А. А. Непомнящий, И. Б. Симановский, Термокапиллярная конвекция в двухслойной системе, *Докл. АН СССР*, 1983, том 272, номер 4, 825–827

Доклады Академии наук СССР
1983. Том 272, № 4

УДК 536.25 ГИДРОМЕХАНИКА

А.А. НЕПОМНЯЩИЙ, И.Б. СИМАНОВСКИЙ

ТЕРМОКАПИЛЛЯРНАЯ КОНВЕКЦИЯ В ДВУХСЛОЙНОЙ СИСТЕМЕ

(Представлено академиком Г.И. Петровым 17 I 1983)

Конвективная устойчивость равновесия жидкости со свободной поверхностью при наличии термокапиллярного эффекта подробно исследована [1]. В большинстве работ на свободной границе для температуры ставятся граничные условия третьего рода. В настоящей работе применен более точный подход: расчет температуры на границе осуществляется в двухслойной постановке, т.е. решается сопряженная гидродинамическая и тепловая задача в средах по обе стороны от границы раздела. Этот подход позволяет обнаружить ряд новых специфических особенностей данного явления.

1. Пусть пространство между двумя горизонтальными твердыми пластинами ($y = a_1$, $y = -a_2$), на которых поддерживается постоянная и различная температура (разность температур равна θ), заполнено двумя слоями несмешивающихся вязких жидкостей. В данном пункте граница раздела предполагается плоской ($y = 0$). Все величины, которые относятся к жидкости, заполняющей область $0 < y < a_1$, обозначаются индексом 1, а к жидкости, заполняющей область $-a_2 < y < 0$, – индексом 2. Коэффициенты динамической и кинематической вязкости, теплопроводности, температуропроводности и объемного расширения соответственно равны η_i, ν_i, κ_i, χ_i, β_i, $i = 1, 2$. Коэффициенты поверхностного натяжения линейно зависит от температуры $\sigma = \sigma_0 - \alpha T$.

Введем обозначения: $\eta = \eta_1/\eta_2$, $\nu = \nu_1/\nu_2$, $\kappa = \kappa_1/\kappa_2$, $\chi = \chi_1/\chi_2$, $a = a_2/a_1$. Выберем в качестве единиц длины, времени, функции тока ψ_i, вихря скорости φ_i и температуры T_i соответственно a_1, a_1^2/χ_1, χ_1, χ_1/a_1^2, θ. Выпишем уравнения свободной конвекции только для плоского случая:

$$\frac{\partial\varphi_i}{\partial t} + \frac{1}{\mathrm{P}}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} - \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\right) = d_i\Delta\varphi_i + \mathrm{R}b_i\frac{\partial T_i}{\partial x},$$

$$\Delta\psi_i = -\varphi_i, \tag{1}$$

$$\mathrm{P}\frac{\partial T_i}{\partial t} + \frac{\partial\psi_i}{\partial y}\frac{\partial T_i}{\partial x} - \frac{\partial\psi_i}{\partial x}\frac{\partial T_i}{\partial y} = c_i\Delta T_i,$$

где $d_1 = b_1 = c_1 = 1$, $d_2 = 1/\nu$, $b_2 = 1/\beta$, $c_2 = 1/\chi$; $\mathrm{R} = g\beta_1\theta a_1^3/\nu_1\chi_1$ – число Релея, $\mathrm{P} = \nu_1/\chi_1$ – число Прандтля.

Граничные условия на твердых стенках:

$$y = 1,\quad \psi_1 = \frac{\partial\psi_1}{\partial y} = T_1 = 0;$$

$$y = -a,\quad \psi_2 = \frac{\partial\psi_2}{\partial y} = 0,\quad T_2 = s,\quad s = \pm 1. \tag{2}$$

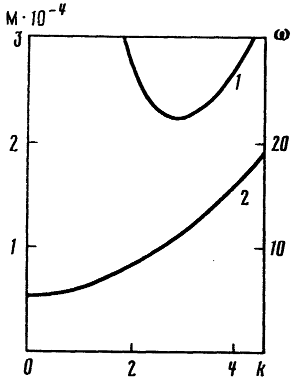

Рис. 1

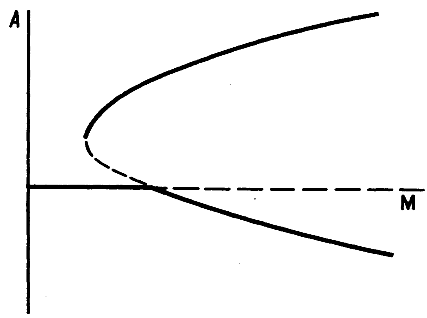

Рис. 2

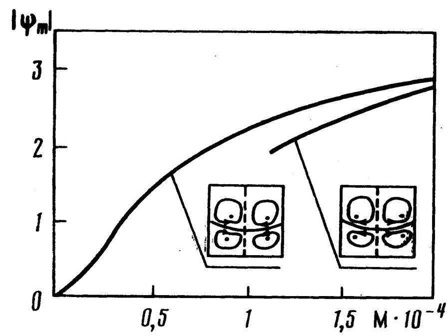

Рис. 3

Рис. 1. Зависимость порогового числа M(*1*) и частоты ω(*2*) от волнового числа k

Рис. 2. Зависимость амплитуды движения A от числа M вблизи порога устойчивости. Сплошные линии – устойчивые ветви, штриховые – неустойчивые

Рис. 3. Зависимость ψ_m(M) для $\eta = \nu = 0{,}5$; $\kappa = \chi = a = 1$; $l = 1{,}25$; $R = 0$; $s = 1$; краевой угол 80°

На границе раздела выполняются условия:

$$y = 0, \quad \psi_1 = \psi_2 = 0, \quad \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}, \quad T_1 = T_2, \quad \kappa \frac{\partial T_1}{\partial y} = \frac{\partial T_2}{\partial y}, \tag{3}$$

$$\varphi_2 = \eta\left(\varphi_1 + \mathrm{M}\frac{\partial T_1}{\partial x}\right),$$

где $\mathrm{M} = \alpha\theta a_1/\nu_1\chi_1$ — число Марангони.

Для случая бесконечных слоев ставится условие ограниченности функций ψ_i, φ_i, T_i при $x \to \pm\infty$. Если слой имеет конечную протяженность $2l$, следует добавить граничные условия на вертикальных стенках $(x = \pm l)$.

2. Система (1)–(3) обладает решением

$$\psi_i^{(0)} = \varphi_i^{(0)} = 0, \quad T_1^{(0)} = \pm\frac{(1-y)}{(1+\kappa a)}, \quad T_2 = \pm\frac{(1-\kappa y)}{(1+\kappa a)},$$

соответствующим механическому равновесию.

Устойчивость равновесия определяется спектром инкрементов нормальных возмущений, который находится из решения линеаризованной задачи [1]. Решение краевой задачи для нормальных возмущений осуществлялось методом Рунге–Кутта с автоматическим выбором шага. Существенной особенностью линеаризованной задачи для двухслойной системы является ее несамосопряженность (задача является самосопряженной, только если $\beta\eta\chi/\nu = 1$, $\mathrm{M} = 0$), которая может приводить к появлению колебательной неустойчивости. Для случая термогравитационной конвекции это явление обнаружено в [2]. Для термокапиллярной конвекции колебательная неустойчивость может оказаться единственно возможным механизмом неустойчивости равновесия (см. рис. 1).

Другим важным следствием несамосопряженности линейной задачи является возможность двусторонней бифуркации стационарных решений в случае монотонной неустойчивости равновесия (см. рис. 2). Именно, из рассмотрения трехмерного обобщения задачи (1)–(3) для пространственно-периодической конвекции в бесконечных горизонтальных слоях бифуркация является односторонней для течений в форме валов и прямоугольных ячеек, но двусторонней для гексагональных ячеек. Для конвекции в замкнутой области ($-l \leqslant x \leqslant l, \quad -a \leqslant y \leqslant 1$) односторонняя бифуркация реализуется в случае, когда для нормального возмущения ψ – четная, а T – нечетная функции по x; в противоположном случае бифуркация двусторонняя.

3. Для расчета конечноамплитудной конвекции решение системы (1)–(3) осуществлялось с помощью метода конечных разностей. Вычислительная процедура подробно описана в [3].

Режимы течения, обнаруженные при численном исследовании, весьма многообразны. Остановимся лишь на некоторых моментах. Сеточные расчеты подтверждают возможность возникновения колебательных режимов конвекции в результате неустойчивости равновесия как для горизонтальных слоев, так и для замкнутой полости. Обнаружен переход между колебательным и стационарным течением при изменении M путем неограниченного увеличения периода колебаний. Так, для конвекции в замкнутой полости с $a = 1$, $l = 1{,}25$ ($\eta = \nu = 0{,}5$, $\kappa = \chi = 1$, $\mathrm{R} = 0$, $s = 1$) при $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_* \simeq 5 \cdot 10^4$ период колебаний аппроксимируется формулой

$$\tau^{-2} = 0{,}31(\mathrm{M}_* - \mathrm{M}).$$

Эта зависимость позволяет высказать предположение, что при $\mathrm{M} \to \mathrm{M}_*$ колебательный цикл превращается в сепаратрису седло-узла [4]. Включение термогравитационного механизма ($\mathrm{R} \neq 0$) приводит к появлению области нерегулярных колебаний, ограниченной по числу M снизу регулярными колебаниями, а сверху стационарными движениями.

В отсутствие силы тяжести для термокапиллярной конвекции существенным является эффект искривления границы раздела (в условиях невесомости граница раздела $y = h(x)$ в замкнутой области имеет форму дуги окружности [5]). Уравнения и граничные условия записывались с использованием криволинейной системы координат $X = x$, $Y = Y(x, y)$, в которой уравнение этой границы имеет вид $Y = 0$. В случае искривленной границы раздела механическое равновесие невозможно, но колебания могут возникнуть в результате неустойчивости стационарного конвективного движения. При существенном искривлении границы раздела реализуются стационарные движения. Типичная картина зависимости максимального значения функции тока в первой жидкости от числа M для движения с различным направлением вращения вихрей показана на рис. 3.

Пермский государственный педагогический институт
Институт механики сплошных сред
Уральского научного центра Академии наук СССР, Пермь

Поступило
19 I 1983

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с. 2. *Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М.* – ДАН, 1982, т. 265, № 2, с. 302–305. 3. *Симановский И.Б.* – Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 3–10. 4. *Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э.* Теория колебаний. М.: Наука, 1981. 568 с. 5. Гидромеханика невесомости/Ред. А.Д. Мышкис. М.: Наука, 1976. 504 с.