F.*, Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlichgeschlossenen Welt. Gött. Nachr., 1918, 394
95. *Klingenberg W.*, Über Riemannsche Mannigfaltigkeiten mit positiver Krümmung. Comment. math. helv., 1961, 35, № 1, 47—57 (PJKMar, 1964, 10A403)
96. *Lindemann F.*, Über unendlichen kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projectivischer Massbestimmung. Math. Ann., 1874, 7
97. *Lubimov V. A., Novikov E. G., Nozik V. Z., Tretyakov E. F., Kosik V. S.*, An estimate of the ν_i mass from β -spectrum of the tritium in the valine molecule. Phys. Lett., 1980, 94, B, 266
98. *Matsumoto M.*, On Einstein's gravitational field equation in a tangent Riemannian space of Finsler space. Repts Math. Phys., 1975, 8, № 1, 103—108 (PJKMar, 1976, 7A886)
99. *Menelaos*, Die Sphärik von Menelaos aus Alexandrien in der Verbesserung von Abu Nasr Mansur b'Ali b'Iraq mit Untersuchungen zur Geschichte des Textes bei den islamischen Mathematiker. Übers. M. Krause. Berlin, 1936
100. *Minding F.*, Über die Biegung krümmen Flächen. J. reine und angew. Math., 1938, 18, 365—368
101. *Oort J. H.*, The formation of Galaxies and the Origin of the high-velocity hydrogen. Astron. and Appl., 1970, 7, 381
102. *Paal G.*, Structure of space-time and quasar's distribution. Acta phys. Acad. sci. hung., 1971, 30, № 1, 51—54
103. *Penrose R.*, Structure of space-time. N. Y.-Ams., 1968, 182 pp.
104. *Penzias A. A., Wilson R. W.*, A measurement of exaen antenna temperature at 4080 mc/s. Astrophys. J., 1965, 142, № 1, 419—421
105. *Petrosian V., Salpeter E., Szekeres P.*, Quasy-stellar objects in universes with non-zero cosmological constant. Astrophys. J., 1967, 147, № 3, 1222—1226
106. *Piper D. E.*, Radio sources opposite quasars as a cosmological test. Nature, 1968, 219, 846
107. *Robb A. A.*, Optical geometry of motion, a new view of the theory relativity. Cambridge, 1911, 215 pp.
108. *Schering E.*, Die Schwerkraft im Gaussischen Raum. Nachr. der Königl. Gessellschaft der Wissenschaften, 1870., 37 S.
109. —, Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaussischen und Riemann-

- schen Räumen. Nachr. der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften, 1873, 21 S.
110. *Solheim J. E.*, Radio sources in opposite directions as a cosmological test. *Nature*, 1968, 217, № 5223, 41—43
 111. *Sommerfeld A.*, Zur relativistische Dynamik. *Phys. Z.*, 1909, 10, 826—829
 112. *Study E.*, Eine neue Darstellung der Kräfte der Mechanik durch geometrische Figuren. Ber. math.-phys. Classe der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Leipzig, 1899, 51
 113. —, Die Geometrie der Dynamen. Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1900, 8
 114. —, Geometrie der Dynamen. Leipzig, 1901
 115. —, Über Nicht-Euklidische und Liniengeometrie. Festschrift der Philosophische Facultät zu Greiswald, 1900
 116. *Takano Y.*, Variation principle in Finsler space. *Lett. nuovo cim.*, 1974, 11, № 10, 486—490
 117. —, Gravitational field in Finsler space. *Progr. Theor. Phys.*, 1968, 40, 1159—1180
 118. —, Theory of field in Finsler space. *Lett. nuovo cim.*, 1974, 10, № 17, 747—750
 119. *Tchebycheff P.*, Sur la coupe des vêtements. Assoc. Franç., 1878. Oeuvres 2
 120. *Varičák V.*, Geometrische Untersuchungen der relativistische Dynamik. *Z. Phys.*, 1910, 11, 93, 287—586
 121. *Wolf J. A.*, Spaces of constant curvature. New York, McGraw-Hill, 1967, 408 pp. (PJKMar, 1969, 1A640K)
 122. *Zeldovich I. B.*, Topologie (structure) of the Universe. *Comments Astrophys. and Space Phys.*, 1973, 5, 169
-