

© А.А. АГРАЧЁВ,  
член-корреспондент АН СССР Р.В. ГАМКРЕЛИДЗЕ

### ВАРИАЦИЯ "ЗАМЕНА ВРЕМЕНИ" В ОПТИМАЛЬНОМ УПРАВЛЕНИИ

Рассматривается задача быстродействия для гладких систем. Приведены необходимые условия оптимальности, прежде всего для релейных управлений, удовлетворяющих принципу максимума Понтрягина. В качестве приложения рассмотрено твердое тело, которое разрешается вращать с заданной скоростью вокруг двух фиксированных осей.

1. В работе используются обозначения и формулы хронологического исчисления (см. [1, 2]). Пусть  $M$  — многообразие класса  $C^\infty$ . Нестационарным векторным полем на  $M$  называется произвольное семейство  $f_t$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , гладких векторных полей на  $M$ , локально суммируемое по  $t$ . Нестационарное поле  $f_t$  называется полным, если определен поток (однопараметрическое семейство диффеоморфизмов)

$$p_t = \exp \int_0^t f_\tau d\tau, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Значение диффеоморфизма  $p_t$  и поля  $f_t$  в точке  $\mu \in M$  мы обозначаем соответственно  $\mu \circ p_t$  и  $\mu \circ f_t$ , приписывая точку слева: это очень удобно при формальных вычислениях.

Для нужд теории управления достаточно рассматривать потоки  $p_t$  в  $M$  лишь для неотрицательных значений временной переменной  $t$ . На множестве всех потоков определено замечательное действие группы абсолютно непрерывных замен времени, играющее важнейшую роль в дальнейшем изложении. Именно, пусть  $\varphi: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  — абсолютно непрерывное взаимно однозначное преобразование полупрямой на себя и  $p_t = \exp \int_0^t f_\tau d\tau$ ,  $t \geq 0$ . Положим

$$(\varphi^* p)_t = \exp \int_0^{\varphi(t)} f_{\varphi^{-1}(\tau)} d\tau.$$

Пусть  $\frac{d\varphi}{dt}(t) = 1 + \alpha(t)$ ,  $t \geq 0$ . Тогда, как нетрудно видеть,

$$(1) \quad (\varphi^* p)_t = \exp \int_0^t (1 + \alpha(\tau)) f_\tau d\tau.$$

Можно с самого начала исходить не из  $\varphi(t)$ , а из  $\alpha(t)$ : если  $\alpha(t)$  — некоторая локально суммируемая функция на  $[0, +\infty)$ , причем  $\alpha(t) \geq \epsilon - 1 > -1 \quad \forall t \geq 0$ , то отображение  $t \mapsto t + \alpha(t)$  является взаимно однозначным абсолютно непрерывным преобразованием полупрямой  $[0, +\infty)$ . Из равенства (1) вытекает, что нестационарное поле  $(1 + \alpha(t))f_t$  является полным одновременно с  $f_t$ . Для всякого

$t > 0$  обозначим через  $\mathfrak{A}_t$  открытое подмножество в пространстве  $L_\infty [0, t]$ , состоящее из всех функций  $\alpha(\cdot)$ , удовлетворяющих условию:  $\alpha(\tau) \geq \epsilon - 1$  для любого  $\tau \in [0, t]$  и некоторого  $\epsilon > 0$ .

Зафиксируем некоторую точку  $\mu_0 \in M$  и определим отображения  $F_t: \mathfrak{A}_t \rightarrow M$  с помощью правила

$$F_t: \alpha(\cdot) \mapsto \mu_0 \circ \vec{\text{exp}} \int_0^t (1 + \alpha(\tau)) f_\tau d\tau.$$

Можно показать (см. [1]), что  $F_t$  является бесконечно дифференцируемым отображением  $\mathfrak{A}_t$  в  $M$ . Имеем  $F_t(0) = \mu_0 \circ p_t$ . Вместо  $F_t$  во многих отношениях удобнее для изучения эквивалентное ему отображение  $G_t: \alpha(\cdot) \mapsto F_t(\alpha(\cdot)) \circ p_t^{-1}$ . Положим

$$h_\tau = \vec{\text{exp}} \int_0^\tau ad f_\theta d\theta f_\tau.$$

Из формулы вариации [1] следует, что

$$(2) \quad G_t(\alpha(\cdot)) = \mu_0 \circ \vec{\text{exp}} \int_0^t \alpha(\tau) h_\tau d\tau,$$

в частности,  $G_t(0) = \mu_0$ . В дальнейшем нам потребуются явные выражения для первого и второго дифференциала отображения  $G_t$  в нуле. Первый дифференциал в нуле обозначим  $G_t'$ , а второй —  $G_t''$ . В таком случае  $G_t': L_\infty [0, t] \rightarrow T_{\mu_0} M$  — линейное отображение, а  $G_t'': \ker G_t' \times \ker G_t' \rightarrow T_{\mu_0} M$  — симметричное билинейное отображение. Здесь  $L_\infty [0, t] \supset \ker G_t'$  — ядро линейного отображения  $G_t'$ . Подчеркнем, что второй дифференциал определен инвариантно (т.е. независимо от выбора локальных координат в  $M$ ) лишь на  $\ker G_t'$ .

Имеем

$$(3) \quad \begin{aligned} G_t' \alpha(\cdot) &= \int_0^t \mu_0 \circ h_\tau \alpha(\tau) d\tau \quad \forall \alpha(\cdot) \in L_\infty [0, t], \\ G_t''(\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot)) &= \int_0^t \mu_0 \circ \left[ \int_0^\tau h_\theta \alpha_1(\theta) d\theta, h_\tau \alpha_2(\tau) \right] d\tau \\ \forall \alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) &\in \ker G_t'. \end{aligned}$$

2. Перейдем наконец к задаче оптимального управления. Рассмотрим задачу быстрогодействия для системы

$$(4) \quad \dot{\mu} = \mu \circ f(u), \quad \mu \in M, \quad \mu(0) = \mu_0, \quad u \in U \subset \mathbf{R}^r;$$

здесь  $f(u)$  — непрерывно зависящее от  $u \in \mathbf{R}^r$  семейство гладких векторных полей в  $M$ . Допустимыми управлениями являются произвольные функции из  $L_\infty^+ [0, +\infty)$ , принимающие значения в  $U$ . Мы предполагаем, что для любого допустимого управления  $u(\cdot)$  нестационарное поле  $f(u(\tau))$ ,  $\tau \geq 0$ , является полным. Поскольку все дальнейшие рассуждения локальны, это предположение не ограничивает общности, но упрощает обозначения.

Зафиксируем теперь некоторое допустимое управление  $\tilde{u}(\tau)$  и положим  $f_\tau = f(\tilde{u}(\tau))$ . Ниже, не оговаривая этого каждый раз, мы используем все обозначения п. 1, связанные с нестационарным полем  $f_\tau$ .

Пусть  $\tilde{\mu}(\tau)$  — траектория, отвечающая управлению  $\tilde{u}(\tau)$ , т.е.  $\frac{d\tilde{\mu}}{d\tau} = \tilde{\mu} \circ f_\tau$ ,

$$\tilde{\mu}(0) = \mu_0.$$

**Предложение 1.** Если траектория  $\tilde{\mu}(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , является оптимальной по быстродействию среди допустимых траекторий системы (4), ведущих из точки  $\mu_0$  в точку  $\tilde{\mu}(t)$ , то существует такой ненулевой ковектор  $\psi \in T_{\mu_0}^* M$ , что

$$(5) \quad 0 \geq \langle \psi_0, \mu_0 \circ h_\tau \rangle = \min_{u \in U} \langle \psi_0, \mu_0 \circ \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } f_\theta d\theta f(u) \rangle$$

для почти всех  $\tau \in [0, t]$ .

Если же равенство в (5) определяет ковектор  $\psi_0$  однозначно с точностью до скалярного множителя, то вдобавок

$$(6) \quad \langle \psi_0, G_t''(\alpha, \alpha) \rangle = \int_0^t \left\langle \psi_0, \mu_0 \circ \left[ \int_0^\tau h_\theta \alpha(\theta) d\theta, h_\tau \alpha(\tau) \right] \right\rangle d\tau \geq 0$$

$$\forall \alpha(\cdot) \text{ такого, что } \int_0^t \mu_0 \circ h_\tau \alpha(\tau) d\tau = 0.$$

Напомним, что  $h_\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^\tau \text{ad } f_\theta d\theta f_\tau$ .

Заметим, что соотношение (5) есть просто другое выражение принципа максимума Понтрягина.

Сформулированное условие оптимальности лучше всего работает в случае, когда  $\tilde{u}(\tau)$  — кусочно-постоянное (в частности, релейное) управление; в этом случае действие группы замен времени означает просто варьирование моментов переключения. Пусть  $\tilde{u}(\tau) = u_i$  при  $t_i < \tau \leq t_{i+1}$ , где  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l < t_{l+1} = t$ . Положим  $f_i = f(u_i)$ , тогда

$$h_\tau = \overrightarrow{\exp} \int_0^{\tau} \text{ad } f_\theta d\theta f_i = e^{t_1} \text{ad } f_0 e^{(t_2 - t_1) \text{ad } f_1} \dots e^{(t_i - t_{i-1}) \text{ad } f_{i-1}} f_i$$

при  $t_i < \tau \leq t_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$

(мы воспользовались очевидным тождеством  $e^{\theta \text{ad } f_i} f_i = f_i$ ).

Таким образом,  $h_\tau$  не зависит от  $\tau$  на полуинтервале  $t_i < \tau \leq t_{i+1}$ , соответствующее векторное поле обозначим  $h_i$ . Пусть  $\alpha_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \alpha(\tau) d\tau$ , тогда

$$(7) \quad \langle \psi_0, G_t''(\alpha, \alpha) \rangle = \sum_{i=0}^l \left\langle \psi_0, \mu_0 \circ \left[ \sum_{j=0}^{i-1} h_j \alpha_j, h_i \alpha_i \right] \right\rangle, \quad \sum_{i=0}^l \mu_0 \circ h_i \alpha_i = 0.$$

Далее, предложение 1 мало что стоит, если не иметь достаточно эффективного и гибкого способа проверки неотрицательности квадратичной формы  $\langle \psi_0, G_t''(\cdot, \cdot) \rangle$ . Мы решим более общую задачу: научимся вычислять индекс этой квадратичной формы, что представляет независимый интерес. Напомним, что индексом квадратичной формы называется максимальная размерность подпространства, на котором форма отрицательна.

Равенство (6) дает явное выражение формы  $\langle \psi_0, G_t''(\cdot, \cdot) \rangle$  через векторные поля  $h_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ . В действительности, однако, используются лишь 1-струи по-

лей  $h_\tau$  в точке  $\mu_0$ , да и то не полностью. Наша ближайшая цель — исключить лишние параметры. Обозначим через  $\Sigma$  фактор-пространство пространства  $\text{Vect}(M)$  всех гладких векторных полей на  $M$  по ядру кососимметричной формы

$$(8) \quad (g_1, g_2) \mapsto \langle \psi_0, \mu_0 \circ [g_1, g_2] \rangle, \quad g_1, g_2 \in \text{Vect}(M).$$

Пусть  $\sigma$  — неособая кососимметричная форма на  $\Sigma$  (кососкалярное произведение), индуцированная формой (8). Пара  $\Sigma, \sigma$  есть, по определению, симплектическое пространство.

Пусть  $\alpha \in C^\infty(M)$  — такая функция, что  $d_{\mu_0} \alpha = \psi_0$ . Нетрудно показать, что ядро формы (8) совпадает с ядром линейного отображения  $g \mapsto (\mu_0 \circ g, d_{\mu_0}(g\alpha))$  из  $\text{Vect}(M)$  в  $T_{\mu_0} M \oplus T_{\mu_0}^* M$ . Более того,

$$\langle \psi_0, \mu_0 \circ [g_1, g_2] \rangle = \langle d_{\mu_0}(g_2\alpha), \mu_0 \circ g_1 \rangle - \langle d_{\mu_0}(g_1\alpha), \mu_0 \circ g_2 \rangle;$$

следовательно, отображение индуцирует изоморфизм симплектического пространства  $\Sigma, \sigma$  на пространство  $T_{\mu_0} M \oplus T_{\mu_0}^* M$  со стандартным кососкалярным произведением

$$(x_1 \oplus \xi_1, x_2 \oplus \xi_2) \mapsto \langle \xi_2, x_1 \rangle - \langle \xi_1, x_2 \rangle, \quad x_i \in T_{\mu_0} M, \quad \xi_i \in T_{\mu_0}^* M.$$

Пусть  $\dim M = m$ , тогда  $\dim \Sigma = 2m$ . В  $\Sigma$  имеется выделенное  $m$ -мерное подпространство, которое мы в дальнейшем обозначим  $\Pi_0$ : это образ пространства всех гладких векторных полей, обращающихся в нуль в точке  $\mu_0$  при канонической факторизации  $\text{Vect}(M) \rightarrow \Sigma$ . Образ при такой факторизации векторного поля  $h_\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , будем обозначать тем же символом  $h_\tau$ , это не приведет к недоразумениям. И, наконец, еще одно обозначение, позволяющее упростить формулы: положим  $Q(\alpha) = \langle \psi_0, G_t''(\alpha, \alpha) \rangle$ ,  $\alpha \in \ker G_t'$ . Имеем

$$Q(\alpha) = \int_0^t \sigma \left( \int_0^\tau h_\theta \alpha(\theta) d\theta, h_\tau \alpha(\tau) \right) d\tau, \quad \int_0^t h_\tau \alpha(\tau) d\tau \in \Pi_0.$$

В случае кусочно-постоянного  $h_\tau$  (см. (7)) это выражение сводится к следующему:

$$(9) \quad Q(\alpha) = \sum_{i=1}^l \sigma \left( \sum_{j=0}^{i-1} h_j \alpha_j, h_i \alpha_i \right), \quad \sum_{i=0}^l h_i \alpha_i \in \Pi_0.$$

3. Форма  $Q$  явно выражена через кососкалярное произведение  $\sigma$ . Таким образом, исследование формы  $Q$  есть задача симплектической геометрии.

Обозначим через  $L(\Sigma)$  совокупность всех лагранжевых подпространств в  $\Sigma$ . В частности,  $\Pi_0 \in L(\Sigma)$ . Для изотропного подпространства  $\Gamma \subset \Sigma$  и лагранжева подпространства  $\Lambda \subset \Sigma$  положим  $\Lambda^\Gamma = \{ \lambda \in (\Lambda + \Gamma) \mid \sigma(\lambda, \Gamma) = 0 \} \in L(\Sigma)$ . Ниже используется симплектический инвариант  $\text{ind}_{\Lambda_2}(\Lambda_1, \Lambda_3)$  тройки лагранжевых подпространств  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ , равный сумме индекса и половины размерности ядра квадратичной формы на пространстве  $(\Lambda_1 + \Lambda_3) \cap \Lambda_2 / \bigcap_{i=1}^3 \Lambda_i$ , индуцированной отображением  $\lambda_1 + \lambda_3 \mapsto \sigma(\lambda_1, \lambda_3)$ , где  $\lambda_1 \in \Lambda_1, \lambda_3 \in \Lambda_3, (\lambda_1 + \lambda_3) \in \Lambda_2$ . Этот инвариант, принимающий полуцелые значения, является модификацией индекса Маслова, подробности см. в [3, 4].

Индекс квадратичной формы  $Q$  обозначается  $\text{ind } Q$ . Из предложения 1 следует, что условие  $\text{ind } Q = 0$  во многих случаях необходимо для оптимальности управления  $\tilde{u}(\cdot)$ . Как уже отмечалось, это условие действительно близко к достаточно-

му, лишь когда  $\tilde{u}(\cdot)$  – релейное управление, в более общей ситуации оно заведомо нуждается в усилении. Поэтому в настоящей заметке мы рассмотрим лишь случай кусочно-постоянного  $h_\tau$  (см. (9)).

**Теорема 1.** Пусть  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_l < t_{l+1} = t$  и  $h_\tau = h_i$  при  $t_i < \tau \leq t_{i+1}$ . Положим  $\Lambda_{-1} = \Lambda_{l+1} = \Pi_0 \in L(\Sigma)$ ,  $\Lambda_i = \Lambda_{i-1}^{h_i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, l$ . Тогда для квадратичной формы  $Q(\alpha)$ , вычисляемой по формуле (9), имеем

$$(10) \quad \text{ind } Q = \sum_{i=0}^{l+1} \text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i) + \dim \bigcap_{i=0}^{l+1} \Lambda_i - m.$$

Заметим, что каждое из  $l+2$  слагаемых, стоящих под знаком суммы в (10), равно либо нулю, либо  $1/2$ , либо  $1$ . Анализ формулы (10) дает также

**Следствие.** В условиях теоремы 1, если хоть одно из чисел  $\text{ind}_{\Pi_0}(\Lambda_{i-1}, \Lambda_i)$ ,  $i = 1, \dots, l$ , равно  $1$ , то  $\text{ind } Q > 0$ .

4. Теорема 1 и ее следствие позволяют во многих случаях оценивать сверху число переключений оптимальной релейной траектории. Рассмотрим систему

$$(11) \quad \dot{\mu} = \mu \circ (f + ug), \quad |u| \leq 1, \quad \mu \in \text{SO}(3), \quad \mu(0) = \mu_0,$$

где  $\text{SO}(3)$  – группа вращений трехмерного пространства, а  $f, g$  – левоинвариантные векторные поля,  $f, g \in \text{so}(3)$ . Пусть, кроме того,  $\langle f_0, g \rangle = 0$ , где  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  – инвариантное скалярное произведение на  $\text{SO}(3)$ . Мы по-прежнему интересуемся релейными оптимальными по быстрдействию управлениями.

На обычный язык сказанное переводится следующим образом: имеется твердое тело, которое разрешается поочередно вращать вокруг двух фиксированных осей в заданных направлениях и с одинаковой скоростью. Требуется возможно быстрее привести тело в заданное положение. Единственным параметром, влияющим на характер движения, является угол между соответствующим образом ориентированными осями, который мы обозначим  $\varphi$ ,  $0 < \varphi < \pi$ .

Не ограничивая общности, можно считать, что  $\langle f, f \rangle + \langle g, g \rangle = 1$ . Тогда  $\cos \varphi = \langle f, f \rangle - \langle g, g \rangle$ .

Релейные траектории, удовлетворяющие принципу максимума Понтрягина, могут иметь сколько угодно переключений и полностью характеризуются следующим условием: время движения (= угол поворота) между соседними переключениями зависит лишь от траектории, но не от номера переключения, и лежит в промежутке  $[\pi, 2\pi)$ .

Пусть  $\tilde{u}(\cdot)$  – релейное управление, имеющее  $l \geq 2$  переключений и удовлетворяющее принципу максимума, а  $[\pi, 2\pi) \ni \alpha$  – время движения между соседними переключениями. Композицию двух последовательных вращений  $e^{\alpha(f-g)} \circ e^{\alpha(f+g)}$  можно представить как вращение на угол  $2\theta$  вокруг некоей третьей оси, где  $\theta \in (0, \pi)$  определяется соотношением

$$\text{tg}^2 \frac{\theta}{2} = \text{tg}^2 \frac{\varphi}{2} + \left( \text{ctg} \frac{\alpha}{2} / \cos \frac{\varphi}{2} \right)^2.$$

При возрастании  $\alpha$  от  $\pi$  до  $2\pi$  угол  $\theta$  монотонно возрастает от  $\varphi$  до  $\pi$ .

Можно показать, что для квадратичной формы  $Q$ , построенной, как выше, по  $\tilde{u}(\cdot)$ , справедливы неравенства  $0 \leq [l\theta/\pi] - \text{ind } Q \leq 1$  и в рассматриваемой задаче любое релейное оптимальное управление имеет не более  $[2\pi/\varphi]$  переключений.

Для полноты приведем сведения о траекториях, содержащих особые участки (см. [5]). Предположим, что оптимальное управление  $u(\tau)$  является особым на отрезке  $[\tau_0, \tau_1]$ , причем этот отрезок — максимальный по включению. Тогда:

- а)  $\tilde{u}(\tau) \equiv 0$  при  $\tau \in [\tau_0, \tau_1]$ ; б)  $\tau_1 - \tau_0 \leq \pi / \cos \frac{\varphi}{2}$ ; в) управление  $u(\tau)$

не имеет других моментов переключения, кроме  $\tau_0, \tau_1$ .

Всесоюзный институт научной  
и технической информации  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
22 XII 1988

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В. — Матем. сб., 1978, т. 107 (149), № 4, с. 467–532.
2. Agrachev A.A., Gamkrelidze R.V., Sarychev A.V. — Acta Applicand. Math., 1989, vol. 14, p. 191–237.
3. Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В. — ДАН, 1986, т. 287, № 3.
4. Аграчев А.А. — Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. М.: ВИНТИ, 1988, т. 20, с. 111–205.
5. Аграчев А.А., Гамкрелидзе Р.В., Вахромеев С.А. — Там же, 1983, т. 14, с. 3–56.

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

© Я.С. БАРИС, О.Б. ЛЫКОВА

### ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ПРИНЦИП СВЕДЕНИЯ В ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

(Представлено академиком Ю.А. Митропольским 7 XII 1988)

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)y + g(t, x, y), \quad \frac{dy}{dt} = C(t)y + h(t, x, y),$$

в которой матричные функции  $A, B, C$  непрерывны на интервале  $I \supset [0, \infty)$ , а вектор-функции  $g, h$  непрерывны на множестве  $I \times R^m \times V$ , где  $V$  — некоторая область из пространства  $R^n$ , содержащая замкнутый шар  $V_\rho$  радиуса  $\rho$  с центром в нуле.

Определение 1. Будем говорить, что для системы (1) имеет место критический случай, если существуют такие постоянные  $N, K, \nu > 0, \chi < \nu$ , что нормированные при  $t = s, s \in I$ , фундаментальные матрицы  $X(t, s), Y(t, s)$  уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = C(t)y$$

подчинены оценкам

$$\|X(t, s)\| \leq Ke^{\chi|t-s|}, \quad \|Y(t, s)\| \leq Ne^{-\nu|t-s|}.$$

Замечание 1. Если постоянную  $\chi$  можно выбрать как угодно малой по модулю или равной нулю, то приходим к определению критического случая в смысле Ляпунова [1, 2].