

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

A. F. Gribov, B. I. Shakhtarin, Recognition of higher harmonics in the method of quasiharmonic linearization, *Avtomat. i Telemekh.*, 1981, Issue 10, 183–188

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 18.97.9.172

February 15, 2025, 20:24:21



УДК 621.3.072.6:62-50

## УЧЕТ ВЫСШИХ ГАРМОНИК В МЕТОДЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ

ГРИБОВ А. Ф., ШАХТАРИН Б. И.

(Москва)

Рассматривается обобщение метода квазигармонической линеаризации с учетом высших гармоник в предполагаемом решении нелинейного дифференциального уравнения, описывающего фазовую автоматическую систему (ФАС). Получена система стационарных уравнений, характеризующих асинхронные режимы ФАС (вращательные движения). Проведено исследование устойчивости предполагаемого полигармонического решения. В качестве примера дан расчет динамических характеристик нелинейной системы второго порядка с учетом одной, двух и трех гармоник в предполагаемом решении.

### Введение

Рассмотрим нелинейную фазовую автоматическую систему. Ее дифференциальное уравнение можно записать в виде [1]

$$(0.1) \quad S(p)x + R(p)h(x) = 0,$$

где  $S(p)$  и  $R(p)$  — многочлены степени  $n$  и  $m$  соответственно ( $n \geq m+1$ ),  $S(0) = 0$ ,  $p = d/dt$  — оператор дифференцирования;  $h(x) = g(x) - \beta$ ,  $g(x)$  — периодическая ограниченная, нечетная функция:  $g(x+2\pi) = g(x)$ ,  $\max g(x) = -\min g(x) = 1$ ,  $g(-x) = -g(x)$ ,  $\beta = \text{const}$ ,  $x$  — фазовое рассогласование.

Практический интерес представляет исследование вращательных движений ФАС, характеризующих асинхронный режим ее работы. Эти движения обладают свойством  $x(t+T_c) = x(t) + 2\pi$ , где  $T_c$  — период вращательных движений.

Квазигармонический метод, предложенный в работе [1], позволяет приближенно исследовать вращательные движения ФАС (частотные характеристики  $\beta(\beta_c^*)$ ,  $\beta_c^* = 2\pi/\Omega T_c$ ,  $\Omega$  — полоса синхронизации) и полосу захвата ФАС.

### 1. Анализ стационарных режимов

Решение уравнения (0.1) в предположении вращательных движений будем искать в полигармонической форме

$$(1.1) \quad x(t) = \omega t + \text{Im} \sum_{k=1}^n w_k \exp(jk\omega t),$$

где  $w_k = u_k - jv_k$ ;  $\omega$ ,  $u_k$ ,  $v_k$  — параметры, подлежащие определению,  $k = \overline{1, n}$ . Характеристику  $g(x)$  представим отрезком ряда Фурье

$$(1.2) \quad g(x) = a_0 + \text{Im} \sum_{k=1}^n d_k \exp(jk\omega t),$$

где

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) d(\omega t), \quad d_k = e_k^{(1)} + j e_k^{(2)},$$

$$e_k^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin k\omega t d(\omega t), \quad e_k^{(2)} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos k\omega t d(\omega t), \quad k = \overline{1, n}.$$

Подставляя  $x(t)$  и  $g(x)$  в исходное уравнение (0.1) и осуществляя баланс гармонических и негармонических членов, получим

$$(1.3) \quad S(p)\omega t + R(p)a_0 = \beta,$$

$$S(p) = \sum_{k=1}^n w_k \exp(jk\omega t) + R(p) \sum_{k=1}^n d_k \exp(jk\omega t) = 0.$$

Используя формулу смещения  $L(p)(\exp(\lambda t)f(t)) = \exp(\lambda t)L(p+\lambda)f(t)$ , второе уравнение (1.3) перепишем в виде

$$\sum_{k=1}^n \exp(jk\omega t) [S(p+jk\omega)w_k + R(p+jk\omega)d_k] = 0.$$

В результате получим систему уравнений:

$$(1.4) \quad S(p)\omega t + R(p)a_0 = \beta,$$

$$S(p+jk\omega)w_k + R(p+jk\omega)d_k = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Пусть  $S'(0) = \Omega^{-1}$ ,  $R(0) = 1$ . Тогда стационарную систему, соответствующую (1.4), можно записать в форме

$$(1.5) \quad Y_0 = \beta_c + a_0 - \beta = 0,$$

$$Y_k = S(jk\omega)w_k + R(jk\omega)d_k = 0, \quad k = \overline{1, n},$$

где  $\beta_c = \omega/\Omega$ . В вещественной форме эти уравнения принимают вид

$$(1.6) \quad X_1 = \beta_c + a_0 - \beta = 0,$$

$$X_{2k} = \operatorname{Re}(S(jk\omega)w_k + R(jk\omega)d_k) = 0,$$

$$X_{2k+1} = \operatorname{Im}(S(jk\omega)w_k + R(jk\omega)d_k) = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Используя решение этой системы  $\omega^*$ ,  $w_k^*$ ,  $k = \overline{1, n}$ , можно построить частотные характеристики  $\beta(\beta_c)$  при стационарных режимах работы ФАС.

## 2. Устойчивость вращательных движений

Для исследования устойчивости решения в форме (1.1) дадим приращение параметрам движения и переходный процесс будем искать в виде

$$(2.1) \quad x(t) = (\omega^* + \Delta\omega)t + \sum_{k=1}^n \operatorname{Im}(w_k^* + \Delta w_k) \exp(jk(\omega^* + \Delta\omega)t).$$

Разложим  $a_0(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ ,  $d_k(u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$  в окрестности стационарной точки  $(u_1^*, \dots, v_n^*)$  в ряд Тейлора, ограничившись линейными членами, получим

$$a_0 = a_0^*(u_1^*, \dots, v_n^*) + \frac{\partial a_0}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial a_0}{\partial v_n} \Delta v_n = a_0^* + (\text{grad } a_0, H),$$

$$d_k = d_k^*(u_1^*, \dots, v_n^*) + \frac{\partial d_k}{\partial u_1} \Delta u_1 + \dots + \frac{\partial d_k}{\partial v_n} \Delta v_n = d_k^* + (\text{grad } d_k, H),$$

где  $H = (h_i) = (\Delta \beta_c, \Delta u_1, \Delta v_1, \dots, \Delta u_n, \Delta v_n)$  — вектор приращений. Тогда (1.4) будет иметь вид

$$S(p) [(\omega^* + \Delta \omega)t] + R(p) [a_0^* + (\text{grad } a_0, H)] = \beta,$$

$$S(p + jk\omega^* + jk\Delta\omega) (w_k^* + \Delta w_k) + R(p + jk\omega^* + jk\Delta\omega) [d_k^* + (\text{grad } d_k, H)] = 0.$$

Ограничимся линейными членами в разложениях

$$S(p + jk\omega^* + jk\Delta\omega) = S(p + jk\omega^*) + jkS'(p + jk\omega^*) \Delta\omega,$$

$$R(p + jk\omega^* + jk\Delta\omega) = R(p + jk\omega^*) + jkR'(p + jk\omega^*) \Delta\omega$$

и учтем, что  $S(p) (\Delta\omega t) = S'(p) \Delta\omega + tS(p) \Delta\omega$ . Тогда, приравнявая нулю величину  $tS(p) \Delta\omega$  и учитывая условия стационарности (1.6), получим однородную относительно компонент вектора приращений  $H$  систему уравнений:

$$R(p) (\text{grad } a_0, H) + \Omega S'(p) \Delta \beta_c = 0,$$

$$(2.2) \quad S(p + jk\omega^*) \Delta w_k + R(p + jk\omega^*) (\text{grad } d_k, H) + jk\Omega [S'(p + jk\omega^*) w_k^* + R'(p + jk\omega^*) d_k] \Delta \beta_c = 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Введем вектор  $B = (b_i) = (\beta_c, u_1, v_1, \dots, u_n, v_n)$ . Тогда, пренебрегая бесконечно малыми высокого порядка (движения медленные) из (2.2), учитывая (1.5), получим

$$\left[ \frac{\partial Y_0}{\partial b_i} + \Omega S''(0) p \right] h_i + \sum_{i=2}^{2n+1} \left[ \frac{\partial Y_0}{\partial b_i} + R'(0) \frac{\partial a_0}{\partial b_i} p \right] h_i = 0,$$

$$\left[ \frac{\partial Y_k}{\partial b_i} + jk\Omega (S''(jk\omega) w_k + R''(jk\omega) d_k) p \right] h_i +$$

$$+ \sum_{i=2(i \neq 2k, 2k+1)}^{2n+1} \left[ \frac{\partial Y_k}{\partial b_i} + R'(jk\omega) \frac{\partial d_k}{\partial b_i} p \right] h_i +$$

$$+ \left[ \frac{\partial Y_k}{\partial b_{2k}} + \left( S'(jk\omega) + R'(jk\omega) \frac{\partial d_k}{\partial b_{2k}} \right) p \right] h_{2k} +$$

$$+ \left[ \frac{\partial Y_k}{\partial b_{2k+1}} + (R'(jk\omega) \frac{\partial d_k}{\partial b_{2k+1}} - jS'(jk\omega) p) \right] h_{2k+1} = 0, \quad k = \overline{1, n}$$

Представим эту систему в матричной форме  $M_0 H = 0$ , которую удобно переписать в виде  $(M+Q)H = 0$ , где

$$M = \begin{pmatrix} \partial Y_0 / \partial b_i \\ \text{Re } \partial Y_k / \partial b_i \\ \text{Im } \partial Y_k / \partial b_i \end{pmatrix}; \quad Q = (q_{ij} p); \quad q_{ij} = \text{const};$$

$$k = \overline{1, n}; \quad i, j = \overline{1, 2n+1}.$$

Отсюда приходим к характеристическому уравнению  $|M+Q|=0$ , после чего можно решить вопрос об устойчивости колебаний путем использования критерия Рауса — Гурвица.

### 3. Пример

Рассмотрим уравнение второго порядка, для которого  $S(p)=\Omega^{-1}(p+\tau p^2)$ ,  $R(p)=1+a\tau p$ . Этому случаю соответствует система трансцендентных уравнений, характеризующих стационарное движение

$$(3.1) \quad \begin{aligned} X_1 &= \beta_c + a_0 - \beta = 0, \\ X_{2k} &= -k^2 \alpha^{-2} \beta_c u_k + k \beta v_k + e_k^{(4)} - k \alpha \alpha^{-2} \beta_c e_k^{(2)} = 0, \\ X_{2k+1} &= k \beta_c u_k + k^2 \alpha^{-2} \beta_c^2 v_k + e_k^{(2)} + k \alpha \alpha^{-2} \beta_c e_k^{(4)} = 0, \end{aligned}$$

где  $\alpha = \Omega^{-1}(\Omega/\tau)^{1/2}$ ,  $k = \overline{1, n}$ .

В результате решения системы (3.1) для случая одной, двух и трех гармоник получены частотные характеристики, представленные вместе с результатами численного интегрирования на рис. 1 при  $a=0$ ,  $\alpha=0,15$ ;  $0,35$ ;  $0,55$ ;  $0,95$  и на рис. 2 при  $a=0,1$ ;  $\alpha=0,05$ ;  $0,3$ ;  $0,5$ . Штрихпунктирная кривая на рис. 2 является точным графиком частотной характеристики при  $\alpha \rightarrow 0$ . Номеру кривой на рисунках соответствует число учитываемых гармоник. Каждому  $\alpha$  соответствуют одна кривая, полученная численным методом (пунктир), и три кривых, полученных методом квазигармонической линеаризации. Критические значения  $\beta = \beta_k$  при  $a=0$  и  $a=0,1$  с учетом одной, двух и трех гармоник и результаты численного интегрирования представлены в таблице, где  $\beta_{ki}$  — критические значения при учете  $i$  гармоник,  $\beta_{kr}$  — результаты численного интегрирования. Из анализа рисунков и таблицы видно, что учет дополнительных гармоник увеличивает точность метода как по критерию характеристики колебаний, так и по критерию критического значения  $\beta_k$ . Наибольшее увеличение точности дает введение второй гармоники. Вместе с тем, учет третьей гармоники существенно расширяет диапазон применимости приближенного метода. Особенно это заметно при  $a \neq 0$ .

$a = 0$	$\alpha$	0,05	0,15	0,35	0,55	0,95
	$\beta_{k1}$	0,0571	0,1703	0,3867	0,5773	0,6634
	$\beta_{k2}$	0,0629	0,1873	0,4286	0,6427	0,9353
	$\beta_{k3}$	0,0638	0,1906	0,4308	0,6534	0,9548
	$\beta_{kr}$	0,0637	1,1899	0,4321	0,648	0,9441
$a = 0,1$	$\alpha$	0,05	0,15	0,3	0,5	0,95
	$\beta_{k1}$	0,4353	0,4323	0,1247	0,5708	0,6321
	$\beta_{k2}$	0,4361	0,4424	0,5001	0,6577	0,9466
	$\beta_{k3}$	0,4409	0,4454	0,5026	0,6733	0,9663
	$\beta_{kr}$	0,4365	0,4529	0,506	0,6726	0,9646

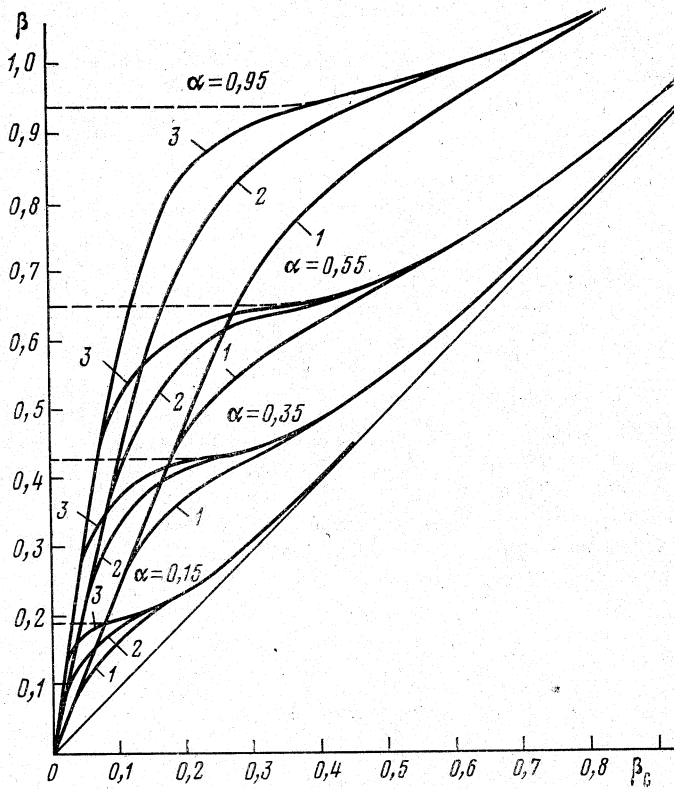


Рис. 1

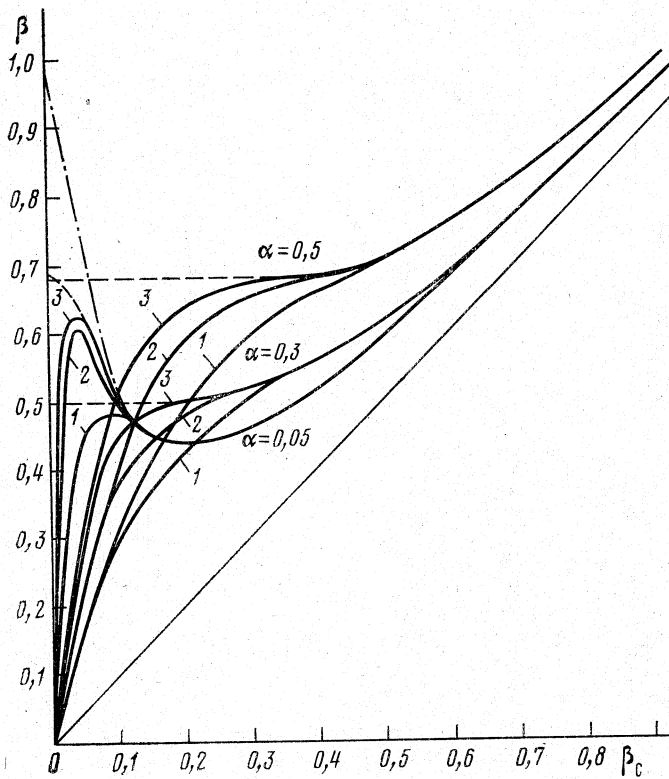


Рис. 2

## ЛИТЕРАТУРА

1. Шахтарин Б. И. Устойчивость движений нелинейной системы с периодической характеристикой. — Техническая кибернетика, 1977, № 5, с. 174–182.

Поступила в редакцию  
13.X.1980

---

### RECOGNITION OF HIGHER HARMONICS IN THE METHOD OF QUASIHARMONIC LINEARIZATION

GRIBOV A. F., SHAKHTARIN B. I.

The method of quasiharmonic linearization which recognizes higher harmonics is extended in assumed solution to the nonlinear differential equation which describes a phase automatic system (PAS). A set of stationary equations is obtained which characterize asynchronous PAS modes (rotational motions). Stability of the assumed polyharmonic solution is checked. For illustration, computation of dynamic responses is given for a second order nonlinear system where existence of one, two, and three harmonics in the assumed solution is recognized.

---