



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Я. Бакельман, Первая краевая задача для квазилинейных эллиптических уравнений, *Докл. АН СССР*, 1960, том 134, номер 5, 1005–1008

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.97.14.90

11 февраля 2025 г., 23:49:49



И. Я. БАКЕЛЬМАН

**ПЕРВАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

(Представлено академиком В. И. Смирновым 28 V 1960)

1. Пусть Ω — область на плоскости x, y , ограниченная замкнутой выпуклой кривой Γ . Относительно Γ мы будем предполагать, что она задается параметрически трижды непрерывно дифференцируемыми функциями $x = x(s)$, $y = y(s)$ (s — длина дуги на Γ) и ее кривизна во всех точках не меньше чем $\kappa_0 = \text{const} > 0$.

В области $\Omega + \Gamma$ рассмотрим первую краевую задачу для квазилинейного эллиптического уравнения

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q) \quad (1)$$

при нулевом граничном условии.

Мы будем предполагать, что функции A, B, C, D непрерывно дифференцируемы по всем переменным x, y, z, p, q и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \beta \leq 1$ по $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и по z, p, q при всех конечных значениях этих переменных.

Пусть

$$|D(x, y, 0, p, q)| \leq \varphi(x, y) R(\sqrt{p^2 + q^2}),$$

где $\varphi(x, y) \geq 0$ и $R(\sqrt{p^2 + q^2}) > 0$ — непрерывные функции своих переменных, первая в области $\Omega + \Gamma$, вторая на плоскости p, q .

По функции $\varphi(x, y)$ построим некоторые вспомогательные функции. Пусть M — произвольная точка кривой Γ . Обозначим через K_M круг наименьшего радиуса, который касается Γ в точке M и содержит внутри себя область $\Omega + \Gamma$. Пусть O_M — центр этого круга и r_M — его радиус. На отрезке $[0, r_M]$ строим функцию

$$f_M(\rho) = \max \varphi(x, y),$$

где наибольшее значение функции $\varphi(x, y)$ берется на дуге окружности с центром в O_M и радиусом $0 \leq \rho \leq r_M$, лежащей внутри $\Omega + \Gamma$. Пусть M — по-прежнему произвольная точка на Γ , а t_M — касательная к Γ в точке M . Спроектируем область $\Omega + \Gamma$ на прямую l_M , перпендикулярную t_M . Введем на плоскости x, y новую декартову систему координат u, v так, чтобы прямые l_M, t_M были соответственно осями u, v . Пусть $u_M^{(1)}$ и $u_M^{(2)}$ ($u_M^{(1)} < u_M^{(2)}$) — концы отрезка на оси u^* , который является проекцией области $\Omega + \Gamma$. Положим

$$\mu_M(u) = \max_v \varphi(u, v),$$

* Одно из чисел $u_M^{(1)}, u_M^{(2)}$ равно нулю.

где наибольшее значение функции $\varphi(u, v)$ берется для всех точек области $\Omega + \Gamma$ с общей проекцией на прямую u . Построенная функция определена на отрезке $[u_M^{(1)}, u_M^{(2)}]$.

Имеют место следующие теоремы о разрешимости задачи Дирихле для уравнения (1).

Теорема 1. Пусть в области $\Omega + \Gamma$ задано уравнение

$$A(x, y, p, q)r + 2B(x, y, p, q)s + C(x, y, p, q)t = D(x, y, z, p, q), \quad (2)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рассмотренным выше условиям, а также следующим требованиям:

а) Имеет место неравенство

$$\begin{aligned} A(x, y, p, q)\xi^2 + 2B(x, y, p, q)\xi\eta + C(x, y, p, q)\eta^2 &\geq \\ &\geq \alpha(\sqrt{p^2 + q^2})(\xi^2 + \eta^2), \end{aligned}$$

где $\alpha(\sqrt{p^2 + q^2})$ — непрерывная функция на плоскости p, q , строго положительная при всех конечных значениях p, q .

б) При всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и любых z, p, q справедливо неравенство

$$D_z(x, y, z, p, q) \geq \text{const} > 0.$$

в) При фиксированных x, y, z отношения $|D_x/D_z|, |D_y/D_z|, |C_x/C|, |A_y/A|, |D/D_z|$ равномерно ограничены в зависимости от z .

г) Выполнено одно из двух соотношений

$$\sup_{ME\Gamma} \left\{ \pi \int_0^{r_M} f_M(r) r dr \right\} < 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha^2(\sqrt{p^2 + q^2})}{R^2(\sqrt{p^2 + q^2})} dp dq \quad (3)$$

или

$$\sup_{ME\Gamma} \int_{u_M^{(1)}}^{u_M^{(2)}} \mu_M(u) du < \min \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)} d\tau, \int_0^{+\infty} \frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)} d\tau \right\}. \quad (4)$$

Тогда первая краевая задача для уравнения (2) при нулевом граничном условии однозначно разрешима в классе функций, третьи производные которых удовлетворяют в области $\Omega + \Gamma$ условию Гельдера с показателем $0 < \beta' < \beta$.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1, за исключением условия б), которое мы заменяем следующим:

б') Пусть при всех $x, y \in \Omega + \Gamma$ и любых z, p, q справедливо неравенство

$$D_z(x, y, z, p, q) \geq 0,$$

функции A, B, C, D при фиксированных x, y и z ведут себя при $p^2 + q^2 \rightarrow +\infty$ как полиномы по переменным p, q , а функция $D(x, y, z, p, q)$ представима в виде

$$D(x, y, z, p, q) = D_1(x, y, z, p, q) + D_2(x, y, z, p, q),$$

где

$$D_1(x, y, z, p, q) \geq 0$$

при всех $(x, y) \in \Omega + \Gamma, z, p, q$;

$$\frac{D_2}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2} \leq k = \text{const} < +\infty$$

для $(x, y) \in \Omega + \Gamma, p^2 + q^2 > 1$ и любых z .

Тогда имеет место заключение теоремы 1.

Теорема 3. Пусть в области $\Omega + \Gamma$ задано уравнение

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = D(x, y, z, p, q), \quad (5)$$

коэффициенты которого удовлетворяют следующим условиям:

а) Функции A, B, C, D непрерывно дифференцируемы по всем переменным и их первые производные удовлетворяют условию Гельдера с показателем $0 < \beta \leq 1$ по $(x, y) \in \Omega + \Gamma$ и при всех конечных z, p, q .

Далее при всех допустимых значениях x, y, z, p, q квадратичная форма

$A_z(x, y, z, p, q)\xi^2 + 2B_z(x, y, z, p, q)\xi\eta + C_z(x, y, z, p, q)\eta^2 \leq -\lambda_0(\xi^2 + \eta^2)$ ($\lambda_0 = \text{const} > 0$), и, наконец,

$$\begin{aligned} A(x, y, 0, p, q)\xi^2 + 2B(x, y, 0, p, q)\xi\eta + C(x, y, 0, p, q)\eta^2 &\geq \\ &\geq \alpha(\sqrt{p^2 + q^2})(\xi^2 + \eta^2), \end{aligned}$$

где $\alpha(\sqrt{p^2 + q^2})$ — непрерывная функция на плоскости p, q , строго положительная при всех конечных значениях p, q .

б) При всех допустимых значениях x, y, z, p, q имеем

$$D_z(x, y, z, p, q) \geq 0, \quad D(x, y, z, p, q) \geq \text{const} > 0.$$

в) Выполнено условие в) теоремы 1 и, кроме того, $A_y, A_z, A; C_x, C_z, C; D_x, D_y, D_z, D$ имеют одинаковые порядки роста по p, q .

г) Выполнено условие г) теоремы 1.

Тогда первая краевая задача при нулевом граничном условии для уравнения (5) имеет по крайней мере одно решение в классе функций, третьи производные которых удовлетворяют условию Гельдера в области $\Omega + \Gamma$ с показателем $\beta' < \beta$.

Отметим, что если строить функцию $\mu_M(u)$ так, чтобы ее график был симметричен относительно ординаты, проходящей через среднюю точку промежутка $[u_M^{(1)}, u_M^{(2)}]$ (для любой точки $M \in \Gamma$), то условие (4) можно заменить таким:

$$\sup_{M \in \Gamma} \int_{u_M^{(1)}}^{u_M^{(2)}} \mu_M(u) du < \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha(\tau)}{R(\tau)} d\tau.$$

2. Теоремы 1 и 2 представляют собой дальнейшее развитие результатов С. Н. Бернштейна по квазилинейным эллиптическим уравнениям вида (2) (см. (1)). С. Н. Бернштейн рассматривает уравнения, у которых коэффициенты A, B, C, D имеют согласованные порядки роста по p, q при $p^2 + q^2 \rightarrow +\infty$. Это согласование дается условием, что при $p^2 + q^2 > 1$

$$\frac{|D|}{Ap^2 + 2Bpq + Cq^2} \leq k = \text{const} < +\infty. \quad (6)$$

Первая краевая задача для уравнения

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = (1 + p^2 + q^2)^{3/2},$$

которое не подчиняется условию (6), разрешима, вообще говоря, лишь в достаточно малых областях.

Интегральные условия г) в теоремах 1 и 2 дают достаточные условия разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических уравнений, если порядки роста коэффициентов по первым производным не подчиняются условию согласования С. Н. Бернштейна. Отметим, что в ряде случаев эти условия весьма близки к необходимым, например, если

область Ω есть круг радиуса 1, а уравнение (2) имеет вид

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = (1 + p^2 + q^2)^{1/2}.$$

Геометрически здесь речь идет о построении поверхности со средней кривизной, равной единице. Решением рассматриваемой задачи будет полусфера радиуса единица.

Теорема 3 представляет собой аналог результатов Ю. Шаудера ⁽²⁾, Л. Ниренберга ⁽³⁾ и О. А. Ладыженской для уравнений

$$A(x, y, z, p, q)r + 2B(x, y, z, p, q)s + C(x, y, z, p, q)t = 0$$

на общий случай неоднородных квазилинейных эллиптических уравнений.

3. Наметим кратко план доказательства сформулированных теорем. Из результатов С. Н. Бернштейна ⁽¹⁾, Ю. Шаудера ⁽²⁾ и Л. Ниренберга ⁽³⁾ вытекает, что для этого достаточно доказать возможность получения априорных оценок для предполагаемого решения в пространстве C^1 . Мы получаем сначала априорную оценку модуля решения в $\Omega + \Gamma$ и его первых производных на границе. Для этого на решение уравнения натягивается выпуклая оболочка, которая представляет собой две выпуклые шапочки, обращенные выпуклостями в разные стороны и склеенные между собой по кривой Γ . Условия б) и г) в теоремах 1 и 2 и условия а), б) и г) в теореме 3 позволяют дать априорную оценку для наклонов опорных плоскостей на границе обеих шапочек, откуда легко вытекают нужные нам априорные оценки модуля и первых производных на границе. Априорные оценки модулей первых производных решения внутри получаются с помощью метода вспомогательных функций С. Н. Бернштейна.

После этого завершение доказательства теорем 1, 2 и 3 получается сведением к топологическому принципу Шаудера с помощью результатов Ниренберга и Шаудера по линейным эллиптическим уравнениям (подробно эта схема описана в ⁽³⁾).

В заключение заметим, что полученные выше результаты естественно обобщаются на случай достаточно гладкого неоднородного граничного условия; из-за недостатка места мы на них останавливаться не будем.

Ленинградский педагогический институт
им. А. И. Герцена

Поступило
17 V 1960

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ С. Н. Бернштейн, УМН, 8,75 (1941). ² J. Schauder, Math. Zs., 34, № 4 (1933). ³ L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., 6, № 3 (1953).
⁴ О. А. Ладыженская, ДАН, 120, № 5 (1958).